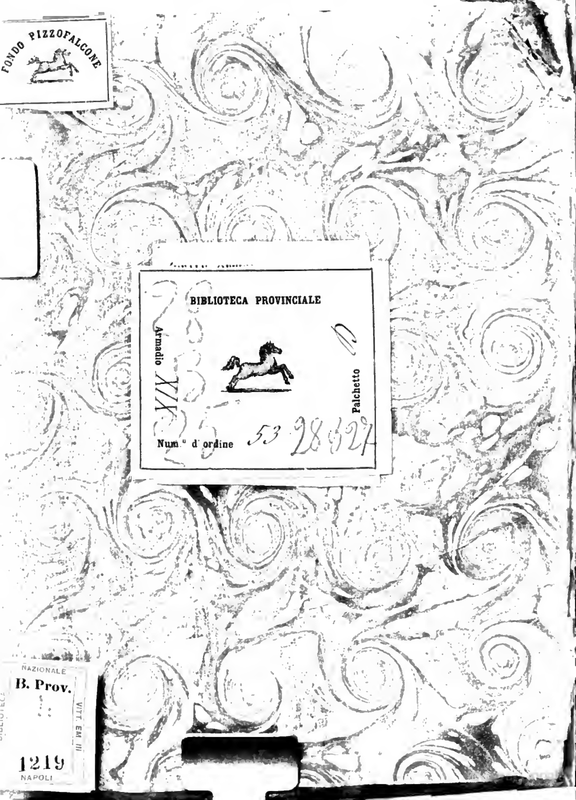



FONDO PIZZOFALCONE
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XIX
Palchetto
Num.° d' ordine 53 28427
NAZIONALE
B. Prov.
VITT. EM. III
1219
NAPOLI



JOHANNIS
BERNOULLI,

M. D. MATHESEOS PROFESSORIS,
Regiarum Societatum PARISIENSIS, LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ, BEROLINENSIS, *Socii* &c.

OPERA OMNIA,

TAM ANTEA SPARSIM EDITA,
quam hactenus inedita.

TOMUS TERTIUS,

Quo continentur ea
Quæ ab ANNO 1727 ad hanc usque diem prodierunt.
Accedunt
LECTIONES MATHEMATICÆ DE CALCULO INTEGRALIUM,

In usum Illustr. March. HOSPITALII conscriptæ.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Sumptibus MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Sociorum.

MDCCXLII.

N°. CXXXV.

DISCOURS
SUR LES LOIX
DE LA COMMUNICATION
DU MOUVEMENT,

Qui a mérité les Eloges de l'Académie Royale des Sciences, aux années 1724 & 1726, & qui a concouru à l'occasion des Prix distribuez dans les dites années.

Par M. JEAN BERNOULLI, *Professeur des Mathématiques à Basle, & Membre des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse.*

Imprimé

A PARIS,

MDCCXXVII.

LE LIBRAIRE AU LECTEUR.

COMME *l'Académie Royale des Sciences a parlé avantageusement & avec éloge, de l'Ouvrage de Mr.* BERNOULLI, *dans l'Avertissement qu'Elle a mis à la tête de la Piece de Mr.* MAC-LAURIN, *& de celle du Pere* MAZIERE; *Mr.* BERNOULLI *n'a pas fait difficulté de consentir que la sienne fût publiée. Nous la publions donc aujourd'hui, & avec d'autant plus de confiance, que l'illustre Académie a paru elle-même souhaiter que cet Ouvrage vit le jour, & que les excellentes choses qu'Elle y avoit remarquées, ne fussent pas perduës pour le Public. L'impression a été faite d'après le Manuscrit envoyé à cette Compagnie pour le Prix; & l'un des Juges nommez par Elle aux années* 1724 *&* 1725, *a bien voulu veiller à cette impression. Nous sommes persuadez que le Lecteur y trouvera des Recherches nouvelles, curieuses & instructives, & qu'il nous sçaura gré de lui en avoir fait part.*



LETTRE

A

MESSIEURS DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES,

Servant de PREFACE au DISCOURS suivant

MESSIEURS,



L'*Auteur de ce Discours sur la communication du Mouvement, a l'honneur de vous le presenter; il l'a composé à l'occasion de la premiere des Questions qu'il vous a plû de proposer aux Sçavans de l'Europe. Messieurs* HUGUENS, MARIOTTE, WREN, WALLIS, *& quelques autres habiles Mathematiciens, ont écrit solidement sur cette matiere, & nous ont laissé des regles, suivant lesquelles les corps doivent se communiquer leur mouvement; mais peu satisfait de tirer par une espece*

d'induction la régle generale des cas les plus simples, l'Auteur s'est prescrit une méthode differente de la leur, & en même tems plus naturelle. Il remonte à la source, & embrassant toute l'étenduë de son sujet, c'est sur les principes même de la Mechanique qu'il établit la regle generale, de laquelle il déduit ensuite, comme autant de Corollaires, les regles particulieres à chaque cas.

On n'a eu jusqu'ici qu'une idée assez confuse de la force des corps en mouvement, à qui M. DE LEIBNITZ *a donné le nom de* Force vive. *L'Auteur s'est non-seulement attaché à mettre cette matiere dans son jour, & à faire sentir en quoi consiste la difficulté élevée entre ce grand homme, & ceux d'un parti opposé; mais encore à prouver, par des démonstrations directes & toutes nouvelles, une vérité que* M. DE LEIBNILZ *lui-même n'a jamais prouvée qu'indirectement; sçavoir, que la force vive d'un corps n'est pas proportionelle à sa simple vitesse, comme on l'a crû communément, mais au quarré de sa vitesse: & il espere qu'après ce qu'il en dit ici, personne ne doutera plus de la vérité de cette proposition. Aussi non content de déterminer ce qui doit arriver à deux corps qui se choquent, soit directement, soit obliquement, l'Auteur détermine ce qui résulte du choc d'un corps, qui en rencontre deux ou plusieurs autres à la fois, selon differentes directions: Probléme si épineux que personne n'avoit encore entrepris de le résoudre. Et comment en seroit-on venu à bout? puisque sa résolution supose une connoissance exacte de la théorie des forces vives.*

Cette théorie ouvre un chemin facile à plusieurs véritez importantes. Elle a fourni à l'Auteur une résolution du Probléme précédent, qui paroît avoir quelque chose de singulier; la maniere de déterminer la perte actuelle des vitesses dans un milieu résistant; & un moyen aisé de trouver le centre d'oscillation dans les Pendules composées. Au reste, c'est à vous, MESSIEURS, *à juger si cet Ouvrage répond à l'attente de son Auteur. Plein d'estime & de consideration pour vôtre illustre Corps; il le regarde comme un Tribunal sans appel, au jugement duquel on défere d'autant plus volontiers, que toute l'Europe sçait qu'un esprit de discernement & d'équité regne dans vos sçavantes Décisions.*

L'Au-

L'Auteur oseroit-il se flatter, Messieurs, *que vos suffrages lui seront favorables ? On se persuade aisement ce qui fait plaisir ; quel que puisse être cependant le succès de son entreprise, il sera toûjours infiniment plus de cas de l'honneur de vôtre approbation, que de la recompense qui y est attachée.*

S'il lui restoit encore quelque chose à desirer, ce seroit, Messieurs, *de pouvoir vous convaincre de la parfaite consideration, & du dévouëment sincere avec lesquels il a l'honneur d'être,*

Messieurs,

le 1. Nov. 1723.

Votre très-humble & très obéïssant serviteur,

In magnis voluisse sat est.



DISCOURS



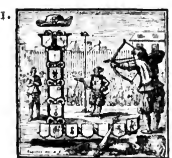


DISCOURS
SUR
LES LOIX DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT,

Contenant la solution de la premiere Question proposée par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1724.

CHAPITRE PREMIER.

De la dureté des Corps: Définition de la dureté selon les differentes idées qu'on peut en avoir.

1. 

L'ACADEMIE Royale des Sciences ayant proposé deux Prix pour les années 1724 & 1726, qui seront distribuez à ceux qui, au jugement de cette celebre Compagnie, auront le mieux réüssi à résoudre deux Questions differentes, j'ai crû que son invitation s'adressant à toutes les Nations, il m'étoit permis d'essayer mes forces sur un sujet, où je ne courois d'autre risque que celui d'employer

ployer en vain une partie de mon tems & de ma peine à composer ce Discours: ce que je dis seulement par raport à l'utilité qui pourroit m'en revenir; car quel qu'en soit d'ailleurs le succès, j'aurai du moins la satisfaction d'avoir fait de nouvelles découvertes, ausquelles je n'aurois peut-être jamais pensé sans cela.

2. Un prix de 2500 liv. est destiné à celui qui résoudra la premiere Question, conçuë en ces termes:

Quelles sont les loix suivant lesquelles un corps parfaitement dur, mis en mouvement, en meut un autre de même nature, soit en repos, soit en mouvement, qu'il rencontre, soit dans le vuide, soit dans le plein.

3. Mais avant de m'engager dans la recherche de cette Question, je commencerai par expliquer ce que j'entends par le mot de *dureté*. C'est le sort des termes qui servent à exprimer le sujet de quelque sensation, de ne nous donner qu'une idée vive & confuse de l'objet qui la fait naître.

Eclaircissons donc un mot équivoque par lui-même, & par les diverses idées qu'on y a attachées; & après avoir défini ce que nous entendons par *dureté*, il sera aisé de nous former de ce mot une idée nette & précise.

Le Philosophe & le Géometre soigneux de conserver à leurs démonstrations la clarté & l'évidence, doivent éviter avec soin toute maniere de parler ambiguë.

4. Le nom de *dureté* est un de ces termes qui ne signifient pas la même chose, même chez les Philosophes. Je ne m'amuserai point ici à examiner les differentes idées qu'on y a attachées en divers tems; ce seroit m'écarter de mon sujet. Je me contenterai d'indiquer, en peu de mots, l'idée que la plûpart des Philosophes se sont formés de la dureté. On croit communément qu'un corps est dur, lorsque ses parties étant en repos les unes auprès des autres, leur liaison ne peut être interrompuë que par une force exterieure, & que cette dureté est d'autant plus parfaite, qu'il faut une plus grande force pour en séparer les parties. Selon cette idée, un corps seroit parfaite-

faitement dur, dans le ſens d'une perfection abſoluë, lorſque ſes parties ne pourroient être ſeparées par aucun effort fini, quelque grand qu'on le ſupoſât. Les partiſans des Atomes ont attribué une dureté de cette nature à leurs Corpuſcules Elementaires; idée qui paroît être la véritable, lorſque l'on ne conſidere les choſes que ſuperficiellement; mais qu'on s'aperçoit bien-tôt renfermer une contradiction manifeſte pour peu qu'on l'aprofondiſſe.

5. En effet, un pareil principe de dureté ne ſçauroit exiſter; c'eſt une chimere qui repugne à cette loy generale que la nature obſerve conſtamment dans toutes ſes operations; je parle de cet ordre immuable & perpetuel, établi depuis la création de l'Univers, qu'on peut apeller LOY DE CONTINUITE', en vertu de laquelle tout ce qui s'execute, s'execute par des degrez infiniment petits. Il ſemble que le bon ſens dicte, qu'aucun changement ne peut ſe faire par ſault; *Natura non operatur per ſaltum*; rien ne peut paſſer d'une extremité à l'autre, ſans paſſer par tous les degrez du milieu. Et quelle connexion concevroit-on entre deux extremitez opoſées, indépendamment de toute communication de ce qui eſt entre deux? Si la nature pouvoit paſſer d'un extrême à l'autre, par exemple, du repos au mouvement, du mouvement au repos, ou d'un mouvement en un ſens à un mouvement en ſens contraire, ſans paſſer par tous les mouvemens inſenſibles qui conduiſent de l'un à l'autre; il faudroit que le premier état fut détruit, ſans que la nature ſçût à quel nouvel état elle doit ſe déterminer; car enfin par quelle raiſon en choiſiroit-elle un par préference, & dont on ne pût demander pourquoi celui-ci plutôt que celui-là? puiſque n'y ayant aucune liaiſon néceſſaire entre ces deux états, point de paſſage du mouvement au repos, du repos au mouvement, ou d'un mouvement à un mouvement opoſé; aucune raiſon ne la détermineroit à produire une choſe plutôt que toute autre.

6. Je veux qu'on aperçoive dans la nature des effets ſi prompts, qu'on ne remarque aucun intervalle entre le commencement & la fin de leurs actions; s'enſuit-il delà qu'il n'y en ait aucun?

& tous ceux qui ſont convaincus que tous les genres de quantité ſont diviſibles à l'infini, auront-ils de la peine à diviſer la plus inſenſible durée en un nombre infini de petites parties, & à y placer tous les degrez poſſibles de viteſſe, depuis le repos juſqu'à un mouvement déterminé ; par exemple, depuis le commencement d'un éclair, juſqu'à ſon entier évanoüiſſement.

7. Concluons donc que la dureté, priſe dans le ſens vulgaire, eſt abſolument impoſſible, & ne peut ſubſiſter avec la loy de continuité. Un peu de réflexion mettra cette vérité dans ſon jour. Supoſons que deux corps durs en ce ſens, & parfaitement égaux, ſe rencontrent directement avec des viteſſes égales, je dis qu'ils doivent, de toute neceſſité, ou s'arrêter tout court en ſe choquant, ou rebrouſſer chemin après s'être choquez : il impliqueroit que des corps durs ſe penetraſſent ; mais ces corps ne ſçauroient s'arrêter tout court, ſans paſſer ſubitement du mouvement au repos, de l'être au non être, ce qui repugne à la loy de continuité ; ni réflechir dans le ſecond cas, qu'ils ne changent tout d'un coup leurs viteſſes affirmatives en une viteſſe négative, ſans avoir parcouru auparavant toutes les diminutions ſucceſſives de la premiere viteſſe, juſqu'à ſa deſtruction totale, & de là, remonter par de pareilles augmentations, à une viteſſe en ſens contraire ; ce qui eſt également opoſé à cette loy.

8. Et certes ces raiſons ſont telles, qu'il ne me paroît pas poſſible que la dureté, priſe dans le ſens que nous venons de refuter, puiſſe quadrer avec les loix fondamentales de la nature : auſſi rejettai-je les prétendus atômes parfaitement ſolides, que quelques Philoſophes ont admis : ce ſont des corpuſcules imaginaires, qui n'ont de réalité que dans l'opinion de leurs partiſans.

9. Mais après avoir détruit la fauſſe idée qu'on ſe forme ordinairement de la dureté, il eſt juſte de lui en ſubſtituer une nouvelle, propre à expliquer d'une maniere intelligible, les phénome-

nomenes que nous connoissons, & sur-tout les loix de la communication du mouvement.

Pour cela, je conçois d'abord la matiere, entant que matiere, comme étant parfaitement fluide de sa nature; ensorte qu'aucune de ses particules, quelques petites qu'on les supose, n'ont aucune cohésion nécessaire entr'elles; mais telles cependant que ces mêmes parties ont pû s'amasser en de petites molecules élementaires, dont se sont formez les corps sensibles de differentes qualitez, les uns liquides, les autres mous, & d'autres plus ou moins durs, selon les differens concours, les differentes figures, & les divers mouvemens de ces molécules élementaires, & des particules qui passant par leurs interstices les tiennent, ou separez comme dans les fluides, ou qui les comprimant plus ou moins fortement, forment des corps que le vulgaire, qui n'en juge que par les sens, nomme *durs*, à proportion de la résistance que les parties de ces corps oposent à la force qui tend à les separer.

10. Et qu'on ne me demande point une raison physique de la compression de ces molécules élementaires, & de celle des corps durs & sensibles qu'ils composent. Mon but n'a point été de m'engager dans cette recherche; j'explique simplement ici ce que j'entens par le mot de *dureté*, & j'en donne une idée propre à rendre raison des proprietez connuës de la communication du mouvement, & à découvrir celles qui ne sont point encore connuës, & que l'experience pourra verifier; & c'est aussi tout ce que l'Academie exige de moi dans cette occasion.

11. Cette compression d'une matiere étrangére, qui environne les corps sensibles & leurs molécules élementaires, peut être si grande par la structure particuliere de quelques-uns de ces corps, qu'il faut employer un degré de force très-violent, non-seulement pour en separer entierement les parties, mais pour leur faire simplement changer de figure; tels sont, par exemple, la plûpart des métaux, qui quoique très-difficiles à être divisez, cedent pourtant au marteau, & s'aplatissent. Ces

ſortes de corps ſont durs, mais d'une dureté imparfaite; en ce qu'après avoir perdu leur premiere figure, ils ne reprennent pas celle qu'ils avoient avant d'avoir ſubi la force qui l'a changée.

12. Il eſt d'autres corps dont les particules ſont ſi adhérentes les unes aux autres, ſoit que cela vienne d'une compreſſion étrangére, ou de quelqu'autre cauſe, qu'outre la difficulté qu'on trouve à les briſer, ils recouvrent ſur le champ leur premiere ſituation, ſi quelque force extérieure les contraint de ſe plier, dès que la force qui les contraignoit ceſſe d'agir ſur eux. Ces corps comparez à ceux de la premiere ſorte, ont plus de dureté qu'eux.

13. Je n'entre point à preſent dans la cauſe phyſique de cette derniére eſpece de dureté; il me ſuffit de ſçavoir qu'il y a des corps capables de reſſort, ou doüez d'une vertu élaſtique. Je ne nie pourtant pas que cet effet ne puiſſe provenir de l'effort d'une matiere ſubtile, qui agiſſant ſur les pores rétrécis des corps élaſtiques, preſſe les parois de ces pores, & s'éforce de les remettre dans leur premier état.

14. Figurons-nous, par exemple, un ballon rempli d'un air condenſé. A ne conſiderer cet air qu'en lui-même, c'eſt ſans doute une matiere fluide; cependant dès qu'il eſt renfermé dans un ballon, il fait avec ce ballon un corps dur; parce qu'étant comprimé par une force exterieure, & ne pouvant échaper par aucun endroit, il réſiſte à cette force, & rend au ballon ſa premiere figure, dès que la force qui le comprimoit ceſſe d'agir. Augmentons à préſent la denſité de l'air renfermé dans ce ballon, juſqu'à un degré immenſe de réſiſtance, en ſorte qu'il faille une force extrême pour comprimer ce ballon: je ne vois pas, à en juger par les ſens, en quoi un pareil ballon differeroit des corps qu'on apelle durs.

15. Concevons enfin un nombre infini de petits ballons pleins d'un air extrêmement condenſé, renfermé ſous une envelope commune, & ſupoſons que chaque portion de cet amas, quelque petite qu'elle puiſſe être, eſt elle-même renfermée ſous

ſa

propre envelope, nous aurons une idée de ce que j'apelle dureté dans les corps. Les petits ballons répondront aux molécules élementaires; & les envelopes, tant celles qui renferment une portion de cet amas, que la masse même, tiendront lieu, dans cet exemple, d'un fluide ambiant, qui par son activité presseroit & comprimeroit en tout sens la masse entiere, & chacune de ses plus petites particules. Donnons à present un degré immense d'élasticité à l'air contenu dans ces petits ballons, & nous verrons que leur masse entiere, ni aucune portion de cette masse, ne pourra plus être comprimée sensiblement, par une force nouvelle finie, quelque grande qu'on la supose. Je dis sensiblement; car la résistance élastique de l'air n'est jamais absolument invincible, quand même elle seroit infinie. On retomberoit autrement dans le cas d'une dureté imaginaire; toute force qui agit sur un ressort, quelque fortement tendu qu'il soit, le bande davantage, & l'oblige de plier encore un peu, quand même la difference en seroit tout-à-fait imperceptible, & cette difference devient infiniment petite, lorsqu'un éffort fini agit sur un ressort d'une force infinie.

16. Un corps sera donc dur, conformément à l'idée que nous venons de donner de la dureté, lorsque ses parties sensibles changeant difficilement de situation, un ressort très-prompt & très élastique rend leur premiere situation dans un tems insensible au parties de ce corps, qui ont été tant soit peu pliées par le choc d'un autre corps; cette élasticité est parfaite, lorsque toutes les parties pliées reprennent leur premier état: elle est imparfaite, lorsque quelques-unes de ces parties n'y retournent plus. On peut donner le nom de roideur à l'élasticité parfaite; cette roideur peut être finie, ou infinie, & elle est d'autant plus grande, qu'il faut un effort plus considerable pour comprimer ce corps à un degré donné; la roideur est infinie dans un corps, ou ce corps est infiniment roide, lorsqu'il faut une pression infinie pour comprimer ce corps à un degré fini, ou une pression finie pour le comprimer à un degré infiniment petit.

17. Quoiqu'à proprement parler, il n'y ait point de corps dans la nature qui ſoient infiniment roides, il y en a pourtant un grand nombre, qui le ſont à un point, qu'une preſſion immenſe les comprime à peine ſenſiblement. Ainſi, par exemple, une boule d'acier ſuporte un poids de mille livres, ſans changer ſenſiblement de figure. Il eſt vrai, que ces mêmes corps cedent facilement lorſqu'on les réduit en plaques minces; & l'experience montre que rien n'eſt plus aiſé à plier qu'une lame d'acier. Mais auſſi on doit attribuer cette grande facilité à l'action du levier; chaque point d'un corps étendu en long tenant lieu d'hypomochlion, enſorte que le moment de la force appliquée aux extrêmitez de ce corps, eſt comme infini, par rapport à la réſiſtance des parties très proches de ce point.

18. J'entendrai donc toûjours, dans la ſuite de ce Diſcours, par corps durs, des corps roides; & quoiqu'il n'y ait point de corps parfaitement durs, puiſque leur dureté devroit conſiſter dans une roideur actuellement infinie; je ne laiſſerai pas de conſiderer comme tels ceux qui ont une roideur extrême, & d'autant plus que les corps parfaitement élaſtiques obſervent les mêmes loix dans la communication du mouvement, que ſi leur élaſticité étoit ou pouvoit être actuellement infinie; car ces loix dépendent uniquement de l'élaſticité parfaite, en vertu de laquelle les corps ſe redreſſent parfaitement, après un choc ſouffert; indépendamment de la promptitude avec laquelle ſe fait ce redreſſement, ou cette reſtitution à leur premier état.

19. Je ſupoſerai même d'abord des corps durs, dans le ſens vulgaire des Philoſophes, quelque répugnance qu'il y ait entre ce ſyſtême & la loi de continuité; auſquels au deffaut d'une élaſticité naturelle j'appliquerai par dehors des reſſorts artificiels, & cela ſeulement pour rendre plus intelligibles les démonſtrations des effets qui réſultent du choc des corps naturellement élaſtiques.

CHA-

CHAPITRE II.

Comment le Mouvement se détruit & se reproduit par la force du ressort. Egalité de l'action & de la réaction. Solution de quelques Problèmes.

HIPOTHESE.

1. *Tout corps mû dans le vuide continuera toûjours à se mouvoir avec la même vitesse, & dans la même ligne droite qu'il a commencé à parcourir, à moins qu'il ne rencontre un obstacle qui l'empêche ou le détourne.*

Cette proposition est un de ces Axiomes reconnus de tout le monde, & qui par cela même n'ont aucun besoin de preuve.

PROPOSITION.

2. *Un corps dur, pris dans l'une ou l'autre signification, rencontrant directement, avec une vitesse déterminée, un ressort d'une élasticité parfaite, dont un bout est appuyé contre un plan inébranlable, ou contre un point fixe, sera repoussé selon la même direction & avec la même vitesse.*

Cette proposition est claire & sa vérité saute aux yeux, pour peu d'attention qu'on fasse à la nature de l'action & de la réaction, qui sont toûjours égales entre elles; car dans le premier instant que le corps atteint le ressort débandé, ce ressort est contraint de se resserrer, & par là il acquiert un peu de force, au moyen de laquelle le ressort resiste un peu au corps, & lui ôte par consequent un peu de sa vitesse. Dans le second instant, le corps comprimant encore un peu le ressort, celui-ci reçoit un nouveau petit degré de force, & fait encore perdre au corps quelque peu de sa vitesse; & cela continuë ainsi par tous les degrez infiniment petits, jusqu'à ce que la vitesse du corps étant éteinte, il ait communiqué toute sa force au ressort, par

par un nombre infini de diminutions élementaires ou infiniment petites. Mais dès que le corps est parvenu au repos; le ressort commence à se débander, & à lui rendre successivement, dans un ordre renversé de temps, ces mêmes élemens de vitesse qu'il lui avoit ôté; ensorte que la perte du dernier élement de vitesse, sera réparée dans le premier instant, celle du pénultiéme dans le second instant, celle de l'antepénultieme dans le troisieme, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le ressort étant entierement débandé, le corps aura regagné sa premiere vitesse; mais en un sens contraire. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE I.

3. Je ne crois pas que cette Proposition puisse se prouver autrement; c'est en quoi consiste l'égalité de l'action & de la réaction. Toute action se fait successivement & par élémens, quelque petite que paroisse la durée de l'action entiere. Ainsi le choc de deux corps qui paroît commencer & finir dans le même instant, ne laisse pas d'être d'une durée, qui, à parler proprement, & en des termes de Géométrie, a ses élemens, je veux dire un nombre infini de parties infiniment petites.

SCHOLIE II.

4. Rien n'oblige de suposer un ressort tout-à-fait lâche ou débandé avant le choc, on peut au contraire le suposer déja bandé par un degré de force déterminé, & retenu par quelque arrêt, pourvû que la situation de cet arrêt soit telle, qu'elle laisse au ressort la liberté d'être plus fortement bandé, & de retourner à son premier état sans sortir du degré de tension dans lequel cet arrêt le retient: ceci étant une fois admis, je ne vois pas pourquoi la démonstration précedente ne pourroit pas s'apliquer également au cas suivant.

TAB. XLI. *Fig.* 1. 5. *ABMN*, est un cilindre creux fermé en *AB*, & ouvert en *MN*, dont la partie *ABDE* est remplie d'un air condensé, qui faisant effort pour se dilater, en est empêché par le dia-

diaphragme mobile *DE*, lequel pressé par l'effort de l'air enfermé, ne peut ni ceder, ni se mouvoir vers l'ouverture *MN*, à cause de l'obstacle *CC*, quoiqu'il puisse être repoussé vers le fond *BA*: Suposons à present une boule *G*, qui se mouvant dans la cavité du cilindre tende vers le diaphragme *DE*, avec une vitesse donnée *GE*, je dis que la vitesse de cette boule commencera à diminuer par degrez, dès qu'elle aura choqué le diaphragme *DE*, pendant que la densité de l'air enfermé augmentera à proportion du mouvement de ce diaphragme vers *AB*, jusqu'à ce que ce diaphragme étant enfin parvenu à une certaine situation *de*, la vitesse de la boule soit entierement anéantie. Mais il est évident que la boule *G* se trouvant dans un état de repos, l'air condensé dans l'espace *ABde* reprendra le dessus, & repoussera le diaphragme & la boule vers *MN*, avec une acceleration tout-à-fait égale à la * retardation que cette boule a souffert, en s'enfonçant de *DE* en *de*, & que le diaphragme *de*, étant d'ailleurs retenu en *DE*, par l'obstacle *CC*, la boule *G* doit le quitter en *DE*, & rebrousser chemin contre *MN*, avec sa premiere vitesse *EG*.

6. La maniere de déterminer par le calcul, la loi de la retardation de la boule *G*, lorsqu'elle commence à pénétrer dans l'espace *ABDE*, ou de son acceleration, lorsqu'ayant atteint le plan *de*, elle commence à rebrousser chemin, renferme deux cas, qu'il est à propos d'examiner à part: dans le premier, où l'on supose l'air extrêmement condensé, son élasticité peut être si grande, ou la vitesse de la boule *G* si petite, que l'espace *De* qu'elle parcourt, n'est pas comparable, ou n'a aucune raison sensible à l'espace total *DA*: dans le second cas, l'air *AD* n'est pas assez comprimé fortement, ou la boule *G* a une vitesse trop grande, pour que l'espace *De* n'ait pas un raport sensible à la totalité de l'espace *DA*.

7. Dans le premier cas, la retardation & l'acceleration seront uniformes par rapport aux tems, ainsi qu'elle se remarque

* J'entends par retardation, l'effet que produit le retardement, consideré comme cause.

dans les corps peſants, qui montent ou qui deſcendent perpendiculairement par l'action de leur peſanteur; car de même que la peſanteur, étant une fois conſtante & invariable, ajoute ou ôte au mobile un petit degré de viteſſe dans chaque inſtant; ainſi la réſiſtance de l'air enfermé dans l'eſpace *ABDE*, que la boule *G* doit vaincre en penetrant juſqu'en *de*, eſt invariable pendant tout le tems que cette boule parcourt l'eſpace *De*; car la partie *Ed* du cilindre *EB* ayant, par la ſuppoſition, une raiſon infiniment petite au cilindre entier *EB*, il eſt viſible que l'élaſticité de l'air réduit dans l'eſpace *eB*, ne peut pas être ſenſiblement plus grande qu'elle étoit avant ſa réduction, pendant qu'elle occupoit encore l'eſpace *EB*: concluons donc que la force de l'élaſticité réſiſte uniformement dans ce cas, & repouſſe la boule *G*, de même que la peſanteur reſiſte aux corps peſans, & les repouſſe quand il montent.

8. Dans le ſecond cas, la retardation de la boule *G* en s'approchant du fonds *AB*, ou ſon acceleration en s'en éloignant, n'eſt plus uniforme; parce que l'air étant plus compreſſé à meſure que la boule pouſſe le diaphragme vers le fond *AB*, il eſt évident que cet air acquiert plus de force pour retarder ou accelerer le mouvement de la boule quand il eſt plus condenſé que quand il l'eſt moins: on ne peut donc déterminer la loi de cette retardation, ou de cette acceleration, qu'on ne ſupoſe auparavant, ou qu'on ne connoiſſe la proportion qui regne entre les accroiſſemens de l'élaſticité de l'air & ſes denſitez. Des expériences ſouvent réiterées ont prouvé que l'élaſticité de l'air, lorſqu'on fait abſtraction de ſes autres qualitez, eſt ſenſiblement proportionnelle à ſa denſité, & que par conſéquent la force avec laquelle il reſiſte, quand la boule eſt en *DE*, eſt à la force dont il réſiſte, lorſque cette boule eſt en *de*, comme la denſité que l'air a lorſqu'il occupe l'eſpace *AD*, eſt à ſa denſité, lorſqu'il occupe l'eſpace *Ad*; ou, ce qui revient au même, ces efforts ſont en raiſon reciproque du cilindre *Ad* au cilindre *AD*, ou comme *Ae* eſt à *AE*: Prenant donc $AE = a$, & la variable $AF = x$, ce qui reſte de viteſſe

tesse à la boule G, ou ce qu'elle en a acquis lorsqu'elle est parvenuë en F, soit en allant vers le fonds, soit en revenant, $= v$; la force ou la résistance de l'air sera $= 1 : x$, & par conséquent, conformément à ce que j'enseignerai au Chapitre 13, où on verra une méthode generale de déterminer les vitesses des corps mûs contre des forces qui résistent, l'élément de la vitesse dv, sera $= dx : xv$. Donc $vdv = dx : x$; donc $\frac{1}{2} vv = lx$, j'entends par lx le logarithme de x, & dans le cas où x devient $= a$, on aura $\frac{1}{2} vv = la$. Ainsi le quarré de la vitesse au point F est au quarré de la vitesse au point E, comme le logarithme de AF est au logarithme de AE, les vitesses elles-mêmes sont donc en raison sous-doublée des logarithmes des intervalles qui sont entre la boule G & le fond AB. Il faut remarquer que le point e étant le terme jusqu'où la boule peut avancer, & où sa vitesse se réduit à rien, la ligne Ae doit être prise pour l'unité, afin que son logarithme soit $= 0$.

9. On n'a fait aucune attention, dans le calcul précédent, à la force de l'air exterieur, qui agit sur le diaphragme DE; mais suposons cette force, on déterminera les vitesses par la même méthode. Il n'y aura pour cela qu'à retrancher de la force de l'air condensé, celle avec laquelle l'air exterieur comprime la boule ou le diaphragme vers le fond AB, & considerer le reste comme la force qui retarde ou accelere la vitesse de la boule. En voici le calcul: Soit l'élasticité de l'air contenu dans le cilindre $ABDE$, dont la longueur est AE, égale à l'élasticité de l'air extérieur; le diaphragme DE sera également pressé par l'air du dehors & par celui du dedans; mais puisque j'ai exprimé la force de l'air condensé dans le cilindre dont la longueur est AF, par $1 : x$; la force de l'air contenu dans l'espace $ABDE$, égale à la force de l'air extérieur qui presse la boule vers AB, sera $= 1 : a$, parce que ces deux forces sont en raison réciproque de AF à AE: la force, qui retarde ou qui accelere, sera donc exprimée par $1 : x - 1 : a = (a - x) : ax$ dont on tirera, par la méthode

précedente, $(a - x)\,dx : axv = dv$, ou $vdv = (a - x)\,dx : ax - dx : x - dx : a$, & par conféquent $\frac{1}{2}vv = lx - x : a$; d'où je conclus que le quarré de la viteffe dans chaque point F, eft comme le logarithme de AF diminué d'une partie toûjours femblable de AF, & que le point e, dans lequel lx devient $= x : a$, eft le terme où finit la viteffe de la boule, & où recommence fon mouvement en fens contraire vers MN.

10. On auroit ici occafion, fi le fujet le permettoit, de faire des réflexions fur la jufte longueur qu'on doit donner aux pieces d'Artillerie, & aux canons de Moufquets, afin qu'ils portent le boulet ou la balle le plus loin qu'il eft poffible; je me contenterai d'indiquer ce qu'il y a de plus facile à concevoir.

On prouve par expérience que la poudre à canon renferme dans fes pores un air extrêmement comprimé, & dont la denfité, & par confequent auffi l'élafticité, eft plus de cent fois plus grande que la denfité & l'élafticité de l'air commun; le feu, étant mis à la poudre, ouvre de toutes parts les petites cellules qui retenoient cet air, lequel fortant rapidement s'unit en une maffe, & fe dilate avec une impétuofité augmentée encore confiderablement par la chaleur, qui, comme on le fçait, contribuë beaucoup à l'effort que l'air fait pour fe dilater: c'eft de cette dilatation auffi fubite que violente, que dépendent ces prodigieux effets qu'on remarque dans la poudre enflammée. Appliquons ceci à un canon chargé; dès que la poudre a pris feu, l'air fe dilate brufquement, & le boulet qu'il pouffe commence à fe mouvoir avec une acceleration extrêmement précipitée, & qui ne finiroit même jamais, quelque longue que fut la piece, fi l'air extérieur ne s'opofoit au mouvement du boulet. Une piece ne fçauroit donc être trop longue, fi on n'avoit égard qu'à la dilatation de l'air intérieur, qui cherchant continuellement à s'étendre de plus en plus, accelereroit fans ceffe le mouvement du boulet. Mais comme l'air extérieur oppofe auffi de fon côté une force égale & uniforme

forme au mouvement du boulet, qu'il s'efforce de repousser vers le fonds de la piece; il est visible que contrebalançant une partie de la force de l'air intérieur, il la rend inutile; de sorte que l'acceleration du boulet n'est causée que par l'excès de la force intérieure par dessus celle de l'air extérieur: cette acceleration cesse même, & dégenere en un mouvement retardé, dès que l'air intérieur est parvenu à un degré de consistance égal à celui de l'air extérieur. C'est dans ce moment que la vitesse du boulet est la plus grande; & c'est aussi jusques-là que la longueur de la piece devroit s'étendre, pour que le boulet ait au sortir de l'ame la plus grande vitesse possible.

11. Ce que nous venons de dire se confirme par l'équation précedente de la détermination de la vitesse $(a-x)\,dx : axv = dv$; car par la methode *de maximis*, on doit suposer la differentielle de la vitesse $dv = zero$, & l'on aura $(a-x)\,dx : axv = 0$. ce qui donne $x = a$, & par conséquent $1 : x = 1 : a$; d'où il paroît que l'élasticité de l'air intérieur designé par $1 : x$ doit être égale à $1 : a$, qui designe l'élasticité de l'air extérieur ou naturel. Suposé donc que l'air contenu dans une charge de poudre au moment qu'il en sort, & qu'il remplit l'espace que cette poudre occupoit auparavant, est cent fois plus dense que l'air naturel; il s'ensuit que le canon devroit être pour le moins cent fois plus grand que cet espace-là, si on n'avoit égard à plusieurs circonstances particulieres, ausquelles on n'a point fait d'attention dans ce raisonnement. Telles sont, par exemple, le frottement du boulet; une partie de la poudre que la violence du coup porte hors du canon avant quelle ait pris feu; l'air même dilaté qui se dissipe inutilement par la lumiere, & en s'échapant par l'évent entre l'ame de la piece, & l'épaisseur du boulet, &c. toutes raisons qui diminuant considérablement l'effort de la poudre, empêchent qu'on ne donne aux canons la longueur excessive que leur assigne le calcul. Je n'entre point ici dans plusieurs autres considerations, qui ne permettent pas de faire les pieces aussi longues qu'elles

le devroient être, si on n'envisageoit que la force avec laquelle la poudre agit sur le boulet.

12. Disons un mot de l'arquebuse à vent; il est aisé de voir, par ce que je viens d'expliquer, que la longueur de son canon sera la plus avantageuse, mesurée depuis l'endroit où repose la balle jusqu'à son embouchure, si toute sa capacité est à celle de l'espace dans lequel est renfermé l'air condensé, comme le nombre de fois moins un que cet air est plus dense que l'air naturel est à l'unité. Suposant donc que la densité de cet air renfermé soit dix fois plus grande que la densité de l'air dans son état naturel, la plus grande compression à laquelle l'art ait encore pû parvenir; le canon devra avoir neuf fois plus de capacité que l'espace qui contient l'air resserré par la pompe, afin que l'air condensé se trouve, après sa dilatation, de même densité que l'air exterieur, & qu'ainsi la balle ait acquis sa plus grande vitesse.

13. L'extrême longueur qu'on donne ordinairement aux Sarbacannes, est une preuve de ce que nous venons d'avancer: personne n'ignore que ce sont de longs tuyaux de bois, dont on se sert à chasser, par la force du souffle, de petites balles de terre. La détermination de leur longueur dépend de la quantité d'air que celui qui s'en sert peut souffler à la fois dans la Sarbacanne; ce qu'on peut déterminer avec assez de précision, de la maniere suivante: Prenez une vessie aplatie & humectée, au bout de laquelle vous adapterez un petit tuyau, de même ouverture que la Sarbacanne; faites entrer dans cette vessie, d'un coup de souffle violent, tout l'air que vous pourrez; & serrant ensuite le col de la vessie, ramassez cet air au fond de la vessie, sans vous efforcer de le comprimer: soit enfin réduit le volume de cet air, égal en densité à l'air extérieur, en un cilindre d'une base égale à l'orifice de la Sarbacanne; la longueur de ce cilindre déterminera celle de la Sarbacanne. Il faut toujours se souvenir que je ne fais ici aucune attention au frottement de la balle, ni aux autres inconveniens qui peuvent diminuer l'effet de l'air quand il se dilate.

CHAPI-

CHAPITRE III.

Ce que c'est que la viteſſe virtuelle. Principe de l'équilibre appliqué à la production du mouvement par l'entremiſe d'un reſſort entre deux corps en repos.

DEFINITION I.

1. J'Appelle *viteſſes virtuelles*, celles que deux ou pluſieurs forces miſes en équilibre acquierent, quand on leur imprime un petit mouvement; ou ſi ces forces ſont déja en mouvement. La *viteſſe virtuelle* eſt l'élement de viteſſe, que chaque corps gagne ou perd, d'une viteſſe déja acquiſe, dans un tems infiniment petit, ſuivant ſa direction.

DEFINITION II.

La *force vive* eſt celle qui réſide dans un corps, lorſqu'il eſt dans un mouvement uniforme; & la *force morte*, celle que reçoit un corps ſans mouvement, lorſqu'il eſt ſollicité & preſſé de ſe mouvoir, ou à ſe mouvoir plus ou moins vite, lorſque ce corps eſt déja en mouvement.

HYPOTHESE I.

2. *Deux agens ſont en équilibre, ou ont des momens égaux, lorſque leurs forces abſoluës ſont en raiſon reciproque de leurs viteſſes virtuelles; ſoit que les forces qui agiſſent l'une ſur l'autre ſoient en mouvement, ou en repos.*

C'eſt un principe ordinaire de Statique & Méchanique; que je ne m'arrêterai pas à démontrer: j'aime mieux l'employer à faire voir la maniere dont le mouvement ſe produit par la force d'une preſſion qui agit ſans interruption, & ſans autre oppoſition que celle qui vient de l'inertie du mobile.

3. Supo-

TAB.XLI. *Fig.* 2. 3. Supoſons deux corps en repos *A* & *B*, entre leſquels eſt un reſſort bandé *C*, qui commençant à ſe débander, faſſe un effort égal de part & d'autre, pour éloigner l'un de l'autre les corps *A* & *B*; il eſt viſible que chacun de ces corps opoſera au mouvement du reſſort, par ſon inertie, une reſiſtance proportionnelle à ſa maſſe. Il faut donc, en vertu de l'hypotheſe priſe de la Méchanique, que les deux efforts opoſez du reſſort, étant égaux, la force de l'inertie qui eſt en *A*, ſoit à la force de l'inertie qui eſt en *B*, ou que la maſſe *A* ſoit à la maſſe *B*, en raiſon reciproque de ce que la viteſſe virtuelle du corps *B* eſt à la viteſſe virtuelle du corps *A*; & comme la choſe continuë toujours, pendant que le reſſort en ſe dilatant accelere la viteſſe de ces corps, il eſt clair que leurs accelerations ſont continuellement en raiſon reciproque des maſſes *A* & *B*, ce qui forme une raiſon conſtante; & par conſequent les viteſſes acquiſes de part & d'autre, dans le même tems, leſquelles ne ſont autre choſe que les ſommes des viteſſes virtuelles, produites ſucceſſivement par l'effort du reſſort, ſont auſſi dans la même raiſon; je veux dire que la viteſſe de *B* eſt à la viteſſe de *A* comme *A* à *B*; d'où il ſuit, que le reſſort *C* étant entierement debandé, ou retenu par quelque obſtacle qui l'empêche de ſe débander tout-à-fait, les deux corps *A* & *B* continueront à ſe mouvoir avec les dernieres viteſſes acquiſes par l'impreſſion ſucceſſive du reſſort.

COROLLAIRE I.

4. On voit que le commun centre de gravité *C* des deux corps *A* & *B*, reſte continuellement en repos; ſoit pendant que le reſſort eſt en action, ſoit après l'entiére ſeparation de ces corps d'avec le reſſort. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à diviſer en *C* la longueur du reſſort avant ſa détente, en ſorte que $AC : BC = B : A$; il eſt manifeſte, par ce qu'on a dit, que les corps *A* & *B* étant parvenus en un certain tems en *a* & *b*, après la détente du reſſort, on aura $Cb : Ca = A : B$;

donc

donc le même point C ſera encore le centre commun de gravité des corps A & B, tranſportez en a & b.

COROLLAIRE II.

5. Soit, après l'entiere ſeparation des corps d'avec le reſſort, la viteſſe uniforme du mobile $A = a$, & la viteſſe du mobile $B = b$, on aura $A : B = b : a$, & par conſequent $aA = bB$; d'où il s'enſuit, que la quantité du mouvement, qui n'eſt autre choſe que le produit de la maſſe par la viteſſe, eſt égale de part & d'autre.

COROLLAIRE III.

6. Comme les parties du reſſort compriſes entre C & B, en ſe débandant, ſont employées uniquement à mouvoir le corps B; de même que toutes les parties du reſſort, compriſes entre C & A ſont auſſi uniquement employées à mouvoir le corps A; il faut que la force vive du corps B, qui eſt l'effet total de la partie CB du reſſort, ſoit à la force vive du corps A, qui eſt auſſi l'effet total de l'autre partie CA du reſſort, comme la longueur CB eſt à la longueur CA, ou (§. 3) comme la viteſſe du corps B eſt à la viteſſe du corps A; ainſi quoique les deux quantitez de mouvement de ces deux corps ſoient égales (§. 5), il ne s'enſuit nullement que les quantitez de leurs forces vives ſont auſſi égales; elles ſont au contraire entr'elles comme les produits de leurs maſſes par les quarrez de leurs viteſſes; ce que je prouve ainſi: Soit f la force vive du corps A, & F la force vive du corps B; on aura $f : F = a : b =$ (*Corol. preced.*) $a \times aA : b \times bB = aaA : bbB$, & partant en raiſon compoſée de A à B, & de aa à bb; mais cette vérité ſera demontrée plus au long dans la ſuite, où nous aurons occaſion d'examiner cette matiere à fond.

7. Supoſons à preſent que les deux corps parvenus en a & b, retournent, avec leurs viteſſes acquiſes, vers le reſſort deban-

dé; il est aisé de voir (*Chap.* 2, §. 2) qu'ils auront précisément autant de force qu'il leur en faut pour bander le ressort, & le remettre dans son premier état de compression, pendant que le centre de gravité *C* demeurera immobile comme auparavant; & que si le ressort vient à se debander de nouveau, il repoussera les corps *A* & *B*, de la même maniere qu'il l'a fait la premiere fois. D'où il paroît, que le ressort employe précisément autant de tems à se débander, qu'il lui en faut pour être rebandé par le choc des corps après leur retour. Car puisque le centre *C* demeure immobile, il tient lieu d'un plan inébranlable, ou d'un point fixe, contre lequel s'apuyeroit d'un côté le ressort *CA*, & de l'autre le ressort *CB*; ainsi qu'il en doit arriver aux corps *A* & *B*, par raport à la vitesse avec laquelle ils choquent les ressorts, comme on l'a montré dans l'article allegué.

8. Il s'ensuit encore, que la vitesse relative ou respective, avec laquelle les corps s'aprochent mutuellement avant que d'atteindre le ressort, est égale à la vitesse respective, avec laquelle ils s'éloignent l'un de l'autre après avoir quitté le ressort.

9. Et puisqu'il est arbitraire de donner tant ou si peu d'étenduë au ressort *AB* qu'on le juge à propos; on peut la suposer si petite, que les corps *A* & *B* soient censez se toucher au point *C*, lorsque par leurs concours ils auront bandé le ressort. Et s'il est indifferent de préferer une sorte de ressorts à toute autre; il n'est pas moins permis de s'en passer tout-à-fait, & de substituer deux corps parfaitement élastiques aux corps *A* & *B*, qu'on avoit dépoüillez de leur élasticité naturelle: par là on concevra aisément, que l'effet, qui resultera du choc de ces deux corps, doit être le même qu'auparavant; puisque les ressorts propres de ces corps, qui, au tems du concours, se confondent en un ressort commun, supléent au défaut d'un ressort exterieur, d'où on conclura la vérité du Theorême suivant.

THEO-

THEOREME.

10. *Si deux corps parfaitement élastiques, d'une roideur finie ou infinie, se rencontrent directement, en se mouvant l'un contre l'autre, avec des vitesses reciproquement proportionelles à leurs masses: Je dis 1°. qu'après le choc, chacun d'eux se mouvra en sens contraire, avec sa premiere vitesse, & par consequent aussi avec sa premiere quantité de mouvement. 2°. Que leur vitesse respective sera égale avant & après le choc. 3°. Et qu'enfin leur centre commun de gravité demeurera aussi immobile après le choc, qu'il l'étoit avant que ces corps se choquassent.*

11. Les regles de la communication du mouvement sont renfermées, comme tout autant de Corollaires, dans le Theoréme que nous venons d'établir d'une maniere nouvelle. Je prouverai ce que j'avance: qu'on me permette auparavant de proposer l'hypothese suivante, que personne ne conteste.

HIPOTHESE II.

12. *Si deux ou plusieurs corps, qui se meuvent sur un plan ou dans une espace quelconque, viennent à se rencontrer & à se heurter les uns contre les autres, de telle maniere qu'on voudra; les mouvemens qui résulteront de leur choc, seront les mêmes entre eux, soit que le plan, ou l'espace dans lequel sont ces corps, soit en repos, soit qu'il se meuve lui-même d'un mouvement uniforme, & suivant une même direction.*

Car la force du choc, ou de l'action des corps les uns sur les autres, dépend uniquement de leurs vitesses respectives; or il est visible que les vitesses respectives des corps ne changent pas, avant le choc, soit que le plan ou l'espace qui les contient soit sans mouvement, soit qu'il se meuve uniformement suivant une direction donnée; les vitesses respectives seront donc encor les mêmes après le choc.

COROLLAIRE.

13. Il s'enſuit delà, que ſi ce plan ou cet eſpace étant en repos, de même que le commun centre de gravité des corps qui s'y meuvent, il ſurvient enſuite à ce plan, ou à cet eſpace, un mouvement uniforme dans une direction donnée, le centre de gravité de ces corps ſe mouvra ſuivant la même direction, & avec la même viteſſe que le plan.

CHAPITRE IV.

Recherche de la Regle generale de la détermination du Mouvement.

PROBLEME.

1. S*Oient* A *&* B, *deux corps parfaitement roides, qui ſe meuvent du même côté ſur une ligne droite; que le corps* B *precede avec la viteſſe* b, *& que le corps* A *le ſuive avec une viteſſe* a, *plus grande que celle de* B, *enſorte qu'il le rattrape en quelque endroit de la ligne donnée. On demande quelles ſeront les viteſſes de ces deux corps après le choc?*

2. Pour réſoudre ce Problème general, ſous lequel ſont compris tous les cas particuliers, il n'y a qu'à ſupoſer que le mouvement de ces deux corps ſe fait ſur un plan, lequel a lui-même un mouvement uniforme vers le côté opoſé, dont la viteſſe eſt égale à celle qu'a le commun centre de gravité des corps *A* & *B*. De cette maniere, ce centre n'aura point de viteſſe par raport aux objets qui ſont en repos hors de ce plan, & les corps *A* & *B* ſeront par ce même raport dans le cas du Theorème general (*Chap.* 3, §. 10); je veux dire que leurs maſſes ſeront en raiſon réciproque de leurs viteſſes. Chacun d'eux ſera donc repouſſé après le choc avec la même viteſſe qu'il avoit avant le choc: Voici une maniere aiſée de réſoudre ce Problème par le calcul.

3. Les

3. Les viteſſes a & b, vers le même côté ſur le plan, étant multipliées par les maſſes A & B, la ſomme des produits, diviſée par la ſomme des maſſes, donne, par le principe de la Méchanique, la viteſſe du centre commun de gravité ſur ce même plan. Cette viteſſe ſera donc $= (aA + bB) : (A + B)$. Supoſons à preſent que le plan ſe meuve en arriere avec cette viteſſe; il eſt clair que, par rapport aux objets en repos hors du plan, la viteſſe du corps A ſera $= a - (aA + bB) : (A + B) = (aB - bB) : (A + B)$ en avant, & la viteſſe du corps B ſera $= (aA + bB) : (A + B) - b = (aA - bA) : (A + B)$ en arriere, mais $\frac{aB - bB}{A + B} : \frac{aA - bA}{A + B} = B : A$. D'où il paroit que les viteſſes, avec leſquelles les corps ſe rencontrent directement en allant l'un contre l'autre, ſont en raiſon reciproque de leurs maſſes. Ils ſe ſépareront donc après le choc, par le Theorème (*Chap.* 3, §. 10), chacun avec ſa premiere viteſſe; ainſi le corps A, retournera en arriere avec la viteſſe $(aB - bB) : (A + B)$, & le corps B ira en avant, avec la viteſſe $(aA - bA) : (A + B)$. Remettons à preſent le plan dans ſon premier repos, ou, ce qui revient à la même choſe, rendons à chacun la commune viteſſe $(aA + bB) : (A + B)$ en avant, qu'on leur avoit ôtée par la ſupoſition, en imprimant la même viteſſe en arriere au plan; & alors le corps A aura après le choc une viteſſe $(aA + bB) : (A + B)$ en avant, plus une viteſſe $(aB - bB) : (A + B)$ en arriere; mais dans le langage des Algebriſtes, une viteſſe poſitive en arriere, eſt une viteſſe negative en avant. Donc la viteſſe en avant du corps A après le choc, ſera $(aA + bB) : (A + B) - (aB - bB) : (A + B) = (aA - aB + 2bB) : (A + B)$, & la viteſſe en avant du corps B, ſera $(aA + bB) : (A + B) + (aA - bA) : (A + B) = (2aA - bA + bB) : (A + B)$. C. Q. F. T.

SCHOLIE.

4. On doit remarquer trois cas differens qui peuvent arriver au corps A après le choc, car $(aA - aB + 2bB) : (A + B)$ est affirmatif, negatif, ou égal à zero, selon que $aA + 2bB$ est ou $>$, ou $<$, ou $=$ à aB. Dans le premier cas, le corps A continuëra son chemin, dans le second cas il reculera, & dans le troisiéme il s'arrêtera.

5. Cette regle est generale, pour tous les corps qui vont du même sens avant de se choquer; mais il est aisé d'en tirer une autre, qui serve pour tous les corps qui se meuvent en sens contraire avant leur choc. On n'a pour cela qu'à suposer que b, ou la vitesse en avant du corps B est negative; car pour peu que l'on ait l'esprit algebrique, on conçoit aisément, que se mouvoir negativement en avant, c'est se mouvoir positivement en arriere. Si l'on change donc, dans la formule precedente, les signes qui sont devant la lettre b, il en resultera une expression pour les vitesses qu'auront, après leur choc, les corps A & B qui se rencontrent directement avec des vitesses oposées a & b, on aura donc la vitesse du corps $A = (aA - aB - 2bB) : (A + B)$ & la vitesse du corps $B = (2aA + bA - bB) : (A + B)$, à les prendre toutes deux en avant, c'est-à-dire, selon la direction qu'avoit le corps A avant le choc: mais si l'une ou l'autre de ces formules, ou toutes les deux, sont négatives, c'est une marque que l'une d'elles, ou toutes les deux, expriment une direction contraire à celle qu'avoit le corps A avant le choc.

COROLLAIRE I.

6. On a conclu du Theorème (*Chap.* 3, §. 10) & du Corol. (§. 13) que la vitesse respective des deux corps A & B demeure la même avant & après leur choc, soit qu'ils se meuvent en un même sens, soit qu'ils se meuvent en sens contraire: nos deux formules generales confirment cette vérité; car

1°.

1°. si avant le choc leur mouvement tend du même côté, leur vitesse respective est $a - b$, mais après qu'ils se sont choquez, la vitesse du corps B, comme la plus grande en avant, est $= (2aA - bA + bB) : (A + B)$, & la vitesse du corps A, comme la plus petite en avant, est $= (aA - aB + 2bB) : (A + B)$; retranchant donc cette formule de la premiere, il restera aussi $(aA + aB - bA - bB) : (A + B) = a - b$.

2°. Si, avant le choc, les corps A & B ont des vitesses opposées, on aura $a + b$ pour leur vitesse respective; or la difference de la formule $(aA - aB - 2bB) : (A + B)$ à la formule $(2aA + bA - bB) : (A + B)$, lesquelles expriment les vitesses en avant des corps A & B, après leur choc, donne aussi $(aA + aB + bA + bB) : (A + B) = a + b$.

COROLLAIRE II.

7. Le mouvement du centre commun de gravité des corps A & B, ne change par le choc, ni de direction, ni de vitesse: On l'a fait voir, en suposant un mouvement dans le plan sur lequel ces deux corps se meuvent, & c'est aussi ce que nos formules montrent clairement; car dans le cas où A & B se meuvent tous deux en avant, nous avons démontré (§. 3) que la vitesse de leur commun centre de gravité est $= (aA + bB) : (A + B)$; or en multipliant les vitesses après le choc par les masses, & en divisant la somme des produits par la somme des masses, il vient $(aAA + aAB + bAB + bBB) : (AA + 2AB + BB) = (aA + bB) : (A + B)$; & dans le cas où A & B se meuvent en sens contraire, leur commun centre de gravité, aura pour vitesse $(aA - bB) : (A + B)$; mais les vitesses après la réflexion, lesquelles sont $(aA - aB - 2bB) : (A + B)$ & $(2aA + bA - bB) : (A + B)$, toutes deux en avant, étant multipliées par les masses, & ensuite la somme des produits, divisée par la somme des masses, on aura $(aAA + aAB - bAB - bBB) : (AA + 2AB + BB) = (aA - bB) : (A + B)$.

DEFI-

DEFINITION.

8. J'appelle *quantité de direction*, le produit de la viteſſe du commun centre de gravité, par la ſomme des maſſes.

THEOREME.

9. *La quantité de direction demeure toujours la même, tant après qu'avant l'impulſion :*

Cette quantité étant toujours $\frac{aA \pm bB}{A+B} \times (A+B) = (aA \pm bB)$; le ſigne ſuperieur eſt affirmatif, deſignant le mouvement des corps en même ſens ; & le ſigne inferieur eſt negatif, deſignant le mouvement en ſens contraire.

D'où il paroit que la quantité de mouvement ne ſe conſerve pas toujours, comme on ſe l'imagine communement. Et en effet, cette quantité ne ſe conſerve qu'en deux cas, 1°. lorſque les corps ſe meuvent du même côté, avant, & aprés leur choc ; 2°. lorſque la quantité de la direction eſt nulle, ou que le commun centre de gravité eſt ſans mouvement ; parce qu'alors les corps réflechiſſent chacun avec ſa premiere viteſſe.

10. Notre methode nous ayant conduit immediatement à la Régle generale ; ce ſeroit perdre ſon tems que de l'appliquer à tous les cas particuliers, que les Auteurs ont été obligez de réſoudre pour y pouvoir parvenir, & d'autant plus que le moindre Géometre eſt en état de le faire : il n'y a qu'à ſubſtituer, dans nos formules generales, les valeurs ſelon les conditions du cas qu'on s'eſt propoſé ; je me contenterai d'en donner quelques exemples.

11. Les deux corps A & B étant ſupoſez égaux, la viteſſe du premier $= a$, & celle du ſecond $= b$; on demande ce qui doit arriver après l'impulſion. Subſtituez par tout A à B, & vous verrez que la premiere formule $(aA - aB + 2bB) : (A+B)$ devient $= (aA - aA + 2bA) : (A+A) = 2bA : 2A = b$, & $(2aA - bA + bB) : (A+B) = (2aA - bA$ +

$+bA) : (A+A) = 2aA : 2A = a$. On trouvera de même que dans la seconde formule il vient $(aA - aB - 2bK) : (A+B) = (aA - aA - 2bA) : (A+A) = -2bA : 2A = -b$; & $(2aA + bA - bB) : (A+B) = (2aA + bA - bA) : (A+A) = 2aA : 2A = a$; en sorte qu'il se fera toujours un échange de vitesse, soit que les corps se meuvent en un même sens, ou en sens contraire; je veux dire qu'après la percussion, le corps A prendra la vitesse du corps B, & le corps B celle du corps A, conformement aux regles que les Auteurs en ont donnez.

12. Les deux corps A & B ayant entr'eux une raison quelconque, & B étant suposé en repos, on demande combien de vitesse chacun de ces deux corps aura après l'impulsion? On trouve en prenant dans les formules $b = 0$, que la vitesse du corps A sera $= (aA - aB) : (A+B)$ & celle du corps B, $= 2aA : (A+B)$.

13. Si suposant B en repos, & A en mouvement avec une vitesse donnée c, on supose ensuite A en repos, & B en mouvement, avec une vitesse égale; & qu'on souhaite de connoître la raison de la vitesse communiquée à B, dans la premiere suposition, à la vitesse communiquée à A, dans la seconde suposition; on déterminera comme dans l'article précédent, la vitesse de $B = 2cA : (A+B)$, & celle de $A = 2cB : (A+B)$; mais il est clair que $\frac{2cA}{A+B} : \frac{2cB}{A+B} = A : B$; donc ces vitesses sont en raison des masses, ce que M. HUGUENS a aussi démontré, dans son Traité *De motu corporum ex percussione*, *Prop.* 10.

14. On remarquera ici en passant, que quelque grand que soit le corps en mouvement, & quelque petit que soit le corps en repos, la vitesse, que celui-ci acquerrera par le choc, sera toujours moindre que le double de la vitesse avec laquelle il est frapé par le grand. Car il est visible que $2cA : (A+B) < 2c$. Cependant si A, étoit infiniment, ou incomparablement plus grand que B, alors $2cA : (A+B)$ passeroit pour égal

 à

à $2cA:(A+o)=2cA:A=2c$, c'est-à-dire, que la vitesse que recevroit le corps *B* seroit actuellement double de celle que le corps *A* avoit avant le choc ; ainsi $2c$ est le terme dont on aproche de plus en plus en augmentant à l'infini le corps *A*, ou en diminuant à l'infini le corps *B*.

15. Toutes les autres propositions, que M. HUGUENS a démontrées à sa maniere dans le Traité dont nous venons de parler, se vérifient aisément par nos formules generales. J'en excepte une faute, où il est tombé à la page derniere, lorsqu'il dit : *Si corpora centum ex ordine dentur in proportione dupla, incipiatque motus a maximo, invenitur subducto calculo ad praeceptum regulae Propositione nona tradita, sed in compendium redactae, celeritas minimi ad celeritatem qua movebatur maximum proxime ea quae* 14760000000 *ad* 1. Car je trouve par le moyen des logarithmes, qui est aparemment le *Compendium* dont a parlé M. HUGUENS, qu'il falloit dire *proxime ea quae* 2338500000000 *ad* 1. De sorte que la véritable vitesse de ce corps est plus de 150 fois plus grande que celle que cet Auteur lui assigne.

16. Le cas où deux corps se rencontrent obliquement n'exige point de regle particuliere ; il suffit pour cela d'admettre la composition de mouvement, que personne ne fait difficulté de recevoir à présent. Si l'on souhaite donc de sçavoir ce qui resulte du choc de deux corps, qui concourent selon deux directions differentes, ou qui se frapent non centralement ; on n'a qu'à décomposer le mouvement de chacun de ces corps en deux autres mouvemens, dont l'un ait pour direction la tangente commune, tirée par le point où ces corps, considerez comme sphériques, se rencontrent, & l'autre une direction perpendiculaire à la premiere : les perpendiculaires représenteront un concours direct compris dans la regle generale, pendant que les parallèles continuëront après le choc sans aucun changement. On formera donc, autour de ces directions laterales, deux nouveaux parallèlogrammes ; leurs diagonales donneront les déterminations, & les vitesses des corps après le choc.

CHA-

CHAPITRE V.

De la force vive des corps qui sont en mouvement.

1. JE me propose d'examiner dans ce Chapitre ce que la matiere du mouvement a de plus important; je parle de cette force des corps que M. DE LEIBNITS appelloit *vive*, pour la distinguer d'une autre force, à qui il avoit donné le nom de *force morte*; j'ai déja eu occasion de définir au commencement de cet ouvrage (*Chap. III*) ce que j'entends par force vive, & par force morte, & de déterminer en passant la véritable mesure de la force vive; mon but est à présent d'expliquer à fonds la nature & les proprietez de cette force, & je l'entreprends d'autant plus volontiers qu'un grand nombre de Philosophes, très-éclairez d'ailleurs, confondent encore ces deux forces; & n'ont pû être tirez de leur erreur.

2. Nous avons vû, au Chapitre III, que la force morte consistoit dans un simple effort, & cet effort est tel qu'il peut subsister, quoiqu'un obstacle étranger l'empêche à tout moment de produire un mouvement local dans les corps sur lesquels cet efforts se déploïe. Telle est par exemple la force de la pesanteur. Un corps pesant, soutenu par une table horizontale, fait un effort continuel pour descendre; & il descendroit effectivement, si la table ne lui oposoit un obstacle qui le retient; ainsi la pesanteur produit une force morte dans les corps, dont l'effet n'est que momentané. Chaque instant, la pesanteur imprime aux corps, sur qui elle agit, un degré de vitesse infiniment petit, lequel est aussi-tôt absorbé par la résistance de l'obstacle. Ces petits degrez de vitesse périssent en naissant, & renaissent en périssant; & c'est dans cette réciprocation consstante, dans ce retour de production & de destruction, en quoi consiste l'effort de la pesanteur, quand elle est retenuë par un obstacle invincible, à qui nous avons donné le nom de for-

ce morte. Quant à l'obſtacle, il reçoit de cette preſſion, lorſqu'il réſiſte à l'effort de la peſanteur, une force toujours égale, & réciproque à celle avec laquelle cette même peſanteur agit ſur lui. La force morte a cela de particulier, qu'elle ne produit aucun effet qui dure plus long-tems qu'elle : dès que cette force ceſſe, tout ceſſe avec elle ; & ſon effet ne ſurvit jamais à ſon action. Si le corps peſant, ſoutenu par la table, perdoit tout-à-coup ſa peſanteur, la table ceſſeroit dans le même inſtant d'être preſſée.

3. Il n'en eſt pas de même de la force vive ; ſa nature eſt toute differente, elle ne peut ni naître, ni périr en un inſtant, comme la force morte ; il faut plus ou moins de tems pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas ; il faut auſſi du tems pour la détruire dans un corps qui en a. La force vive ſe produit ſucceſſivement dans un corps, lorſque ce que corps étant en repos, une preſſion quelconque appliquée à ce corps, lui imprime peu-à-peu, & par degrez, un mouvement local. On ſupoſe qu'aucun obſtacle ne l'empêche de ſe mouvoir. Ce mouvement s'acquiert par des degrez infiniment petits, & monte à une viteſſe finie & déterminée, qui demeure uniforme, dès que la cauſe qui a mis ce corps en mouvement ceſſe d'agir ſur lui : ainſi la force vive, produite dans un corps, en un tems fini, par une preſſion qu'aucun obſtacle n'a retenuë, eſt quelque choſe de réel ; elle eſt équivalente à cette partie de la cauſe, qui s'eſt conſumée en la produiſant ; puiſque toute cauſe éfficiente doit être égale à ſon effet pleinement exécuté.

4. Le corps qui reçoit cette force, n'étant retenu par aucun obſtacle, n'opoſe de réſiſtance à cette force que celle qui dépend de ſon inertie, toujours proportionnelle à ſa maſſe ; deſorte que les petits degrez de mouvement, que la preſſion imprime ſucceſſivement à ce corps, s'y conſervent, & s'accumulent juſqu'à produire enfin un mouvement local. On pouroit comparer la force vive, effectuée par une preſſion continuelle qu'aucun obſtacle n'empêche, à une ſurface décrite par le mouvement

vement d'une ligne, ou à un solide décrit par le mouvement d'une surface; il n'y a donc pas plus de comparaison à faire entre la simple pression ou la force morte, & la force vive, qu'entre une ligne & une surface, qu'entre une surface & une solide: ce sont des quantitez héterogénes, qui n'admettent point de comparaison.

5. Quelle que soit la cause d'une pression, qui par la durée de son action produit enfin du mouvement, si elle est d'une quantité déterminée, telle qu'un ressort bandé, par exemple, qui par sa détente employe sa force à produire une vitesse actuelle dans un corps qui n'en avoit point auparavant; je dis, & la chose est évidente, qu'à mesure que ce corps reçoit de nouveaux degrez de force, la cause qui les produit en doit perdre tout autant, jusqu'à ce que toute la force du ressort soit épuisée & transferée au corps, dans lequel elle est comme ramassée par l'accumulation de tous les petits degrez qui y ont été produits successivement. C'est cette force, entant qu'elle est dans le corps mis en mouvement par l'épuisement de la pression du ressort, qu'on doit apeller proprement *la force vive*; en vertu de laquelle le corps se transporte d'un lieu à un autre, avec une certaine vitesse, plus ou moins grande selon l'énergie du ressort.

6. On voit encore ici la grande difference qu'il y a entre la force vive, & la force morte. La seule pression, ou la force morte que reçoit un obstacle immobile, par l'effort d'un ressort qui cherche à se débander, ne diminuë en rien la force du ressort, bien loin de l'épuiser. L'air, par exemple, condensé dans un recipient, fait un effort continuel pour se dilater, sans jamais rien perdre de sa force; parce que les parois du recipient, ne pouvant ceder, ne font que soutenir sa pression, sans affoiblir l'élasticité de l'air: mais la force du ressort se consume, en donnant du mouvement à un corps, c'est-à-dire, en produisant une force vive; la production du moindre degré de cette force demande la perte ou la destruction d'un degré égal de la force du ressort: l'un est la cause, & l'au-

l'autre l'effet immediat qui en résulte : or la cause ne sçauroit perir, en tout ou en partie, qu'elle ne se retrouve dans l'effet à la production duquel elle a été employée.

7. Je conclus de là, que la force vive d'un corps, qui a été produite par le débandement de quelque ressort, est capable de le rebander précisement au même degré de force que ce ressort avoit : & si on supose que cette force vive est employée toute entiere à bander deux, trois, ou plusieurs réssorts égaux entr'eux, mais plus foibles que le précédent ; je dis que ce premier ressort peut produire un effet deux fois, trois fois ou plusieurs fois plus grand qu'un de ces ressorts foibles. L'égalité, qui regne entre l'effet & sa cause efficiente, prouve ce que nous venons d'avancer.

8. C'est dans cette égalité, que consiste la conservation des forces des corps qui sont en mouvement ; puisqu'il est visible que la plus petite partie d'une cause positive ne sçauroit se perdre, qu'elle ne reproduise ailleurs un effet, par lequel cette perte soit réparée.

9. Comme on a été long-tems dans la persuasion, que la quantité du mouvement, ou le produit de la masse d'un corps par sa vitesse, étoit la mesure de la force de ce corps ; on a crû faussement qu'il étoit nécessaire qu'il y eut toujours une égale quantité de mouvement dans l'Univers.

10. L'origine de cette erreur, ainsi que je l'ai déja insinué, vient de ce qu'on a confondu la nature des forces mortes, avec celle des forces vives : car voyant que le principe fondamental de la Statique exige que, dans l'équilibre des puissances, les momens soient en raison composée des forces absolues, & de leurs vitesses virtuelles ; on a étendu mal à propos ce principe plus loin qu'il ne falloit, en l'appliquant aussi aux forces des corps qui ont des vitesses actuelles.

11. Ce n'est que depuis trente ou quarante ans, que quelques personnes se sont aperçûës que ces deux forces sont d'une nature tout-à-fait differente, n'y ayant pas plus de raport entr'elles, qu'entre une ligne & une surface, ou qu'entre une

surface

surface & un solide. M. DE LEIBNITZ est le premier, qui a remarqué que cette force n'étoit point égale au produit de la masse par la vitesse, mais que sa mesure étoit le produit de la masse par le quarré de la vitesse.

12. La nouveauté de ce sentiment lui attira des adversaires. M. DE LEIBNITZ le prouva par le parfait accord qu'il y avoit entre son sentiment & la regle de GALILE'E, pour l'acceleration de la chûte des corps pesans; regle generalement aprouvée, & au moyen de laquelle M. DE LEIBNITZ fit voir qu'un poids avec deux degrez de vitesse, peut monter quatre fois plus haut, qu'avec un degré de vitesse; neuf fois plus haut, s'il a trois degrez de vitesse; seize fois plus haut, s'il en a quatre; enfin il montra que les hauteurs, ausquelles les corps pesans sont capables de s'élever, sont toujours protionnelles aux quarrez de leurs vitesses. Il prétendoit que la hauteur, à laquelle un poids peut monter, peut être prise pour la mesure de la force de ce poids; il concluoit que la force vive d'un corps étoit proportionnelle à sa masse multipliée par le quarré de sa vitesse.

13. Mais les adversaires de M. DE LEIBNITZ, ne lui passerent pas son hypothese touchant les hauteurs qu'il prétendoit être la mesure des forces. Ils formerent des instances, & soûtinrent, entr'autres choses, qu'on ne devoit point négliger le tems que le poids employe à parcourir la hauteur à laquelle il monte. Qu'un poids, par exemple, qui avec une vitesse double s'éleve à une hauteur quadruple, ne doit être censé avoir qu'une force double, parce qu'il employe un tems double à monter: ces Messieurs crurent être fondez à soutenir que dans l'estimation des forces, il falloit avoir égard, nonseulement aux hauteurs, mais aussi aux tems; persuadez que la force des corps étoit en raison composée de la raison directe de la hauteur, & de la raison inverse du tems: ils ne reflechissoient pas que la consideration du tems n'étoit d'aucune conséquence dans le sujet de leur dispute, puisqu'il étoit facile de faire monter le corps pesant à differentes hauteurs en des tems

tems égaux; on n'a pour cela qu'à se servir d'une cycloïde renversée, dont on sçait que tous les arcs, à commencer depuis le point le plus bas, sont *Isochrones*, ou parcourus en des tems égaux.

14. M. DE LEIBNITZ répondit à ces objections; mais il ne gagna rien sur des esprits prévenus en faveur du sentiment commun & erroné, que la force des corps en mouvement étoit égale à la quantité de leur mouvement, c'est-à-dire, en raison des produits de leurs masses, par leurs simples vitesses. Ce fut en vain, qu'il fit voir à ses adversaires, que si l'opinion qu'ils soutenoient avoit lieu, on pourroit exécuter un mouvement perpétuel purement méchanique; ce qui, selon M. DE LEIBNITZ, étoit absolument impossible; ces adversaires aimerent mieux admettre la possibilité d'un mouvement perpétuel artificiel, que d'abandonner une opinion reçue depuis long-tems, pour en embrasser une nouvelle, qu'ils regardoient comme une espèce d'hérésie en matiere de Physique.

15. Peu de tems avant la mort de M. DE LEIBNITZ, son sentiment fut entierement rejetté en Angleterre, & traité même avec mépris. On s'atacha dans un Recueil de Lettres de M. CLARCKE & de M. DE LEIBNITZ, imprimées deux fois de suite avec des notes; on s'atacha, dis-je, à tourner en ridicule le sentiment de ce grand homme sur l'estime de la force vive; non sans une surprise extrême de la part de ceux qui reconnoissent la vérité de ce sentiment.

16. Il est vrai que le nombre en est encore fort petit dans le reste de l'Europe: j'ai peut-être été le premier, depuis environ vingt-huit ans: ce n'est pas que les preuves de M. DE LEIBNITZ m'ayent paruës assez fortes pour me déterminer à embrasser son sentiment; car j'avouë qu'étant indirectes, & nullement tirées du fond de la matiere dont il s'agissoit, elles ne purent me convaincre: mais elles me donnerent occasion d'y penser; & ce n'est qu'après une longue & sérieuse méditation, que je trouvai enfin le moyen de me convaincre moi-même, par des démonstrations directes, & au-dessus de toute exception.

tion. M. de Leibnitz, à qui je les communiquai, m'en ſçut bon gré; auſſi ſervirent-elles à lui attirer des ſectateurs, & à ramener à ſon ſentiment quelques-uns de ceux qui auparavant ſe trouvoient engágez dans une longue diſpute avec lui, n'ayant pas été pleinement convaincus par ſes raiſonnemens.

17. A mon égard, j'embraſſe avec plaiſir l'occaſion de faire part de mes découvertes aux illuſtres Membres de l'Academie Royale des Sciences, & me fais un honneur de ſoumettre mes lumieres à leur jugement: ce ſont des Juges également éclairez & penetrans, incapables de partialitez & de prévention, & dont l'équité ſeule regle les déciſions; je me flatte qu'il voudront bien prendre la peine d'examiner avec ſoin ce que j'ai l'honneur de leur propoſer ſur la veritable maniere d'eſtimer la quantité de la force des corps en mouvement. Cette queſtion eſt épineuſe, & elle demande une attention d'autant plus ſuivie, que des Philoſophes même, & des Mathematiciens d'un grand nom, s'y ſont mépris. Si ce diſcours a le bonheur de plaire à mes Juges, j'y ajoûterai pluſieurs remarques utiles, que la brieveté du tems ne m'a pas permis de communiquer ici; la matiere eſt abondante & riche; elle meriteroit qu'on en fit un Traité complet. Voici en attendant ce que ce ſujet renferme de plus eſſentiel.

CHAPITRE VI.

En quoi conſiſte la meſure des forces vives. Maniere de les comparer enſemble.

1. JE continuerai à me ſervir de reſſorts, comme du moyen le plus commode pour expliquer mes penſées ſur la production & la force du mouvement. Supoſons, pour fixer l'imagination, un reſſort d'une figure déterminée *ACB*, dont les deux branches égales *CA* & *CB*, forment un angle *ACB*: il eſt clair, que lorſque ce reſſort eſt bandé, les branches *CA* & TAB.XLI. Fig. 3.

CB font un effort continuel pour s'écarter l'une de l'autre, ou pour élargir l'ouverture *ACB*; en sorte que si l'une des forces qui retiennent ce ressort dans un état de contrainte, ou qui compriment la jambe *CA* vers *B*, & la jambe *CB* vers *A*, venoit à manquer subitement, les jambes de ce ressort s'ouvriroient d'elles-mêmes sur le champ, jusqu'à ce que ce ressort eut entierement perdu la force de se dilater davantage. Fixons cet état à 90 degrez, le ressort *ACB* sera donc entierement dilaté, lorsque d'un angle de 30 degrez, que formoient ses jambes dans un état de contrainte, il sera parvenu à un angle droit *acb*. Je ne sçai si je dois avertir, que faisant abstraction de la matiere du ressort, de sa pesanteur, & de tout autre qualité, je ne considere ici que la figure déterminée de ce ressort, & sa parfaite élasticité, en vertu de laquelle il se dilateroit avec une promptitude infinie, si aucun obstacle étranger ne s'oposoit à sa dilatation.

TAB. XLI. *Fig.* 4. 2. Imaginons deux de ces ressorts, égaux en tout, & également bandez, par exemple, à un angle de 30 degrez: que le ressort *DEF*, s'apuie en *D* contre un plan immobile *mn*, & du côté *F* contre une résistance active *P*, qui aye précisément autant de force qu'il lui en faut pour empêcher que ce ressort ne se dilate, mais que le ressort *LMN* soit arrêté de part & d'autre par les résistances actives *R* & *S*, lesquelles ayent aussi les forces necessaires pour empêcher que ce ressort ne se dilate. Je supose de plus, & la chose me paroît assez évidente pour n'avoir pas besoin de démonstration, que la résistance *P* est autant pressée par l'effort du ressort *DEF*, que chacune des deux autres résistances *R* & *S* l'est par l'effort du ressort *LMN*; car la résistance passive du plan immobile *mn* refluë sur *P* avec autant de force, que la résistance active *R* refluë sur celle qui lui est oposée en *S*, & réciproquement. C'est une consequence necessaire de l'égalité parfaite qu'il y a toujours entre l'action & la réaction.

TAB. XLI. *Fig.* 5. 3. De là il s'ensuit, que s'il y a une suite de plusieurs ressorts égaux, & également bandez *ACB*, *BED*, *DGF*, *FIH*,

ran-

rangez en ordre l'un à côté de l'autre, dont le premier *ACB* ſoit appuyé contre un plan immobile *mn*, le ſecond *BED* contre le premier *ACB*, le troiſiéme contre le ſecond, & ainſi juſqu'au dernier; la puiſſance *L*, qui leur réſiſte & les empêche de ſe débander, eſt égale à la puiſſance *P*, qui reſiſte à un ſeul de ces reſſorts auſſi bandé que chacun des autres, & appuyé en *A* contre le plan inébranlable *mn*: car, par l'article precedent, le premier reſſort *ACB* ne preſſe le ſecond reſſort *BED*, & n'en eſt réciproquement preſſé, que de la même maniere qu'il le ſeroit, ſi ôtant le premier reſſort, on ſubſtituoit à ſa place un plan immobile contre lequel le ſecond reſſort appuyeroit en *B*. Par la même raiſon, le ſecond reſſort, conſideré ici comme le premier, preſſera le troiſiéme reſſort *DGF*, & en ſera réciproquement preſſé, comme ſi celui-ci étoit effectivement à la place du ſecond reſſort, & ainſi de tous les autres, juſqu'au dernier reſſort *FIH*. Il eſt donc manifeſte, que le dernier reſſort *FIH* agit contre la réſiſtance *L*, de la même maniere que s'il étoit immediatement appuyé contre le point fixe *F*, ou ce qui revient à la même choſe, la puiſſance *L*, qui réſiſte à un nombre de reſſorts égaux & également tendus, rangez en ligne droite, dont le premier eſt arrêté par un plan immobile *mn*; ou retenu contre un point fixe *A*, eſt égale à la puiſſance *P*; qui réſiſte à un ſeul de ces reſſorts tendu de même, & apuyé contre un point fixe *A*. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

4. S'il y a pluſieurs rangs compoſez d'un nombre different de reſſorts égaux & également bandez, & que chacun de ces rangs ſoit apuyé d'une part contre un point fixe, & que de l'autre il ſoit retenu par une puiſſance qui l'empêche de ſe débander; il eſt clair que ces puiſſances ſeront égales entr'elles; chacune d'elles étant égale à la puiſſance qui peut retenir bandé un ſeul de ces reſſorts.

5. Concevons à preſent deux rangs de reſſorts égaux & également

TAB. XLI. Fig. 6. lement bandez, composez l'un de douze ressorts, & l'autre de trois; dont une des extremitez soit apuyée contre les points fixes *A* & *B*, & l'autre arrêté par les boules *L* & *P*, que des puissances *R* & *S* empêchent de se mouvoir; il est visible, par le Corollaire précedent, que les deux boules *L* & *P*, seront également pressées par l'effort que font les ressorts pour se débander; & que par consequent les forces mortes de ces boules, qui ne sont autre chose que ces pressions mêmes, seront aussi égales.

6. Voyons maintenant ce que ces pressions, mises en œuvres, peuvent produire de force vive. Pour cet effet, imaginons-nous que les puissances *R* & *S*, se retirent subitement: il est constant que les boules *L* & *P* n'oposant à l'effort des ressorts que la résistance qui provient de leurs inerties, ces boules seront obligées de céder, & que dans le mouvement acceleré, que leur imprimeront les ressorts, la boule *L* acquerera plus de vitesse par les efforts continuez de douze ressorts, que la boule *P* égale à la boule *L* n'en peut acquerir par les efforts continuez de trois ressorts; car supofé que le point *E* fut fixement arrêté, les trois derniers ressorts 10, 11, 12 produiront seuls autant d'acceleration dans la boule *L*, que les trois ressorts 1, 2, 3 dans la boule *P*; mais il est visible que le point *E* n'étant pas fixe, les trois derniers ressorts 10, 11, 12 ne sçauroient se relâcher en suivant la boule *L*, que les neuf premiers ne se relâchent aussi, & ne poussent, chemin faisant, le point *E*; d'où il s'ensuit que les trois ressorts qui les précedent causeront à la boule *L* une acceleration plus grande, que les trois ressorts 1, 2, 3 ne la peuvent causer à la boule *P*.

7. Il n'est donc pas moins clair que la boule *L* aura acquis une plus grande vitesse que la boule *P*, soit que tous les ressorts qui composent ces deux rangs se soient entierement débandez, soit que retenus par un obstacle qui les arrête ils ne se soient débandez qu'en partie, & d'une maniere uniforme, en s'ouvrant, par exemple, de telle sorte, que d'un angle de

30

30 degrez que ces ressorts formoient auparavant, ils parviennent à en former un de 60 degrez.

8. Ceci étant une fois admis, peut-on douter que de deux corps égaux, celui qui a le plus de vitesse, n'ait aussi le plus de force? Cependant nous venons de voir que les pressions, ou forces mortes, que les boules *L* & *P* en repos reçoivent des ressorts, avant que ces ressorts se dilatent, sont égales; & que ces mêmes boules, mises en mouvement par les mêmes ressorts, ont des vitesses inégales; d'où l'on pourroit déja inferer, qu'il faut que ces forces soient d'une nature differente, & que par consequent on a eu tort de les confondre, & de soûtenir, que puisque le moment ou l'énergie des forces mortes est en raison des produits des masses par leurs vitesses virtuelles, les forces vives doivent aussi être proportionnelles aux produits des masses par leurs vitesses actuelles.

9. Il ne suffit pas d'avoir prouvé, que la force vive de la boule *L* doit être plus grande que celle de la boule *P*; un peu d'attention fera voir, que la boule *L* a précisément quatre fois autant de force vive que la boule *P*, en quelque raison que soient leurs masses. Car dès que les puissances résistantes *R* & *S* sont ôtées, les pressions des ressorts, qui étoient contrebalancées par ces puissances, se tournent sur le champ vers les boules *L* & *P*, & celles-ci commencent à ceder; ainsi chaque ressort se débandant, chacun faisant usage de sa force, & rien ne périssant inutilement; il faut de toute nécessité que la force de chacun de ces ressorts soit employée à produire son effet: & à quel effet seroit-elle employée, sinon à mouvoir les boules? Le mouvement de chaque boule sera donc tel, que sa force vive sera précisement égale à l'effet complet & total de ce que tous les ressorts pris ensemble y auront contribué: or chacun de ces ressorts se dilatant également, par exemple, de 30 à 60 degrez, chacun d'eux contribuë également à produire cette force: donc les forces vives, produites dans les boules *L* & *P*, seront comme le

 nombre

nombre des reſſorts qui ont contribué à leur production ; ſçavoir comme 12 à 3, ou comme 4 à 1. *C. Q. F. D.*

CHAPITRE VII.

Où l'on démontre que les forces vives des corps, ſont en raiſon composée de leurs maſſes, & des quarrez de leurs viteſſes.

1. QUant aux viteſſes acquiſes des boules, que je ſupoſe preſentement égales en maſſes ; je dis que ces viteſſes ne ſont point entr'elles comme le nombre des reſſorts qui les ont produites, mais comme les racines quarrées de ces nombres, ſçavoir, dans cet exemple, comme $\sqrt{12}$ à $\sqrt{3}$, comme $\sqrt{4}$ à $\sqrt{1}$, ou enfin comme 2 à 1. En voici la démonſtration.

TAB.XLI. *Fig. 7.* Je ſupoſe deux lignes droites quelconques données *AC*; *BD*, que je prends pour deux rangs de petits reſſorts égaux & également bandez : je ſupoſe de plus, que deux boules égales commencent à ſe mouvoir des points *C* & *D*, vers *F* & *I*, lorſque les reſſorts commencent à ſe dilater : Soient *CML*, *DNK* deux lignes courbes, dont les appliquées *GM*, *HN* expriment les viteſſes acquiſes aux point *G* & *H*: Je nomme $BD = a$, l'abſciſſe $DH = x$, ſa differentielle *HP*, ou $NT, = dx$, l'apliquée $HN = v$, ſa differentielle $TO = dv$: Je prends enſuite les abſciſſes *CG*, *CE* de la courbe *CLM*, telles qu'elles ſoient aux abſciſſes de la courbe *DNK*, comme *AC* eſt à *BD*, ou, ce qui eſt la même choſe, je fais $BD : AC = DH : CG = DP : CE$: Supoſant donc $AC = na$, on aura $CG = nx$, $GE = ndx$; ſoit enfin l'apliquée $GM = z$. Tout ceci ſupoſé, je raiſonne ainſi.

2. Les boules étant parvenuës aux points *G* & *H*, chaque reſſort, tant de ceux qui étoient reſſerrez dans l'intervalle *AC*, que de ceux qui l'étoient dans l'intervalle *BD*, ſera dilaté éga-

également, parce que $AC: CG = BD: DH$; chacun de ces resſorts aura donc perdu, de part & d'autre, une partie égale de ſon élaſticité, & il leur en reſtera par conſéquent à chacun également. Donc (*Ch. 6*, §. 3 *&* 4) les preſſions & les forces mortes, que les boules en reçoivent, ſont auſſi égales entr'elles: je nomme cette preſſion p. Or l'accroiſſement élementaire de la viteſſe en H, je veux dire la differentielle TO, ou dv, eſt, par la loi connuë de l'acceleration, en raiſon compoſée de la force motrice, ou de la preſſion p, & du petit tems que le mobile met à parcourir la differentielle HP, ou dz, lequel tems s'exprime par $HP: HN = dx: v$; On aura donc $dv = pdx: v$, & partant $vdv = pdx$, ce qui donne par l'intégration $\frac{1}{2}vv = \int pdx$. Par la même raiſon on a $dz = p \times GE: GM = p \times ndx: z$, par conſéquent $zdz = npdx$; & en intégrant $\frac{1}{2}zz = n\int pdx$, d'où il ſuit que $vv: zz = \int pdx: n\int pdx: = 1 : n = a: na = BD: AC$. Or BD eſt à AC, comme la force vive acquiſe en H eſt à la force vive acquiſe en G (*Chap. 6*, §. *9*). Donc ces deux forces ſont entr'elles comme vv à zz; ainſi les forces vives des corps égaux en maſſes ſont comme les quarrez de leurs viteſſes, & les viteſſes elles-mêmes ſont en raiſon ſous-doublée, ou comme les racines quarrées des forces vives, *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

3. Si les corps ſont inégaux en maſſes, il eſt clair que leurs forces vives ſont comme les produits des maſſes par les quarrez des viteſſes.

COROLLAIRE II.

4. Si on ſupoſe les droites AC, BD infiniment longues, par raport aux eſpaces parcourus CG, DH; la preſſion p ſera égale & uniforme dans toute l'étenduë du chemin que le mobile

bile a à parcourir : en effet, les ressorts *AC* & *BD* s'étant dilatez jusqu'en *G* & *H*, & les dilatations *CG*, *DH* étant infiniment peu considerables, par raport à l'étenduë *AC* & *BD*, que ces ressorts occupoient auparavant ; il est évident, que chaque ressort ne perd par sa dilatation, qu'une partie infiniment petite de son effort ; & que par consequent les pressions p, que les boules reçoivent par ces efforts, seront égales & uniformes dans tous les points des lignes *CG* & *DH*.

COROLLAIRE III.

5. Dans cette suposition où p devient constante, $\int p\,dx$ sera px, & partant $\frac{1}{2}vv = px$, & $\frac{1}{2}zz = npx$; d'où il paroit que les courbes des vitesses *CML*, *DNK* seront des paraboles d'un même parametre, exprimé par $2p$; car le parametre en *C* est $MG^2 : CG = 2npx : nx = 2p$, & le parametre, en *D* est $NH^2 : DH = 2px : x = 2p$.

COROLLAIRE IV.

6. Ainsi l'acceleration des boules suit, dans ce cas, la même loi que celle des corps pesans qui tombent, puisque les quarrez des vitesses acquises sont aussi comme les hauteurs parcouruës par les corps pesans en tombant ; & comme la pesanteur est constante de quelque hauteur qu'un corps tombe, de même la pression des boules est uniforme dans toute la longueur de leur chemin.

COROLLAIRE V.

7. On peut donc considerer la chûte & l'acceleration d'un poids, comme étant causée par l'effort d'une matiere élastique, qui étenduë verticalement à l'infini, presseroit les corps de haut en bas, & les feroit descendre selon la loy connuë de l'acceleration. Il sera donc aussi permis d'apliquer aux forces vives de deux poids égaux, qui tombent de deux hauteurs differentes,

tes, ce qui a été prouvé des forces vives à l'égard de deux boules; ſçavoir qu'elles ſont en raiſon de AC à BD, ou en raiſon des eſpaces parcourus, puiſque $AC : BD = CG : DH$; ce qui fait voir que les hauteurs differentes qu'un même poids, ou que deux poids égaux, parcourent en tombant, ſont proportionnelles à leurs forces vives acquiſes.

8. Cette démonſtration juſtifie la maniere dont M. DE LEIBNITZ meſuroit les forces vives des corps, par les hauteurs auſquelles ces corps peuvent monter en vertu de leurs viteſſes. On dira, peut-être, que la cauſe de la peſanteur ne conſiſte pas dans la preſſion, que les corps qu'on nomme peſans reçoivent de l'effort d'une matiere élaſtique étenduë à l'infini. Mais cette objection ſeroit inutile; je ne prétens pas expliquer ici la véritable cauſe de la peſanteur. Je ſupoſe un principe, & j'examine enſuite quel ſeroit l'effet de ma ſupoſition, ſi elle avoit lieu dans la nature, & ſi je montre que la loi de l'accélération, ſelon cette hypothéſe, ne differe pas de celle que la nature obſerve dans la chûte des corps graves; je ne vois pas pourquoi il ne me ſeroit pas permis d'attribuer à celle-ci tout ce qui ſe déduit legitimement de l'autre. Les Phyſiciens décompoſent ſouvent le mouvement uniforme en deux mouvemens collateraux, pour rendre raiſon d'un phénomène; quoique ce mouvement n'ait pas été compoſé originairement de ces deux mouvemens collateraux; & comme le même mouvement peut être décompoſé en deux mouvemens collateraux d'une infinité de manieres différentes, puiſqu'il peut y avoir une infinité de parallelogrammes autour d'une même diagonale; ils choiſiſſent, entre toutes ces manieres, celle qui les accommode le plus, ſans qu'on ſe ſoit aviſé de le leur reprocher. Tout le monde eſt en droit de faire des ſupoſitions, & d'en tirer des concluſions; de même qu'on n'a jamais défendu aux Géometres de ſupoſer, ou de tirer dans les figures des lignes qui n'y ſont pas, pourvû qu'elles ſervent à démontrer quelques Theorêmes, ou à réſoudre quelques Problèmes; il en eſt de même de nôtre ſujet; quelle que ſoit la véritable cauſe de la peſanteur, il me

 ſuffit

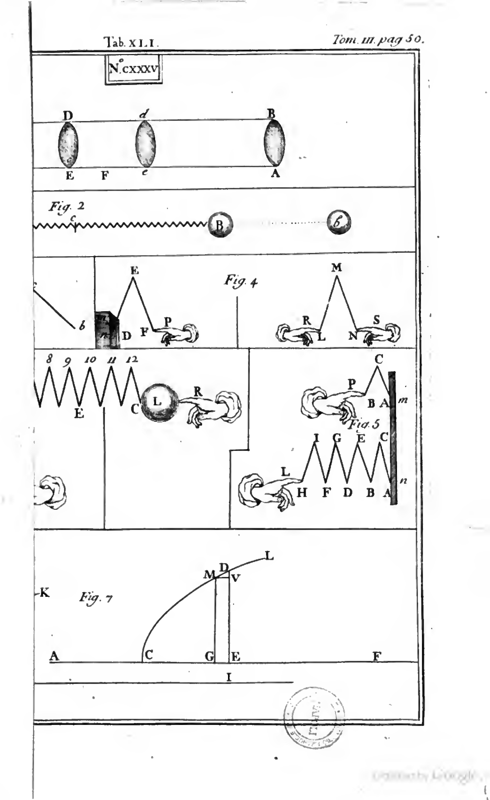
fuffit d'indiquer une maniere de produire, par l'action des reſſorts, une accélération tout-à-fait ſemblable à celle que produit la peſanteur, & que je faſſe voir, comme je l'ai fait, que les eſpaces parcourus *CG* & *DH* ſont entr'eux comme les forces acquiſes des corps égaux aux points *G* & *H*, pour en pouvoir conclure, que les forces vives de deux poids égaux ſont comme les hauteurs d'où tombent ces poids, ou auſquelles ils peuvent monter, & par conſequent comme les quarrez des viteſſes.

9. On m'objectera, peut-être, que pour enviſager la deſcente de deux poids de deux hauteurs differentes, ſur le pied de deux eſpaces differens *CG*, *DH*, parcourus par l'action des reſſorts, je ſuis obligé de ſupoſer deux rangs inégaux de reſſorts *AC* & *BD*, quoique chacun de ces rangs ſoit d'une étendue infinie; que cependant la cauſe de la peſanteur eſt la même, pour toutes les hauteurs que les graves peuvent parcourir en tombant. A cela je répons, que je conſidere ſimplement ici l'effet que l'action de deux rangs de reſſorts *AC* & *BD* peut produire, comme étant entierement identique avec celui que fait la peſanteur; ſans prétendre par là que la cauſe de la peſanteur conſiſte effectivement dans une action de reſſorts, ou dans la preſſion d'une matiere élaſtique, qui par la continuation de ſon effort faſſe deſcendre les corps peſans.

CHAPITRE VIII.

Où l'on confirme la meſure des forces vives, établies dans le Chapitre précedent, par des experiences & de nouvelles démonſtrations.

1. JE ne crois pas que perſonne puiſſe revoquer en doute, après tout ce que nous venons d'expliquer, la vérité de la regle établie pour l'eſtime de la force vive des corps; ainſi nous regarderons comme une choſe démontrée, que cette force eſt


N°. CXXXV
D
d
B
E
F
e
A
Fig. 2
c
B
b
E
Fig. 4
M
b
D
F
P
R
L
S
N
8 9 10 11 12
C
E
C
L
R
P
B A
m
Fig. 5
I G E C
L
H F D B A
n
L
D
M
V
K
Fig. 7
A
C
G
E
F
I

eſt proportionnelle à la maſſe, ou à la quantité de matiere, multipliée par le quarré de la viteſſe, & non par la ſimple viteſſe.

2. Il s'eſt fait, depuis peu d'années, diverſes experiences qui confirment merveilleuſement cette regle. On a laiſſé tomber pour cet effet, de differentes hauteurs, ſur une matiere molle, telle que du ſuif, ou de la terre-glaiſe, dont la ſurface étoit unie & de niveau, pluſieurs boules égales en grandeur, & inégales en poids; après quoi on a obſervé avec toute l'exactitude neceſſaire, combien ces boules avoient penetré dans la matiere molle. Cette experience réïterée un grand nombre de fois, on a remarqué que les enfonçûres étoient toujours égales, lorſque les boules tomboient de hauteurs reciproquement proportionnelles à leurs poids.

3. On a conclu de l'égalité de ces enfonçûres, que les boules avoient des forces égales, dans le moment qu'elles commençoient à s'enfoncer. Mais la viteſſe de chaque boule, au moment de l'enfoncement, étant en raiſon ſous-doublée de ſa hauteur, ou ſa hauteur en raiſon doublée de ſa viteſſe; il s'enſuit, que les forces vives de deux córps differens ſont égales, lorſque leurs maſſes, ou quantités de matiere, ont une raiſon reciproque aux quarrez de leurs viteſſes; conformément à la loy generale, qui veut *que la force vive d'un corps ſoit toujours proportionnelle au produit de la maſſe par le quarré de ſa viteſſe.* C'eſt ce que nous avons prouvé par des démonſtrations *a priori*, & que l'experience confirme à preſent.

4. J'ai encore d'autres preuves à alleguer pour le ſoutien de cette vérité, mais ſi ſimples & ſi faciles, qu'il eſt ſurprenant que perſonne ne s'en ſoit aperçu avant moi: celles, que je vais indiquer, ſont tirées du choc oblique des corps. Soient deux boules *A* & *C* parfaitement élaſtiques & égales entr'elles; TAB. que *C* ſoit en repos, & que *A* vienne la fraper obliquement, XLII. ſuivant la direction & avec la viteſſe exprimée par *AB*, que *Fig.* 8. je ſupoſe faire un angle demi droit avec la tangente commune qui paſſe par le point de rencontre des deux boules. Pour

G 2 dé-

déterminer ce qui leur arrivera après le choc, je décompose le mouvement par AB en deux autres, dont les directions sont AF & FB, l'une parallèle & l'autre perpendiculaire à la commune tangente : en conséquence de la régle donnée ci-dessus pour le concours direct des corps, la boule A, étant parvenuë en B, perdra tout son mouvement selon la direction FB, pendant qu'elle conservera son mouvement par AF: cette boule doit donc continuer à se mouvoir selon la direction BE parallèle à AF, avec une vitesse $BE = AF$, tandis que la boule C recevra, dans la direction FB prolongée, une vitesse $CD = FD = AF$. Voilà donc la force de la boule A partagée après le choc en deux également; car puisque ces boules sont égales & ont des vitesses égales, il s'ensuit que chacune a la moitié de la force que la seule A avoit avant le choc; d'où il est évident que la force de la boule A avant le choc, est à la force de la boule C son égale après le choc, comme 2 est à 1, ou comme AB^2 à BF^2; c'est-à-dire, comme le quarré de la vitesse de la boule A avant le choc, est au quarré de la vitesse de la boule C après le choc.

5. Passons à une autre preuve, & au lieu de distribuer également la force d'une boule entre deux boules égales, démontrons la même vérité par la réunion de deux forces égales en une : concevons pour cet effet deux boules égales D & E, lesquelles se meuvent avec des vitesses égales DC, EB, sur des directions perpendiculaires l'une à l'autre, en sorte que la boule D parvenuë en C, rencontre directement la boule E parvenuë en B: il est visible que la premiere boule s'arrêtera tout court en C, & que l'autre boule se mouvra le long de la direction BA, faisant avec BD prolongée un angle demi droit ABF, & que son mouvement par BA, sera composé de $FA = EB$, & de $BF = DC$. Voici donc un cas, où la boule E, ou B, possede toute seule, après le choc, les deux forces que les deux boules avoient avant le choc. Mais ces deux forces étoient égales, tant à cause de l'égalité des boules, que de celles de leurs vitesses. Donc la force de la boule B après le

le choc, eſt à la force de la boule *D* avant le choc, comme 2 eſt à 1, ou comme BA^2 eſt à $BF^2 = DC^2$; c'eſt-à-dire, comme le quarré de la viteſſe de la boule *B* après le choc, au quarré de la viteſſe de la boule *D* avant le choc.

6. Peut-être ſoutiendra-t-on que tout ce qu'on peut conclure de ces deux démonſtrations, c'eſt que les forces vives de deux corps égaux, ſont entr'elles comme 2 eſt à 1, lorſque leurs viteſſes ſont comme $\sqrt{2}$ à 1. J'en tombe d'accord; mais au moins ne ſçauroit-on nier qu'elles ne démontrent invinciblement la fauſſeté du ſentiment commun, qui veut que la force d'un corps en mouvement ſoit proportionelle à la quantité de ſon mouvement, ou au produit de ſa maſſe par ſa ſimple viteſſe.

CHAPITRE IX.

Démonſtration generale & géométrique du Théorème de la quantité des forces vives proportionnelles aux produits des maſſes par les quarrez des viteſſes.

1. MAis, ſans inſiſter davantage ſur la validité des démonſtrations précédentes, je me propoſe d'en donner ici une generale, ſi fort au-deſſus de toute exception, que je la crois ſeule capable de convaincre les partiſans les plus obſtinez de l'opinion vulgaire; elle eſt auſſi fondée ſur la décompoſition du mouvement. Je prouverai donc d'une maniere géométrique, que quand un corps a préciſément autant de viteſſe qu'il lui en faut pour plier un reſſort, contre lequel il heurte perpendiculairement, ce même corps pourra plier avec une viteſſe double de la premiere, je ne dis pas deux, mais quatre reſſorts pareils au premier; & qu'avec une viteſſe triple, il ne ſera pas ſimplement en état de plier trois reſſorts comme les précédents, mais neuf; & ainſi de ſuite.

2. Pour ſe convaincre de cette vérité; figurons-nous que le

TAB.XLII. Fig. 9. corps C frape obliquement un ressort placé en L, avec la vitesse CL; soit l'angle de l'obliquité CLP de 30 degrez, afin que la perpendiculaire CP devienne égale à $\frac{1}{2}$ CL; soit la vitesse $CL = 2$, & soit enfin la résistance du ressort L, telle que pour le plier il faille précisément un degré de vitesse dans le corps C, lorsque ce corps le heurte perpendiculairement. On supose que le corps C se meut sur un plan horisontal. Ceci connu, je dis qu'après que le corps C aura choqué obliquement le ressort L, avec une vitesse CL de deux degrez, vitesse qui en vertu de la composition du mouvement est composée de $CP = 1$, & de $PL = \sqrt{3}$; ce corps perdra entiérement le mouvement perpendiculaire par CP, & ne retiendra que le mouvement par PL; ainsi le corps C, après avoir consumé son mouvement par CP à plier le premier ressort L, continuëra à se mouvoir dans la direction PLM avec une vitesse $LM = PL = \sqrt{3}$. Concevons au point M, un second ressort semblable au premier, & l'angle de l'obliquité LMQ, tel que la perpendiculaire LQ soit $= 1$: il est clair que le mouvement par LM, étant composé de deux collateraux par LQ & QM, le mouvement par LQ sera entierement consumé à plier le ressort M, pendant que le mouvement par QM continuëra selon la direction QMN, avec une vitesse $MN = QM = \sqrt{2}$. Imaginons au point N un troisiéme ressort égal à chacun des précédens, que le corps C rencontre sous un angle demi droit MNR, afin que MR perpendiculaire à la ligne de situation du ressort devienne égale à 1: il est manifeste que le mouvement par MN composé des mouvemens par MR & par RN consumera le premier de ces mouvemens par MR à plier le ressort N, & par consequent son autre mouvement par NR continuëra avec une vitesse $NO = RN = 1$. Le corps C conserve donc encore un degré de vitesse suivant la direction RNO, après avoir plié les trois ressorts L, M, N; & c'est avec ce degré de vitesse, que le corps C pliera le quatriéme ressort O, contre lequel je supose qu'il heurte perpendiculairement.

Il

Il paroit de tout ceci, que le corps *C* a la force de plier, avec deux degrez de vitesse, quatre ressorts, dont chacun demande, pour être plié, un degré de vitesse dans le corps *C*. Mais ces quatre ressorts pliez font l'effet total de la force du corps *C*, mû avec deux degrez de vitesse; puisque toute cette vitesse du corps *C* se consume à plier ces quatre ressorts l'un après l'autre: & un seul ressort plié est l'effet total de la force du même corps *C*, mû avec un degré de vitesse; puisque la résistance de chaque ressort est telle, qu'elle détruit précisement un degré de vitesse dans le corps *C*. Puis donc que les effets totaux sont entr'eux comme les forces qui ont produit ces effets; il faut que *la force vive* du corps *C*, mû avec deux degrez de vitesse, soit quatre fois plus grande que *la force vive* du même corps, mû avec un degré de vitesse.

3. On démontrera de la même maniere, qu'une vitesse triple, quadruple, quintuple, &c. fait avoir au corps *C* une force neuf fois, seize fois, vingt-cinq fois, &c. plus grande; parce que, dans ce cas, il sera capable de plier, avant de s'arrêter, 9, 16, 25, &c. ressorts égaux. Il n'y a pour cela qu'à donner à *CL*, une obliquité convenable sur le premier ressort, & telle que *CP* soit à *CL*, comme 1 est à 3, 4, 5, &c. & diriger les autres obliquitez suivant l'exigence du cas. Je tire de tout ceci cette conclusion generale, *que la force vive d'un corps est proportionnelle au quarré de sa vitesse, & non à sa simple vitesse.*

CHAPITRE X.

Des trois loix qui s'observent constamment dans le choc direct de deux corps. Que l'une de ces loix prise à discretion, a toujours une connexion necessaire avec les deux autres.

1. JOignons à ce que nous venons de dire quelques réflexions sur cette triple loi, que les corps durs, que j'ai nom-

nommez parfaitement roides, observent inviolablement quand ils se choquent. La premiere de ces loix a été démontrée au Chapitre 4, §. 5; elle consiste dans la conservation de la vitesse respective avant & après le choc: On trouve cette vitesse respective en prenant la difference des vitesses absoluës, lorsque les corps vont d'un même côté, & leur somme, lorsqu'ils se meuvent en sens contraire. La seconde loi, démontrée au même Chapitre, §. 8, établit la conservation de la quantité de direction toujours égale au produit de la somme des masses par la vitesse du commun centre de gravité. La troisiéme consiste enfin dans la conservation de la quantité des forces vives. Ce seroit obscurcir cette loi que d'entreprendre de la démontrer, En effet tout le monde regarde comme un Axiome incontestable, que toute cause efficiente ne sçauroit périr, ni en tout ni en partie, qu'elle ne produise un effet égal à sa perte. L'idée que nous avons de la force vive, entant quelle existe dans un corps qui se meut, est quelque chose d'absolu, d'indépendant, & de si positif, qu'elle resteroit dans ce corps, quand même le reste de l'Univers seroit anéanti. Il est donc clair, que la force vive d'un corps, diminuant ou augmentant à la rencontre d'un autre corps, la force vive de cet autre corps doit en échange augmenter ou diminuer de la même quantité; l'augmentation de l'une étant l'effet immediat de la diminution de l'autre; ce qui emporte necessairement la conservation de la quantité totale des forces vives: aussi cette quantité est-elle absolument inalterable par le choc des corps.

2. Mais autant que cette loi est évidente & certaine, par la seule idée qu'on doit avoir de la force vive; autant incertaine a été jusqu'ici la maniere de mesurer cette force: un préjugé general ayant fait croire qu'elle étoit proportionnelle au produit de la masse par la vitesse; c'est de ce préjugé qu'est venuë la fausse opinion de la conservation de la quantité du mouvement, dont on ne s'est desabusé, que depuis que des personnes éclairées ont démontré que la quantité du mouvement peut

peut être augmentée & diminuée par le choc des corps, sans démontrer pourtant en quoi consiste la véritable maniere de mesurer les forces vives. M. DE LEIBNITZ découvrit le premier qu'elles étoient en raison des produits des masses par les quarrez des vitesses; mais, comme nous l'avons deja dit, peu de gens acquiescérent à ses raisonnemens. Je crois avoir établi cette vérité d'une maniere si évidente, que desormais elle sera à l'abri de toute contestation.

3. Quelques réflexions, sur la nature de cette triple loi, nous feront encore remarquer, que des trois conservations qui se font, 1°. de la vitesse respective, 2°. de la quantité de direction, 3°. de la somme des produits des masses par les quarrez des vitesses; deux étant accordées, la troisiéme l'est aussi d'une nécessité géométrique; ce que je démontre ainsi. Soient A & B deux corps, leurs vitesses avant le choc a & b, & leurs vitesses apres le choc x & y; suposons d'abord qu'avant & après le choc, ces corps se meuvent du même côté. La premiere conservation donnera $a - b = y - x$; la seconde $Aa + Bb = Ax + By$: j'en déduis la troisiéme de cette maniere: Par la transposition des termes, il vient $a + x = y + b$, & $Aa - Ax = By - Bb$; qu'on multiplie les membres de ces deux équations, sçavoir $Aa - Ax$, par $a + x$, & $By - Bb$, par $y + b$, les produits donneront une nouvelle équation $Aaa - Axx = Byy - Bbb$, laquelle, par la transposition des termes, se changera en $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, formule qui exprime parfaitement ce qu'on cherche; je veux dire la conservation de la somme des produits des masses par les quarrez des vitesses. On voit aisément, que si on rend a ou b, de même que x ou y, negatif, pour marquer le mouvement en sens contraire des corps A & B, tant avant qu'après le choc; cette supposition ne changera rien dans les signes des termes de l'équation trouvée $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, parce que les dimensions de ces lettres sont en nombre pair dans tous les termes de cette équation.

4. Il paroit, par ce calcul, que la conſervation de la ſomme des produits des maſſes par les quarrez des viteſſes, a une connexion néceſſaire avec les deux autres conſervations; & toute perſonne un peu Géométre auroit pû l'en tirer comme un ſimple Corollaire, ſans en penetrer l'utilité; ç'auroit été entre ſes mains une verité ſterile & purement géométrique. Et c'eſt ce qui eſt effectivement arrivé à M. HUGUENS, quoique grand Mathématicien, & génie du premier ordre. Il a formé de cette propoſition un Theorème, qu'il a enſuite démontré (*) à ſa maniere; mais ſans trouver dans ce Théorème la conſervation de la quantité des forces vives qui y eſt cachée. M. HUGUENS ignoroit ſans doute, que la force d'un corps en mouvement eſt proportionnelle au produit de ſa maſſe par le quarré de ſa viteſſe, ou il refuſoit d'admettre cette propoſition. Faute de recourir à la nature & à ſes premiers principes, les Theorèmes les plus importans dégenerent en de ſimples ſpéculations.

5. Mais à preſent que cette vérité eſt miſe dans ſon jour & hors de toute atteinte, on a lieu d'admirer la parfaite conformité qui regne entre les loix de la Nature, & celles de la Géométrie; conformité qu'elle obſerve ſi conſtamment & dans toutes les circonſtances, qu'il ſemble que la Nature ait conſulté la Géométrie, en établiſſant les loix du Mouvement. Car s'il eut été poſſible que les forces des corps, qui ſont en mouvement, n'euſſent pas été en raiſon des produits des maſſes par les quarrez des viteſſes, & que la Nature les eut faites en une autre raiſon; elle ſe ſeroit démentie, l'ordre de la Géométrie auroit été violé. La quantité des forces vives, ſource unique de la continuation du mouvement dans l'Univers, ne ſe ſeroit pas conſervée: plus d'égalité par conſequent entre les cauſes efficientes & leurs effets; en un mot, toute la Nature ſeroit tombée dans le deſordre.

(*) Voyez la longue Démonſtration qu'il en a donnée dans ſon Traité *De motu corporum ex percuſſ. Prop. XI.*

CHAPI-

CHAPITRE XI.

Du choc de trois corps durs, ſelon differentes directions.

1. Lorſque trois corps durs ſe choquent à la fois, ſelon differentes directions, il eſt difficile de déterminer leurs viteſſes après le choc, parce que la conſervation de la viteſſe reſpective n'a pas lieu ici, comme il eſt aiſé de le voir, pour peu d'attention qu'on y faſſe. Mais on en peut venir à bout par le moyen de la véritable eſtime des forces vives, & de la conſervation de la quantité de direction, leſquelles ont lieu en toutes ſortes de choc, quel que ſoit le nombre des corps qui ſe rencontrent.

2. Soient A & B deux boules, que je ſupoſe en repos, & dont les maſſes ſont égales; ſoit une troiſiéme boule C, d'une maſſe quelconque, qui ſe meuve contre les deux premieres, ſuivant la direction CD perpendiculaire à la droite qui joint les centres des deux boules A & B; enſorte que celles-ci ſoient frapées tout à la fois par la boule C parvenuë en D. On demande quelle ſera la direction & la viteſſe de chacune de ces boules après leur choc? TAB. XLII. *Fig.* 10.

Solution.

3. La direction de ces boules après leur choc ne ſouffre aucune difficulté; car ſi du centre de la boule D, on tire les droites DF, DG, par les points d'attouchement, ou par les centres des deux autres boules, il eſt viſible que ces lignes feront les directions des boules frapées, & que la boule C reculera, s'arrêtera, ou s'avancera dans la ligne de ſa direction CD, ſelon que les boules qu'elle aura frapées auront plus ou moins de maſſe: l'expreſſion de leurs viteſſes eſt un peu plus difficile; je la détermine par le calcul ſuivant.

4. Soient exprimez la viteſſe de la boule C, par $CD = a$;

 la

la viteſſe de la même boule après le choc, par $DE = x$; & la viteſſe des boules A & B, par AF & $BG = y$; ſoit la maſſe de la boule A, ou de la boule B, $= n$, & la maſſe de la boule $C = m$: la quantité de la direction avant le choc ſera $= ma$, & la quantité de direction après le choc ſera $= mx + \frac{2q}{p} ny$; je ſupoſe que H eſt le point du milieu de la droite qui joint les centres des deux boules A & B parvenuës en F & G, & qu'ainſi ce point eſt le centre commun de gravité des deux boules F & G, & je nomme p à q, la raiſon de DF à DH: J'aurai donc, en vertu de la conſervation de la quantité de direction, cette égalité $ma = mx + \frac{2q}{p} ny$. Or la quantité de la force vive avant le choc eſt $= maa$, & la quantité des forces après le choc eſt $= mxx + 2nyy$; Donc $maa = mxx + 2nyy$: on trouve la valeur des inconnuës x & y, par la comparaiſon de ces deux équations; le calcul donne $x = (ppma - 2qqna) : (ppm + 2qqn)$, & $y = 2pqma : (ppm + 2qqn)$.

Corollaire I.

5. Si $ppm = 2qqn$, ou, ce qui revient à la même choſe, ſi $pp : qq = 2n : m$, c'eſt-à-dire, ſi la ſomme des deux boules A & B eſt à la boule C, comme le quarré du ſinus total eſt au quarré du ſinus de l'angle DFH complément de l'angle FDH; on aura $x = 0$; auquel cas la boule C s'arrêtera tout court après le choc en D; la viteſſe de chaque boule A & B, ou y [$2pqma : (ppm + 2qqn)$] ſera $= qa : p$, & AF, ou BG, deviendra quatriéme proportionnelle du ſinus total, du ſinus de l'angle DFH, & de CD qui exprime la viteſſe de la boule C.

Corollaire II.

6. Il s'enſuit encore que ſi les trois boules C, A, B, ſont éga-

égales, & que FDG ſoit un angle droit, ou FDH un demi angle droit, la boule C s'arrêtera en D, & chacune des deux autres ſe mouvra avec une viteſſe qui ſera à celle de la boule C avant le choc, comme le côté d'un quarré eſt à ſa diagonale, ou comme 1 à $\sqrt{2}$; car dans ce cas on aura $pp : qq = 2 : 1 = 2n : m$, & $y \, [qa : p] = 1a : \sqrt{2} = a \sqrt{\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE III.

7. Si ppm eſt plus petit que $2qqn$; la valeur de x, ou DE, ſera negative, & par conſequent la boule C rebrouſſera après qu'elle aura frapé les boules A & B; & ſi la boule C étoit infiniment petite par raport aux autres, elle rebrouſſeroit avec la même viteſſe qu'elle avoit avant le choc, & les deux boules A & B reſteroient immobiles, car on auroit $x = - 2qqna : 2qqn = - a$, & $y = 2pqoa : 2qqn = o$.

COROLLAIRE IV.

8. Et ſi au contraire les boules A & B étoient infiniment petites par raport à la boule C; celle-ci continuëroit à ſe mouvoir après le choc, ſans aucune perte ſenſible de ſa viteſſe; & les boules A & B acquereroient chacune une viteſſe double de celle qu'elles auroient euës dans le cas du premier Corollaire; car x deviendroit $= ppma : ppm = a$, & $y = 2pqma : ppm = 2qa : p$. D'où on voit qu'en diminuant à l'infini les boules A & B, on augmentera leurs viteſſes, mais ſans parvenir jamais au double de la quatriéme proportionnelle du ſinus total, du ſinus de l'angle DFH, & de la viteſſe de la boule C.

COROLLAIRE V.

9. Si l'angle FDG eſt infiniment aigu, je veux dire, ſi $p = q$, les directions AF, BG tomberont ſur DH, & les boules A & B pourront être regardées comme réunies en un

seul corps ; ce qui est un cas du choc direct, expliqué ci-dessus Chapitre V, §. 2. En effet faisant $p = q$, on aura $x = (ma - 2na) : (m + 2n)$, & $y = 2ma : (m + 2n)$, conformément à ce qui a été trouvé dans l'endroit cité, où on a exprimé par A & B ce qui l'est ici par m & $2n$.

COROLLAIRE VI.

10. Si les angles FDH, & GDH sont aussi grands qu'ils puissent l'être, c'est-à-dire, si chacun de ces angles est droit, & que par consequent les directions AF & BG, soient dans une même ligne perpendiculaire à la direction CD ; la boule C étant parvenuë en D, ne fera que friser les boules A & B, & coulera entre deux sans leur imprimer aucune vitesse ; aussi aura-t-on, dans ce cas où $q = 0$, $x = ppma : ppm = a$, & $y = 2pm0a : ppm = 0$.

11. Il est manifeste par ces deux derniers Corollaires, que les directions AF, BG peuvent former avec la direction DH des angles FDH, GDH, tels que les boules A & B s'éloigneront de la direction CDH, le plus vite qu'il est possible ; je veux dire, qu'il y a un *maximum* entre toutes les directions des boules A & B, qui contribuë à former cet éloignement ; ce qui donne lieu à un Problême assez curieux, que voici.

PROBLEME I.

12. *On demande la grandeur des angles* FDH *&* GDH *; des directions* AF *&* BG*, suivant lesquelles les boules données* A *&* B *frapées par une troisiéme boule donnée* C*, dont la vitesse est aussi donnée, s'éloignent l'une de l'autre le plus vite qu'il est possible, dans un tems donné ; ou ce qui revient à la même chose, on exige que la vitesse respective des boules* A *&* B *soit la plus grande qu'il est possible.*

Je trouve par la methode *de maximis*, que pour résoudre ce Problême, il faut faire cette analogie : Comme $2m + 2n$ est

eſt à $m + 2n$, ainſi le quarré du ſinus total, eſt à un quatriéme terme. La racine quarrée de ce dernier terme donnera le ſinus de l'angle cherché *FDH* ou *GDH*: c'eſt pour abreger que je n'en mets pas ici l'analiſe.

COROLLAIRE I.

13. Si les trois boules *A*, *B*, *C* ſont égales, l'angle *FDH*, ſera de 60 degrez, ou les deux tiers d'un angle droit; & par conſequent le double de cet angle *FDG* ſera de 120 degrez, ou les $\frac{4}{3}$ d'un droit: car dans ce cas $2m + 2n$ eſt à $m + 2n$, comme 4 eſt à 3; ce qui eſt préciſement la raiſon du quarré du ſinus total, au quarré du ſinus de 60 degrez.

COROLLAIRE II.

14. Si la boule *C* eſt égale à la ſomme des deux boules *A* & *B*, on aura $2m + 2n : m + 2n = 3 : 2$; ce qui donne à très-peu de choſe près l'angle *FDH*, de 54 degrez 44 minutes; le même angle que pluſieurs perſonnes ont démontré que la barre du gouvernail devoit faire avec la quille du Vaiſſeau, pour l'obliger à virer le plus promptement qu'il eſt poſſible.

COROLLAIRE III.

15. Comme $m + 2n$ excede toujours la moitié de $2m + 2n$, il s'enſuit que l'angle du plus grand éloignement, *FDH*, eſt auſſi toujours plus grand qu'un demi droit; mais ſi les boules *A* & *B* ſont ſupoſées infiniment petites par raport à la boule *C*, alors l'angle *FDH* ſera demi droit, & ſon double, l'angle *FDG*, deviendra droit.

16. Il y a des cas où la viteſſe abſoluë des boules *A* & *B* peut devenir un *maximum*, ce qui eſt un eſpece de paradoxe; il conſiſte en ce que ſi ces boules ſont réünies en un corps, & choquées directement par la boule *C*, elles en recevront une

une vitesse absolue moindre que si ces boules étoient separées & frapées selon certaines directions. On tire de cette remarque un nouveau Problême.

PROBLEME II.

17. *Toutes choses suposées comme dans le Problême precedent, on demande les directions AF, BG, les plus avantageuses, pour que les boules données, A & B, frapées à la fois par une troisiéme boule C, en reçoivent la plus grande vitesse possible, suivant ces mêmes directions.*

On résoudra ce Problême si, supposant que la valeur generale de $y = 2pqma : (ppm + 2qqn)$ est un *maximum*, on la differentie en prenant la lettre q pour variable, & les autres pour invariables, & qu'ensuite on égale la differentielle à *zero*; de cette maniere on trouvera $qq = mpp : 2n$, & par consequent le quarré du sinus de l'angle FDH, c'est-à-dire, $pp - qq = (2n - m)pp : 2n$. D'où l'on tire cette analogie; Comme $2n$ est à $2n - m$, ainsi pp, où le quarré du sinus total, est à un quatriéme terme, dont la racine quarrée donnera le sinus de l'angle cherché FDH, ou GDH.

COROLLAIRE I.

18. Lorsque les trois boules sont égales, l'angle FDH devient demi droit, & le double $FDG =$ à un angle droit.

COROLLAIRE II.

19. Si $m = 2n$, ou si la boule C est égale à la somme des deux autres, l'angle FDH devient nul; je veux dire que la plus grande vitesse sera imprimée aux boules A & B, lorsqu'elles seront réünies & frapées directement par la boule C.

COROL-

COROLLAIRE III.

20. Dans tous les cas, où m eſt plus petite que $2n$, il y aura toujours certaines directions obliques AF & BG le long deſquelles les boules A & B, frapées par la boule C, iront avec plus de viteſſe, que ſi étant réünies elles étoient frapées directement, & avec la même viteſſe, par la même boule C. Soit par exemple, $m = \frac{3}{2}n$, ou $C : A = 3 : 2$, l'angle FDH doit être de 30 degrez, & ſon double FDG de 60 degrez: la plus grande viteſſe abſoluë que les boules A & B puiſſent recevoir par le choc de la boule C, ſe fera donc quand le triangle FGD ſera équilateral. Soit $m = \frac{1}{2}n$ l'angle FDH le plus avantageux ſera de 60 degrez: & ainſi des autres.

COROLLAIRE IV.

21. Mais ſi m eſt plus grand que $2n$, il n'y aura plus de direction oblique qui jouïſſe du privilége de la plus grande viteſſe, alors la viteſſe ſera toujours plus grande, à meſure que l'angle FDH diminuera, ou que la boule C frapera plus directement les boules A & B; la raiſon en eſt évidente; car ſi m étoit $> 2n$; q, ou $\sqrt{(mpp : 2n)}$, devroit être auſſi plus grand que p. Mais aucun ſinus ne peut être plus grand que le ſinus total.

CHAPITRE XII.

Du choc d'un corps contre pluſieurs autres, & de la détermination generale de leur mouvement après le choc.

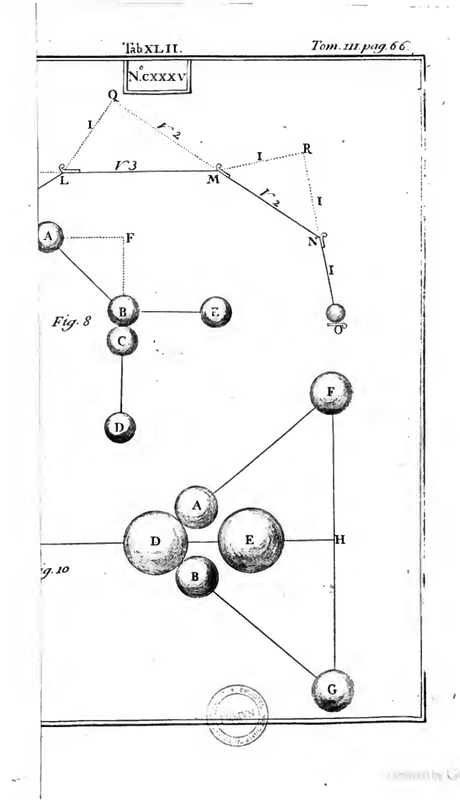
1. Après avoir déterminé ce qui arrive quand une boule en frape deux autres, qui ſont égales entr'elles, & diſpoſées à ſe mouvoir après le choc ſuivant des directions

également inclinées ſur la direction de la boule qui frape, que j'apellerai dans la ſuite *direction moyenne*; je paſſe à la conſideration de deux paires de boules, dont les directions de chaque paire faſſent des angles égaux avec la direction moyenne. Je ſupoſe d'abord que les deux boules de chaque paire ſont égales entr'elles: conſiderant enſuite ces quatre boules, comme venant à être frapées à la fois avec une viteſſe donnée par une cinquième boule quelconque, il s'agit de déterminer le degré de viteſſe que chacune de ces quatre boules recevra après le choc, & celle que conſervera la boule qui les a frapées, ſoit en avant, ſoit en arriere.

2. Cette queſtion me parût ſi difficile la premiere fois que j'y penſai, que je fus tenté de croire que la reſolution en étoit impoſſible; auſſi ne connois-je perſonne qui l'ait entrepriſe. Il me ſembloit qu'il n'y avoit pas aſſez de choſes données: cependant un peu de tems & de reflexions m'ont fourni les moyens d'en venir à bout; & ma methode eſt telle, que non ſeulement elle ſatisfait à cette queſtion, mais qu'on peut l'appliquer à un auſſi grand nombre de paires de boules qu'on voudra, priſes dans les circonſtances preſcrites: donnons-en un eſſai.

TAB. XLIII. Fig. 11. 3. Soit la boule *C* en mouvement ſelon la direction *CDH*, & que cette boule, parvenuë en *D*, frape à la fois contre les deux paires de boules reſpectivement égales, *A* & *B*, *K* & *L*, que je ſupoſe être ſituées de maniere que les droites *DAF* & *DBG*, *DKT* & *DLV*, tirées du centre de la boule qui frape par les points d'attouchement, faſſent de part & d'autre des angles égaux avec la ligne de moyenne direction, $FDH = GDH$, & $TDI = VDI$; il eſt clair que ces lignes feront les directions des quatres boules. Reſte à déterminer leurs viteſſes, exprimées par *AF* & *KT*, ou *BG* & *LV*.

4. Pour réſoudre ce qui paroit le plus épineux dans cette queſtion, je m'aviſai de conſiderer la boule *C*, ou *D*, comme étant partagée au hazard en deux parties quelconques *R* & *S*,


N°. CXXXV
Q
I
√2
R
I
√3
L
M
I
√2
I
N
I
A
F
B
E
Fig. 8
C
O
D
F
A
D
E
H
ig. 10
B
G

& *S*, ſeparables l'une de l'autre ; mais qui ſe meuvent conjointement juſqu'en *D*, où je ſupoſe que la partie *R* choque ſeulement les deux boules *A* & *B*, dans le même inſtant que la partie *S* frape les deux autres boules *K* & *L*. On peut donc conſiderer la choſe comme un double cas de la premiere queſtion déja reſoluë pour trois boules. On déterminera enſuite ſeparément les viteſſes des parties *R* & *S* après le choc. Mais ces deux viteſſes differeront plus ou moins, ſelon le raport qu'il y aura entre les deux parties *R* & *S* de la boule *D*, leſquelles ſe ſéparant après le choc, chacune ſe mouvra avec ce qui lui reſtera de viteſſe propre. Cependant je conçois qu'il peut y avoir une raiſon entre *R* & *S*, telle qu'il reſtera à chacune de ces parties une viteſſe égale après le choc, & qu'ainſi elles iront de compagnie, & avant & après le choc. De cette maniere les parties *R* & *S* demeurant contiguës, elles continueront de faire enſemble un même tout, de même que ſi la boule *C* n'avoit point été partagée. Mais il eſt aiſé de voir, que les viteſſes, que les cinq boules auroient dans cette ſupoſition, ſont préciſément les mêmes que ſi une boule entiere, & égale à *D*, choquoit, dans les mêmes circonſtances, les quatre boules *A* & *B*, *K* & *L*. Le nœud de la queſtion conſiſte donc à déterminer la raiſon qui doit être entre les parties *R* & *S*, pour que ces parties ſe meuvent de même viteſſe après le choc : ceci trouvé, le reſte en coule naturellement.

5. Tel eſt le plan que je me ſuis propoſé, il s'agit de l'executer. Soit donc la boule *C*, ou $D = M$, la boule *A*, ou *B*, $= n$, la boule *K*, ou *L*, $= N$; la viteſſe *CD* de la boule *C* avant le choc $= a$; le ſinus total $= p$; le ſinus de l'angle *DFH*, complément de *FDH*, $= q$; le ſinus de l'angle *DTI*, complément de *TDI*, $= Q$. Maintenant pour trouver la viteſſe de la partie *R* après le choc, je conſulte la formule pour trois boules, $x = (ppma - 2qqna) : (ppm + 2qqn)$, où je ſubſtitue *R* à *m*, laiſſant les autres lettres qui ſont ici les mêmes ; j'aurai par ce moyen *x*, ou la viteſſe de la partie *R*

après le choc, égale à $(ppRa - 2qqna):(ppR + 2qqn)$; je substitue ensuite dans la formule S à m, N à n, & Q à q, pour avoir la vitesse de la partie $S = (ppSa - 2QQNa):(ppS + 2QQN)$; mais puisqu'il faut que les vitesses de R & de S soient égales, pour que ces parties ne se separent pas après le choc, formons cette égalité: $(ppRa - 2qqna):(ppR + 2qqn) = (ppSa - 2QQNa):(ppS + 2QQN)$, qui réduite, donnera la valeur de $S = QQNR:qqn$. Et d'autant que les parties R & S prises ensemble, composent la boule entiere M; il s'ensuit que $R + QQNR:qqn = M$. D'où il suit que $R = qqnM:(qqn + QQN)$. Substituant donc cette valeur de R dans celle de S, on aura aussi $S = QQNM:(qqn + QQN)$, ensorte qu'il ne reste plus qu'à substituer la valeur de R dans $(ppRa - 2qqna):(ppR + 2qqn)$, ou ce qui est la même chose, la valeur de S dans $(ppSa - 2QQNa):(ppS + 2QQN)$, pour obtenir la vitesse commune à chaque partie après le choc; & par consequent la vitesse de toute la boule M qui sera $= (ppMa - 2qqna - 2QQNa):(ppM + 2qqn + 2QQN)$. Quant aux vitesses des boules frapées A & B, K & L, je prends la formule pour trois boules $y = 2pqma:(ppm + 2qqn)$, dans laquelle je substituë premierement la valeur de $R = qqnM:(qqn + QQN)$, à m, sans toucher aux autres lettres; & ensuite la valeur de $S = QQNM:(qqn + QQN)$ à m, N à n, & Q à q; la premiere de ces substitutions donne la vitesse AF, ou BG des boules A & $B = 2pqMa:(ppM + 2qqn + 2QQN)$, & la seconde fait connoitre la vitesse KT, ou LV, des boules K & L, égale à $2pqMa:(ppM + 2qqn + 2QQN)$. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

6. On se servira de la même méthode à déterminer les vitesses de tel nombre de paires de boules qu'on voudra, de trois paires par exemple. Pour cet effet, partagez par la pen-

ſée la boule *C*, ou *D*, en deux parties *R* & *S*; & que l'une de ces parties, comme *R*, frape une paire de boules, tandis que la partie *S* heurtera contre les deux autres paires. Cherchez enſuite ſéparément les viteſſes que *R* & *S* auront après le choc, & égalez ces deux viteſſes; vous déterminerez les valeurs des parties *R* & *S*, & le Problême réduit au cas précédent de deux paires de boules ſe réſoudra de même. On voit aiſément que cette méthode s'étend également à tout nombre de paires de boules propoſé. Mais ſans entrer dans un calcul long & pénible; ce que nous avons dit de la formation des formules pour une, & deux paires de boules, indique ſuffiſamment, la maniere de l'étendre à autant de paires de boules qu'on voudra. Soit, par exemple, la maſſe de la boule qui frape, nommée M, & les maſſes des boules frapées $e, f, g,$ *&c.* Soient de plus les ſinus des complémens des angles de leurs directions avec la direction moyenne, $q, r, t,$ *&c.* Je dis qu'on aura après le choc.

1°. La viteſſe de la boule qui frape, $= (ppMa - 2qqea - 2rrfa - 2ttga -$ *&c.* $) : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg +$ &c.$)$.

2°. La viteſſe de la boule e, $= 2pqMa : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg +$ &c.$)$.

3°. La viteſſe de la boule $f = 2prMa : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg +$ &c.$)$.

4°. La viteſſe de la boule $g = 2ptMa : (ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg +$ &c.$)$. Et ainſi à l'infini.

COROLLAIRE I.

7. On voit que les viteſſes des boules frapées ſont entr'elles comme $q, r, t,$ *&c.* c'eſt-à-dire, proportionnelles au ſinus des complémens des angles que font leurs directions, avec la direction moyenne.

COROLLAIRE II.

8. La vitesse, avant le choc, de la boule qui frape est à sa vitesse après le choc, comme $ppM + 2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.$ est à $ppM - 2qqe - 2rrf - 2ttg - \&c.$ & si ppM est $>$ ou $=$ ou $<$, que $2qqe + 2rrf + 2ttg + \&c.$ la vitesse de cette boule après le choc sera affirmative, nulle ou negative: Je veux dire, qu'après le choc cette boule ira en avant, qu'elle s'arrêtera, ou qu'elle reculera.

COROLLAIRE III.

TAB. XLIII. *Fig.* 12. 9. Je supose à present qu'une boule quelconque *C*, frape à la fois un nombre infini de petites boules uniformément situées autour d'un grand cercle de la boule qui les frape, comme on voit dans cette Figure, où les arcs égaux, *AE* & *AB*, sont censez occupez par une multitude égale & infinie de part & d'autre de petites boules *e, e, e, &c. b, b, b, b*, toutes égales entr'elles, mais dont la somme des masses ait une proportion finie & comparable à la masse de la boule *C* ou *D*. Je dis que la détermination des vitesses de toutes ces boules après le choc, tant de la boule qui frape, que de chacune de celles qui sont frapées, dépend de la quadrature du cercle, lorsque les arcs *AE*, *AB* occupent moins d'un demicercle sur la circonference *EAB*.

10. Mais ces vitesses peuvent être déterminées algebriquement, lorsque chacun des arcs *AE*, *AB* est égal au quart de cercle *D*, & partant l'arc entier $EAB =$ à sa demi circonference. Soit donc comme ci-dessus la boule qui frape $= M$, sa vitesse avant le choc $= a$, la somme de toutes les boules frapées $= N$, le sinus du complément de l'obliquité de la direction de l'une de ces petites boules quelconque, $= R$; la vitesse de la boule qui frape sera, après le choc, $= (2Ma - Na) : (2M + N)$, & la vitesse de la petite boule frapée $= 4MRa : (2M + N)$. D'où il paroit que la boule qui frape doit perdre

dre toute sa vitesse, & s'arrêter après le choc, dans le cas où $N = 2M$. Mais en general sa perte est $= 2Na : (2M+N)$. Je n'en donne pas l'analyse, elle me méneroit trop loin.

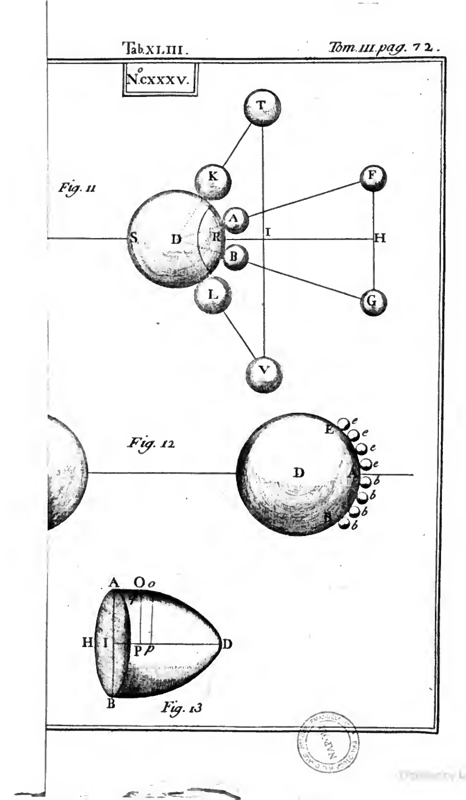
11. Je crois cependant devoir avertir que par le moyen de cette *Théorie*, il seroit aisé de déterminer les effets absolus de la résistance d'un milieu, composé de molécules doüées d'une parfaite élasticité, & séparées les unes des autres par de petits interstices; en sorte que de toutes les molécules qui composeroient ce fluide, il n'y auroit jamais que celles qui touchent immédiatement le devant d'un corps mû dans le milieu qui lui résistassent & qui reçussent du mouvement de ce corps un petit degré de force vive, sans que d'autres molécules y contribuassent en rien, quelque peu éloignées qu'elles fussent des premieres, jusqu'à ce que le corps en mouvement vint aussi à les rencontrer à leur tour; car non seulement on prouve que cette sorte de fluide oposeroit aux corps, qui se mouvroient dedans, une résistance proportionnelle au quarré de leur vitesse, comme font les fluides ordinaires; mais on tire encore de cette considération le moyen de déterminer précisément combien un corps mû dans un fluide pareil, perdroit actuellement de sa vitesse initiale, après avoir parcouru un espace donné. Matiere nouvelle, d'une recherche aussi curieuse qu'utile dans la pratique, propre à rendre raison de divers Phénomènes, & d'autant plus digne d'être approfondie, que personne ne l'a encore entreprise; aussi me serois-je fait un plaisir de l'examiner avec soin, si les bornes de cette Dissertation, déja trop longue, ne m'en avoient empêché. Peut-être aurai-je occasion de traiter quelque jour ce sujet. Mais reprenons le fil de nôtre discours.

12. La quantité de cette perte dépend, & de la figure du corps mû, & de sa consistance, ou de la densité qu'il a par raport à la densité du fluide composé de molécules élastiques dans lequel il se meut. Suposé, par exemple, que le plomb soit huit mille fois plus dense que l'air, & que ce dernier soit un fluide composé de molécules parfaitement élastiques : je dis qu'une

qu'une bale de plomb, chaſſée dans l'air, ſur un plan horiſontal, avec un degré de viteſſe donné, aura perdu la moitié de ſa viteſſe, après avoir parcouru un eſpace égal à peu près à 3700 de ſes diamétres: qu'un cube de plomb, mû le long d'une ligne horiſontale perpendiculairement à l'une de ſes faces, parcoura un eſpace 2770 fois plus grand que ſon côté, pour que ſa viteſſe initiale ſoit auſſi diminuée de la moitié: & qu'avant de ſouffrir une pareille diminution de viteſſe, un cone de plomb iſoſcele, dont l'angle du ſommet eſt droit, ſe mouvant le long de la direction de ſon axe, la pointe en avant, parcoura 924 diamétres de ſa baſe, quoique ce même cone ne parcoure que la moitié de ce chemin, ou 462 de ſes diametres, lorſque ſa baſe eſt opoſée à la réſiſtance de l'air. Et ſi on ſupoſe ce cone équilateral, l'eſpace parcouru, juſqu'à la perte de la moitié de ſa viteſſe initiale, ſera de 3272 diamétres de ſa baſe, en cas qu'il ſe meuve de pointe; car s'il ſe mouvoit, la baſe en avant, ce cone ne parcoureroit que le quart de l'eſpace précedent, ou 818 diamétres de ſa baſe.

13. Ou pour déterminer d'une maniere generale la longueur du chemin que doit parcourir avant de perdre une quantité donnée de ſa viteſſe, tout conoïde régulier dont la baſe eſt un cercle: Soit *AHBD* le conoïde propoſé, qu'on ſupoſe ſe mouvoir dans l'air, la pointe en avant, le long de la direction de ſon axe *ID* perpendiculaire à ſa baſe, *PO* une ordonnée $= x$, TAB. XLIII. Fig. 13. gO, ou ſa differentielle, $= dx$; oO, ou la differentielle de l'arc *DO*, $= ds$; n, le nombre de fois que la viteſſe initiale du conoïde doit être diminuée; ln, le logarithme de ce nombre: Soit enfin $C =$ à la longueur d'un cylindre d'air, perpendiculaire à ſa baſe, de même baſe, & auſſi peſant que le conoïde. Je dis que $Cxxln$ diviſé par $17371780 \int (xdx^3 : ds^2)$ exprimera, dans le cas où x devient $= IA$, ou au rayon de la baſe, l'eſpace que doit parcourir le conoïde, pour que ſa viteſſe réſiduë, ou ce qui lui reſte de viteſſe, ſoit à ſa viteſſe initiale comme 1 eſt à n.

CHAPI-


Tab.XLIII.
Tom.III.pag. 72.
N.° CXXXV.
Fig. 11
T
K
F
A
S
D
R
I
H
B
L
G
V
Fig. 12
E
e
D
A
b
B
Fig. 13
A
O o
H
I
P p
D
B



CHAPITRE XIII.

De la résistance des milieux; qu'elle ne change pas les loix de la communication du mouvement. Maniere de calculer la perte de la vitesse causée par la résistance.

1. LA résistance ordinaire, que souffrent les corps mûs dans le plein ou dans une matiere fluide, ne donne pas occasion à beaucoup de spéculations nouvelles; & je craindrois avec d'autant plus de raison d'ennuyer mon Lecteur, si je repetois ce que divers Auteurs ont écrit sur ce sujet, que rien ne m'oblige à le faire. En effet, la communication du mouvement des corps durs, dont il s'agit principalement ici, se fait de la même maniere dans le plein que dans le vuide. Je m'explique: Toute résistance est une espece d'effort passif, qui ne diminuë sensiblement la vitesse d'un corps, que lorsque ce corps a parcouru un espace fini ou sensible, dans un tems aussi fini ou sensible.

2. Mais le choc des corps est si subit, quoique successif, & d'une si petite durée depuis son commencement jusqu'à sa fin, que la résistance du fluide ambiant n'a le tems de causer aucun changement sensible à la vitesse que les corps ont dans l'instant qu'ils se choquent. On peut donc assurer, que les loix generales, de même que les regles que nous avons établies & démontrées dans ce Discours, & particulierement celles qui concernent la mesure de la force vive, seront aussi inviolablement observées dans le plein, qu'elles le feroient dans le vuide.

3. Il est vrai que peu de tems après le choc, les vitesses, que les corps ont acquises, sont alterées par la résistance du fluide dans lequel ces corps se meuvent, & cela plus ou moins, selon la diversité de la résistance, laquelle dépend de la nature de chaque fluide, & des qualitez qui lui sont propres. Mais, comme je l'ai déja dit, cet effet de la résistance n'in-

fluë en aucune maniere ſur la communication du mouvement. Il en change ſeulement la continuation dans chaque corps en particulier.

4. C'eſt ce changement qu'il s'agiroit d'examiner, ſi la queſtion propoſée l'exigeoit; mais puiſqu'elle ne fait mention que des loix de la communication du mouvement que j'ai traité avec aſſez d'étenduë, je me crois diſpenſé d'entamer une nouvelle queſtion; & ſi j'ajoûte ici quelque choſe, ſur la détermination de l'effet que produit la réſiſtance du fluide ſur les corps qui s'y meuvent, ce n'eſt que par ſurabondance de droit, & par le rapport que cette matiere a avec mon ſujet.

5. Il n'eſt pas difficile d'apliquer à l'effet de la réſiſtance, tout ce que j'ai dit (*Chapitre* XI. §. 2, *& ſuiv.*) pour expliquer la deſtruction & la production des viteſſes actuelles, par une preſſion miſe en œuvre & continuée pendant quelque tems. Cet effet conſiſte à diminuer peu à peu, & par des degrez infiniment petits, la viteſſe d'un corps mû dans un milieu qui lui réſiſte, de même qu'elle peut avoir été produite par des degrez infiniment petits par un effort continué. La loi de la réſiſtance étant donc donnée, il s'agit de trouver les diminutions de viteſſe, ou les viteſſes réſiduës. Soit, par exemple, la réſiſtance de l'air, ou d'un autre fluide uniforme, proportionnelle au quarré de la viteſſe, comme on l'établit communément. Soit AC la direction d'un corps qui ſe
TAB. XLIV. Fig. 14. meut dans ce milieu réſiſtant de A vers C. Soit enfin DEF une ligne courbe, dont les appliquées AD, BE, &c. marquent les viteſſes réſiduës.

6. Pour déterminer la nature de cette courbe, je prends à diſcrétion un point fixe A, pour le commencement des abſciſſes; & je m'imagine la courbe AMO, dont les appliquées BM repreſentent les tems que le mobile employe à parcourir les eſpaces AB Soit donc $AB = x$, $Bb = dx$, $BE = v$, $GE = dv$, $BM = f$, $Nm = dt$; on aura le tems élementaire par Bb, c'eſt-à-dire, la differentielle Nm, ou $dt = adx : v$, parce que ce petit tems eſt en raiſon compoſée de la

la directe de l'espace dx, & de l'inverse de la vitesse v. Or l'effet de la résistance, pendant le tems dt, est de diminiuer la vitesse BE d'un degré infiniment petit, qui s'exprime par GE, differentielle de l'appliquée B, & cette diminution momentanée est en raison composée de la résistance & du tems. Ainsi suposant la force qui résiste proportionnelle au quarré de la vitesse, on aura GE, ou $-dv + (vv : aa) \times (adx : v) = vdx : a$, & partant $-adv : v = dx$, ce qui fait voir que la courbe cherchée DEF est la logarithmique ordinaire, dont la soû-tangente est la constante a, prise arbitrairement pour remplir les homogénes. Et si on supose la vitesse initiale $AD = a = 1$, AB sera le logarithme de BE & par consequent les espaces parcourus sont comme les logarithmes des vitesses résiduës.

COROLLAIRE I.

7. On n'a pour déterminer la courbe des tems AMO, qu'à substituer dans l'équation $dt = adx : v$, la valeur de $dx = -adv : v$, il viendra $dt = -aadv : vv$, dont l'integrale donne $t = aa : v - a$ ou $t + a = aa : v$, ce qui fait voir que AMO est la même logarithmique que la précédente mise en un sens oposé, je veux dire qu'ayant prolongé FED vers L, & tiré DP parallèle & égale à AB; il faut faire $BM =$ à l'apliquée PL, pour avoir la courbe AM égale & semblable à la courbe DL. Il est clair que la courbe AM sera la courbe des tems, & que les appliquées BM exprimeront les tems que le mobile donné employera à parcourir les espaces AB.

COROLLAIRE II.

8. Suposons en general que la résistance du milieu soit en raison d'une puissance quelconque de la vitesse dont l'exposant soit $= n$. On parviendra par la même méthode à cette équation, $-dv = (v^n : a^n) \times (adx : v) = v^{n-1} dx : a^{n-1}$,

ou

ou $-a^{n-1} dv : v^{n-1} = dx$; dont prenant les integrales, il en resulte $\frac{1}{n-2} a^{n-1} v^{2-n} = x \pm b$. Equation qui prouve que la courbe des vitesses DEF, est du genre des hyperboles, lorsque $n > 2$, & des paraboles lorsque $n < 2$; excepté dans le cas où $n = 1$, dans lequel DEF devient une ligne droite.

COROLLAIRE III.

9. La courbe des tems AMO, pour la puissance generale de la vitesse, se détermine en substituant dans l'équation $dt = adx : v$ la valeur de dx, trouvée par le Corollaire précédent. On aura par ce moyen $dt = -a^n dv : v^n$, & son integrale $t \pm c = \frac{1}{1-n} a^n v^{1-n}$; & si $n = 1$, l'équation $dt = -a^n dv : v^n$, se changera en $dt = -adv : v =$ [parce que dans ce cas, $v = b - x$] $adx : (b - x)$; d'où il paroit que la courbe AMO sera aussi une logarithmique, dont l'asymptote est CR, tirée perpendiculairement sur la ligne de direction AC, du point C où la ligne des vitesses, qui dans ce cas est une ligne droite, coupe la même ligne AC; ensorte que BM, qui au point C se confond avec l'asymptote, devient infinie. D'où il s'ensuit, qu'il faut un tems infini au mobile, pour parcourir l'espace fini AC.

10. Si un mobile est continuellement sollicité à se mouvoir en avant, par une force motrice qui le pousse par derriere, tandis que la résistance du milieu qu'il traverse le repousse par devant; comme il arrive aux corps pesans qui tombent dans l'air, dans l'eau, ou dans tout autre fluide qui résiste à leur mouvement; la vitesse du mobile ira en augmentant, ou en diminuant, selon que la force motrice sera plus grande, ou moindre que la résistance. La méthode précédente déterminera dans cette suposition la courbe des vitesses acquises ou résiduës;

fiduës, en prenant ici la difference de la force motrice, à la résistance du milieu ; cette difference étant la seule cause de l'acceleration ou de la retardation du mouvement.

11. Ainsi dans le cas où les corps pesans, mis ou jettez perpendiculairement dans un milieu qui leur résiste, descendent ; la force motrice, qui n'est autre chose que leur pesanteur, est uniforme & invariable, mais la résistance est proportionnelle au quarré de la vitesse. Il n'y a donc ici qu'à multiplier cette difference, laquelle [en prenant la pesanteur pour l'unité] est $= 1 - vv : aa$, par l'élement du tems, sçavoir par $adx : v$; & l'on aura GE, ou $\pm dv = adx : v - vdx : a = (aa - vv) dx : av$, par consequent $dx = \pm avdv : (aa - vv) = \pm \frac{1}{2} adv : (a - v) \mp \frac{1}{2} adv : (a + v)$, & en integrant $x = \pm \frac{1}{2} al (a - v) \mp \frac{1}{2} al (a + v)$, d'où il paroit que la courbe des vitesses se construit par le moyen de la logarithmique.

12. Ce seroit ici le lieu d'examiner la nature des courbes que décrivent les projectiles pesans, jettez obliquement dans l'air ; mais comme j'ai traité cette matiere ailleurs, je ne pourrois pas m'étendre sur ce sujet, ni renvoyer mon Lecteur à ce que j'en ai publié, sans me faire connoître ; ce qui seroit contre l'intention de *l'Académie Royale des Sciences*.

CHAPITRE XIV.

Nouvelle maniere de déterminer, par la théorie des forces vives expliquée dans cet Ouvrage, le centre d'oscillation dans les Pendules composez.

1. JE finirai cette Dissertation par quelques remarques sur le centre d'oscillation dans les pendules composez, fondées sur la conservation de la quantité des forces vives, que je me flate qu'on verra avec plaisir. La recherche de ce centre a toujours paru curieuse & utile. Entre ceux qui ont entrepris de le déterminer, les uns se sont trompez dans leurs raisonne-

mens; d'autres n'en font venus à bout que par des détours longs & difficiles, & en employant diverses méthodes tirées de principes qui ne paroissent pas toujours assez naturels. Des personnes intelligentes ont trouvé que le principe qu'employe M. HUGUENS, & qu'il propose comme un Axiome, étoit un peu trop hardi; ce principe ayant besoin lui-même d'être démontré. M. HUGUENS (*) supose que le centre de gravité d'un pendule composé, descendu d'une hauteur donnée, ne remonteroit pas plus haut que la hauteur dont il est descendu, si les poids simples qui composent ce pendule se détachoient subitement lorsqu'il est parvenu dans une situation verticale, & que chacun de ces poids remontât séparément avec la vitesse qu'il a acquise au moment de sa séparation. La nouvelle théorie du centre d'oscillation, qu'on trouve dans les *Mémoires de l'Académie* de l'année 1714, n'est apuyée sur aucune supposition gratuite; elle est même generale: mais ce que l'on y a employé de méchanique, quoique solidement établi, en rend la démonstration difficile & moins à la portée de tout le monde.

2. La méthode, dont je me sers, est d'autant plus remarquable, que sans recourir à une nouvelle hypothése, on déduit de la seule conservation des forces vives la détermination du centre d'oscillation, & qu'elle découvre en même tems le fondement & la raison de l'identité du centre d'oscillation avec le centre de percussion, qu'un célèbre Auteur a confondu mal-à-propos; persuadé que ces deux centres étoient essentiellement compris sous une même idée.

TAB. XLIV. *Fig.* 15. 3. Concevons un pendule composé, par exemple, de trois poids *A*, *B*, *C*, attachez ou enfilez à une ligne infléxible *HA*, qui fasse ses oscillations autour de l'axe *H*. Soit *HA* la situation horisontale, d'où le pendule commence à descendre, & qu'il parvienne ensuite dans la situation verticale *Ha*; les vitesses acquises seront comme les distances; parce que les poids attachez à la ligne infléxible *HA*, ne sçauroient se mouvoir l'un sans l'autre. Concevons presentement que les poids *A*, *B*, *C*, étant

(*) Voyez son Traité *De Horolog. Oscillat.* Hyp. 1. pag. 93.

étant libres, forment autant de pendules simples, afin que chacun puisse descendre séparément, & parvenir à la situation verticale Ha, après avoir fait une demi-oscillation; dans ce cas de liberté, les vitesses acquises seront par la regle de GALILÉE, en raison soû-doublée des hauteurs Ha, Hb, Hc.

4. Ceci connu, je demande qu'on m'accorde seulement que la somme des forces vives des poids est la même, après que les poids sont descendus aussi bas qu'ils le peuvent, soit que ces poids descendent conjointement attachez à une même ligne infléxible, soit que chacun de ces poids descende librement, comme un pendule simple: il me semble que cette supposition souffre beaucoup moins de difficulté que celle de M. HUGUENS, puisque la descente des poids, dans l'un & l'autre cas, est l'effet d'une même cause, je veux dire de la pesanteur qui les oblige de descendre. C'est donc aussi la pesanteur qui produit dans la somme des poids une quantité déterminée de force vive, de quelque maniere qu'ils descendent, pourvû que chaque poids descende de la même hauteur qu'il descendroit s'il faisoit un pendule simple; la chose me paroît évidente.

5. Prenant donc la somme des forces vives, pour le cas où les poids sont attachez à une ligne infléxible, & la somme des mêmes forces pour le cas de leur descente libre; formons une égalité entre ces deux sommes, cette égalité déterterminera le centre d'oscillation, ou la longueur du pendule simple HG, isochrone avec le composé $HCBA$. Pour cet effet, soit $HA = a$, $HB = b$, $HC = c$, & $HG = x$; la vitesse du centre G parvenu en g, sur laquelle les autres vitesses doivent être reglées, peut être nommée comme on voudra; je la nomme donc aussi x; mais les vitesses des poids du pendule composé étant simplement proportionnelles à leurs distances du point H, la vitesse du poids A sera $= a$, la vitesse du poids $B = b$, & la vitesse du poids $C = c$; donc la somme de leurs forces vives sera $= aaA + bbB + ccC$; & dans le cas où les poids descendent séparément, leurs vitesses, acquises quand ils sont parvenus au point le plus bas, étant, par la regle de GALI-

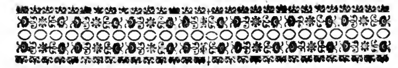
GALILE'E, en raiſon ſoû-doublée des hauteurs verticales, la viteſſe du centre d'oſcillation G ayant été nommée x, on aura la viteſſe du poids libre $A = \sqrt{ax}$, la viteſſe du poids libre $B = \sqrt{bx}$, & celle du poids libre $C = \sqrt{cx}$; d'où il réſulte que la ſomme de leurs forces vives eſt $= axA + bxB + cxC$, & ces deux ſommes miſes en équation $aaA + bbB + ccC = axA + bxB + cxC$, donnent $x = \frac{aaA + bbB + ccC}{aA + bB + cC}$, ce qui fait voir que la longueur du pendule ſimple iſochrone au pendule compoſé, ſe trouve en prenant la ſomme des produits des poids par les quarrez de leurs diſtances à l'axe du pendule, & diviſant cette ſomme par la ſomme des produits des poids par leurs ſimples diſtances. Et c'eſt auſſi préciſément en quoi conſiſte la (*) regle que M. HUGUENS a donnée pour la détermination du centre d'oſcillation, établie enſuite & fondée ſur des principes inconteſtables, & confirmée de nouveau à preſent par la loy de la conſervation des forces vives.

(*) Voyez ſon Traité *De Horolog. Oſcillat.* pag. 100.

Fin du premier Diſcours.



ADDI-

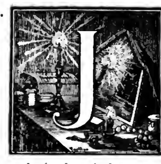


ADDITION

Au Discours In magnis voluisse sat est, *sur les loix de la communication du Mouvement,*

Où l'Auteur *entreprend de donner une explication probable de la cause physique du ressort.*

L'Auteur souhaite que cette Addition soit lûë après le premier Chapitre de son Discours.

1. 'AY composé ce Discours *In magnis voluisse sat est*, dans le dessein de satisfaire au Prix proposé par l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1724. Il s'y agissoit de déterminer les loix de la communication du mouvement des corps parfaitement durs. Les Philosophes ayant eu de tout tems differentes idées sur la nature de la dureté des corps, & l'Académie n'ayant point expliqué en quel sens Elle vouloit qu'on prit ce terme, ni averti que par dureté parfaite, Elle entendoit une infléxibilité absoluë; J'ai crû qu'il m'étoit libre d'attacher au mot de *dureté* l'idée qui me paroissoit & qui me paroit encore la plus convenable à la nature des choses.

2. Sur ce pied, j'ai pris *dureté parfaite* & *roideur infinie*, pour des termes synonimes : tout corps qui aplati par le choc d'un autre corps, se remet dans sa premiere figure, étant appellé *corps roide* ou *élastique*, j'ai conçû aussi que plus cette roideur,

 ou

ou élasticité, étoit forte, plus aussi cet aplatissement devoit être petit ; & que par conséquent le corps doüé de cette faculté, devoit d'autant plus aprocher de la nature des corps parfaitement durs, que son élasticité étoit grande ; en sorte qu'il n'y avoit plus qu'à suposer une roideur infinie ou immense, pour avoir des corps parfaitement durs, ou infiniment peu fléxibles.

3. Mon but étoit en cela de concilier la dureté parfaite avec les loix de la nature ; ayant fait voir, dans mon Discours, que l'opinion commune qui supose les corps parfaitement durs, dénuez de toute fléxibilité, même d'une fléxibilité infiniment petite, ne pouvoit pas subsister avec ces mêmes loix ; puisqu'elle ne sçauroit s'accorder avec quelques-unes de ces loix, qu'elle n'en renverse en même tems d'autres. Cependant Messieurs de l'Académie ont declaré dant l'Avertissement imprimé à la tête de la Piece qui a remporté le Prix, qu'en proposant la question, ils ont donné au mot de *dureté* ce même sens que je rejette, & qui, selon moi, est physiquement impossible. Parlant au reste de mon discours avec éloge, je commencerai par les remercier de la bonté qu'ils ont eu d'y faire attention, & j'avouërai ensuite franchement, que ne pouvant pas raisonner sur un sujet dont la supposition me paroissoit opposée aux loix de la nature, je ne m'y suis point attaché en composant cet ouvrage ; je crus devoir substituer à cette idée, un examen general du choc des corps à ressort ; & considerant ensuite qu'en suposant un ressort infiniment vigoureux, il en resultoit des corps infiniment peu fléxibles par les plus grands chocs, je me formai une notion juste & distincte de la dureté parfaite. En effet, un aplatissement très-petit pouvant passer pour un non aplatissement absolu ; j'imitois en cela les Géométres & les Analystes, qui comparant à des grandeurs finies les grandeurs infiniment petites, ou les élemens, négligent ces dernieres, & ne les considerent que comme des points ou des zeros absolus.

4. J'ai aussi lieu d'être content du bon effet que mon Mémoire

moire a produit. Les forces vives, si differentes des forces mortes, commencent à être goûtées; & j'ose me flater que la veritable maniere de les estimer, sera bien-tôt connuë : on n'a pour cela qu'à peser, avec une attention desinteressée, le poids des raisonnemens & des démonstrations, qu'on trouve en grand nombre dans mon discours. L'espoir même de remporter le Prix ne m'est pas ôté; Messieurs de l'Académie se sont reservez le pouvoir de l'adjuger à des Mémoires envoyez les années précédentes, & le mien convient parfaitement au sujet proposé pour l'année 1726, où *l'on exige les loix du choc des corps à ressort, &c.*

5. Mais Messieurs de l'Académie ayant jugé à propos d'y ajoûter une nouvelle condition, sur laquelle je ne me suis point arrêté en 1724, parce qu'il ne s'y en agissoit pas alors; il est juste de l'examiner à present: ces Messieurs ne demandent pas simplement *les loix du choc des corps élastiques*; mon premier Discours y auroit satisfait : ils veulent de plus que ces mêmes loix soient déduites *d'une explication probable de la cause physique du ressort*; il me reste donc, pour satisfaire au sujet dans toute son étenduë, d'ajoûter ici à mon Mémoire une Théorie de l'élasticité des corps, que je me suis formée il y a déja long-tems; & je le fais d'autant plus volontiers, que cette Théorie m'est particuliere, & que par son moyen je rends une raison probable & méchanique, non seulement de la cause physique du ressort, mais encore des principaux phénomènes que l'on remarque dans les fluides élastiques.

6. Il seroit inutile d'entrer dans un examen trop étendu des differentes opinions que les Philosophes ont euës sur la cause du ressort; aussi me contenterai-je de faire quelques réflexions sur les plus vraisemblables. Je ne sçai si ceux qui admettent dans les corps élastiques des corpuscules élementaires, doüez naturellement d'une vertu *expansive*, sans expliquer d'où leur vient cette proprieté, méritent qu'on les refute. Ces Philosophes suposent évidemment ce qui est en question, & si cette vertu, selon eux innée & primitive, est indépen-

dante de l'arangement des particules dont les corps élastiques sont composez; il est aussi aisé de l'attribuer tout d'un coup aux masses entieres des plus grands corps, qu'à la moindre de leurs particules: mais qui ne voit que ce seroit ouvrir de nouveau un asile à l'ignorance, & faire revivre les qualitez occultes décriées avec tant de raison.

7. Les Physiciens modernes sont allez plus loin; ils tâchent d'employer les loix de la Méchanique à expliquer la cause du ressort. Mais je n'en connois aucun, qui ait suffisamment éclairci cette matiere, & levé les difficultez qui l'envelopent. On en trouve de bien grandes, pour peu qu'on examine leurs explications, qui loin d'être fondées sur la saine Méchanique, en détruisent souvent les premiers principes. Ils conviennent presque tous, qu'il faut recourir à l'action d'un fluide, ou d'une matiere subtile, qui coulant dans les pores des corps à ressort, leur donne la faculté de se débander & de se restituer dans leur premier état, lorsque la force qui les avoit comprimez cesse. A parler generalement, ces Messieurs ont raison d'admettre une matiere subtile, qui par son mouvement soit la cause primitive du ressort des corps. Mais il ne suffit pas de suposer simplement un fluide perpétuellement agité; il faut de plus rendre raison des circonstances qui l'acompagnent, & faire voir quelle est la nature d'une agitation capable de produire le ressort; toute sorte de mouvement n'étant pas propre pour cela.

8. Quelques-uns soutiennent, par exemple, qu'un corps élastique venant à être comprimé par quelque force exterieure, la matiere subtile qui remplit ses pores, & qui avoit été contrainte d'en sortir, rentre dans ces mêmes pores d'où elle avoit été chassée, dès que la force exterieure cesse d'agir; d'où il suit necessairement, selon eux, que ce corps est obligé de reprendre sa premiere figure; ces Messieurs faisant consister l'élasticité dans cet effort, sans se mettre en peine d'expliquer ce qui contraint la matiere subtile à rentrer dans ces mêmes cellules qu'elle occupoit auparavant, ni pourquoi elle s'éforce, du-

durant la compression, de regagner le poste qu'elle avoit abandonné. Diront-ils, que c'est la masse de la matiere subtile ambiante, qui par sa résistance repousse celle qui sort, & la chasse dans les pores retrécis, lorsqu'ils cessent d'être comprimez par une force exterieure? Mais cette raison, spécieuse en aparence, ne sauroit subsister avec les premiers principes de l'hydrostatique; puisqu'on prouve par eux, que la plus petite portion d'un fluide, enfermée dans une envelope, & mise au milieu d'une masse du même fluide, résiste & fait équilibre avec la masse entiere du fluide qui l'environne; ensorte que quand même on forceroit une partie du fluide à sortir, en comprimant l'envelope qui le contient, & que nous suposerons pour cet effet fléxible & percée de toutes parts, loin que ce même fluide s'éforçât de rentrer dans l'envelope, après la compression, & de remplacer celui qui en avoit été chassé, l'hydrostatique nous aprend au contraire, que la petite portion de fluide restée dans l'envelope doit soûtenir, par sa résistance passive, la pression de la masse du dehors, & que toutes les parties du fluide, tant grandes que petites, demeurent entr'elles en équilibre. Suposons par exemple, une vessie remplie d'air ordinaire, percée de toutes parts, & exposée au grand air, & que comprimant cette vessie entre ses mains, on oblige l'air qu'elle contient, ou une partie de cet air, à s'échaper; soûtiendra-t-on que l'air exterieur retournera dans la vessie, & la renflera avec impetuosité? non sans doute, & l'experience le démentiroit, puisqu'elle fait voir que la vessie demeure flasque, & dans l'état de compression où on l'avoit mise, soit que l'air exterieur auquel on l'avoit exposée soit calme, ou agité par un grand vent. Je ne crois pas au reste qu'on puisse m'objecter que les cellules, ou pores des corps élastiques, ayent une structure different des trous de la vessie percée. Car, 1°. selon cette opinion, les cellules des corps élastiques doivent être ouvertes de toutes parts, puisqu'elles donnent un libre passage à la matiere subtile. En second lieu, leurs parois doivent être fléxibles comme celles de la vessie, puisqu'elles changent de figure par

la compreſſion ; à moins qu'on ne ſoutienne que ces pores, quoique fléxibles, ont outre cela un degré de roideur, qui les fait retourner à leur premiere figure. Mais cette roideur n'étant autre choſe que l'élaſticité même, elle demanderoit une nouvelle explication : ce ſeroit d'ailleurs ſupoſer ce qui eſt en queſtion.

9. D'autres attribuent la cauſe phyſique du reſſort à un principe peu different de celui que nous venons de refuter : ils conſiderent les pores des corps élaſtiques, comme autant de petits tuyaux capables d'être retrécis par la compréſſion ; enſorte que la matiere ſubtile ou éthereé, coulant rapidement au travers de ces petits canaux, choque continuellement leurs parois interieures. D'où il ſuit, que les chocs lateraux deviennent plus forts, quand par la compreſſion les paſſages ſe retréciſſent, & que par conſequent la matiere ſubtile qui y coule doit acquerir par là une plus grande rapidité. C'eſt, ſelon ces Meſſieurs, de l'augmentation de ces efforts lateraux de la matiere ſubtile, que dépend l'effort total que le corps comprimé fait pour ſe rétablir dans ſa premiere diſpoſition, & en quoi conſiſte la nature du reſſort.

10. Si cette explication a quelque vrai-ſemblance, il faut avoüer qu'elle eſt bien legére, & que pour peu qu'on raiſonne on en découvre l'illuſion : car outre que ce que nous venons de dire tombe en partie ſur cette maniere d'expliquer la cauſe du reſſort, ce que je vais ajoûter achevera d'en faire ſentir le foible. Il eſt vrai, & le bon ſens le dicte, qu'un fluide qui coule doit acquerir d'autant plus de viteſſe, que l'endroit par où il eſt contraint de paſſer eſt plus étroit ; ſans quoi il ſeroit impoſſible que des quantitez égales de fluides paſſaſſent en même tems par deux ouvertures inégales en largeur : il n'eſt pas moins vrai, qu'une plus grande viteſſe dans le fluide augmente la violence avec laquelle il agit ſur les parois de ſon canal ; & que plus le fluide coule vite, plus il s'éforce d'élargir ſon paſſage. Auſſi voyons nous qu'une riviére prend un cours rapide, quand d'un lit large & ſpacieux elle eſt contrainte de ſe reſſer-

resserrer entre deux rivages hauts, étroits & escarpez, & que les rivages souffrent bien plus de la violence du courant, que dans les endroits où l'eau trouve assez d'espace pour s'étendre en largeur. Mais il faut faire attention à la circonstance, qui fait que l'eau accélére sa course quand elle commence à être resserrée entre deux rivages étroits. En effet, la chose n'arrive que lorsque l'eau est contrainte de couler dans son lit, sans pouvoir échaper de côté ni d'autre. Car si à l'entrée du passage étroit, l'eau trouvoit d'autres routes ouvertes, ou une plaine de niveau, il est certain qu'elle n'iroit pas se fourrer toute entiére dans ce passage; mais qu'une partie de l'eau, trouvant dans le détroit plus de résistance à son cours qu'auparavant, elle s'écouleroit par les routes qu'elle trouveroit ouvertes, ou se répandroit dans la plaine; ensorte que le détroit ne recevroit de l'eau qu'à proportion de sa capacité; la nature des fluides étant de se tourner à la rencontre d'un obstacle, & d'enfiler les routes où il n'y en a point: d'où il est aisé de conclure que la vitesse du courant n'y seroit nullement augmentée.

11. Mais pour revenir à nôtre sujet, on doit distinguer entre le mouvement d'un fluide contraint, & le mouvement d'un fluide libre. Lorsque le mouvement se fait dans un canal d'inégale largeur, dont le fluide ne sauroit échaper; il est sans contredit que le fluide s'accélérera toutes les fois qu'il passera d'un endroit plus large dans un endroit plus resserré; mais si le fluide a un mouvement rectiligne libre, & qu'il puisse s'étendre de tous côtez à la rencontre de la moindre résistance, je dis que si on lui opose quelque obstacle, un tuyau, par exemple, ouvert par les deux bouts, & couché dans la même direction, un cylindre de ce fluide, égal en capacité au tuyau, enfilera ce tuyau & le traversera d'un bout à l'autre, avec une vitesse égale à celle de toute la masse du fluide qui restera hors du tuyau. Je dis plus, c'est que si on presse assez fortement ce tuyau, que je supose d'une matiere molle ou pliable, pour le rendre plus étroit, le fluide ne le traversera pas avec plus de

de rapidité qu'auparavant ; puisque le surperflu de ce fluide que le tuyau ne pourra plus contenir regorgera, & passera librement à côté. On ne sentira donc aucune résistance de la part du fluide interieur ; sa pression étant contre-balancée par celle du fluide exterieur qui lui est égale. La preuve en est aisée ; soit une quantité suffisante de brins de paille entiers, d'égale longueur, & liez legérement en botte, oposez au courant d'une riviére rapide, dans une situation fixe & parallèle à la direction du fil de l'eau, afin que l'eau puisse en pénétrer librement les tubules : je dis, que quoiqu'on serre cette botte de paille entre ses mains, jusqu'à retrécir la capacité des petits tuyaux qui la composent, on ne sentira cependant de résistance que celle qui peut provenir de la roideur même de la paille, & qu'on sentiroit hors de l'eau de même que dans l'eau : la raison en est manifeste, car dès que les chalumeaux deviennent plus étroits, l'eau ne pouvant plus y entrer avec la même facilité, il n'y en passe plus qu'une quantité proportionnée à leur ouverture diminuée, le surplus se détourne librement de côté, & poursuit, conjointement avec le reste de l'eau, le mouvement commun de la riviére ; ainsi n'y ayant aucune force qui contraigne l'eau de passer par les tuyaux, au de là de ce que leur cavité en peut recevoir sans effort ; il est évident que l'eau n'acquerrera aucune augmentation de vitesse en coulant au travers de ces tuyaux retrécis.

12. L'aplication de ce que nous venons de dire est facile. Les partisans de l'opinion que je combats, doivent nécessairement admetre dans les corps élastiques, des pores ouverts en forme de petits tuyaux parallèles, & dispofez de même que les brins de paille de la botte dont j'ai parlé, & un mouvement, dans la matiere subtile qui traverse ces pores, semblable à celui de l'eau de la riviére qui coule au travers des chalumeaux : mais on a démontré que quand même les chalumeaux viendroient à se retrécir, l'eau n'en auroit pas pour cela plus de force à les dilater : d'où il s'ensuit, selon moi, que la matiere subtile, qui pénétre les pores tubuleux des

des corps élaſtiques, ne doit pas faire plus d'effort pour les élargir, quoique retrécis par une compréſſion étrangére. Loin de ſe redreſſer, le corps reſteroit donc aplati; ce ne ſeroit donc plus un corps élaſtique. Donc cette maniere d'expliquer la cauſe du reſſort n'eſt pas la véritable.

13. Je ne ſais, ſi ceux qui ſont conſiſter l'air dans l'amas d'une infinité de petites particules branchuës, pliables, & perpétuellement agitées, qui nageant dans l'éther, tendent naturellement a ſe redreſſer, lorſque quelque cauſe extérieure les comprime, s'aperçoivent qu'ils tombent dans le défaut qu'on nomme *pétition de principe*. Qui ne voit en effet, que cette tendance à ſe redreſſer, que ces Meſſieurs attribuent gratuitement aux petites particules repliées de l'air, eſt préciſément cela même dont il s'agit de déterminer la cauſe.

14. Si quelques Phyſiciens ſont conſiſter la cauſe du reſſort, dans l'effort d'un fluide imperceptible, qui ſe mouvant avec rapidité dans les pores des corps élaſtiques, tâche continuellement à ſe dilater par quelque force centrifuge; ce ſont ceux qui, à mon avis, aprochent le plus de la vérité; pourvû que ſe renfermant dans les bornes de la nature, ces Philoſophes n'attribuent pas la cauſe de cette force à quelque vertu ou faculté immatérielle & imaginaire, telles que ſont l'antipathie, & la ſimpathie.

15. Pour en venir maintenant à l'explication de ma Théorie ſur la cauſe probable de l'élaſticité des corps à reſſort; je commencerai par dire que j'adopte pour principe *la force centrifuge*, mais priſe dans un ſens intelligible. J'entends par ce mot, la force qu'ont tous les corps étant mûs en rond, ou ſur quelqu'autre ligne courbe: force, qui conſiſte dans l'effort que tout corps fait de ſe mouvoir en ligne droite, en vertu de la loi generale de la nature, qui veut que tout corps continue autant qu'il eſt en lui de ſe mouvoir ſuivant la direction qu'il a en chaque inſtant; ainſi pour détourner un corps de ſon mouvement rectiligne, & pour lui faire décrire une ligne courbe, il faut une action continuellement apliquée, qui entretienne

le mouvement en ligne courbe; parce qu'autrement le corps s'échaperoit suivant la tangente de la courbe, si cette action venoit seulement à cesser un moment: or comme il n'y a point d'action sans réaction, & que l'action, qui détourne le corps de son mouvement rectiligne, est une impulsion ou pression extérieure, il est visible que la réaction qui se fait sentir de la part du corps en mouvement, n'est autre chose que cette résistance, ou plûtôt cette *rénitence* qu'on rencontre en voulant changer son état, laquelle dépend en partie de l'inertie, ou de la quantité de matiere, & en partie de la vitesse avec laquelle le corps se meut. Telle est *la force centrifuge* que j'admets.

16. Ce n'est point une qualité imaginaire, puisqu'elle a des proprietez très-réelles, que d'habiles Géométres ont démontrés, & entr'autres M. HUGUENS, dans les beaux Théorèmes qu'il a le premier publiez, à la fin de son Traité *De Horologio oscillatorio.* On conclud aisément du second & du troisiéme de ces Théorèmes, que la force centrifuge d'un corps mû sur la circonference d'un cercle, est comme le produit de la masse par le quarré de la vitesse, divisé par le rayon; je veux dire, en raison composée de trois raisons, de la simple directe de la quantité de matiere, de la doublée directe de la vitesse, & de la simple reciproque du rayon. Ce Théorème me servira à expliquer la cause d'un des plus curieux Phénomènes qui se remarque dans les fluides élastiques, & qu'on sait être attaché à leur nature. Ce Phénomène, que l'expérience a découvert, consiste en ce que la force de l'élasticité de tout fluide comprimé augmente dans la proportion du degré de densité auquel on le réduit. Si l'air de consistance naturelle, renfermé, par exemple, dans une espace, peut soutenir, par la force de son ressort, une colonne de vif-argent de 28 pouces de hauteur; ce même air en soutiendra une deux fois plus haute, réduit à un volume deux fois plus petit, ou, ce qui revient au même, si dans le même espace, où cet air est renfermé, on introduit de nouveau une quantité d'air égale

le à celle qui y étoit déja. Quoiqu'on se soit assuré de la vérité de ce fait par un grand nombre d'expériences réiterées, je ne sache pourtant personne qui ait entrepris d'en rendre une raison physique. Et comment l'auroit-on fait? les Théories publiées jusqu'ici sur la cause du ressort, ont si peu de fondement dans les loix de la nature, qu'on ne sauroit en déduire une explication vrai-semblable de ce même Théorème, que ma Théorie dévelope avec tant de facilité. Je me flatte qu'on en sera pleinement convaincu, si on se donne la peine d'examiner avec un peu de soin, ce que j'aurai l'honneur de dire dans la suite de ce Mémoire.

17. J'ai déja insinué (*Art.* 7) que la cause generale & primitive du ressort des corps, tant fluides que solides, dépend du mouvement d'une matiere subtile. Je ne dis pas que cette matiere, étant en mouvement, devienne elle-même élastique: mais le mouvement de cette matiere subtile devant nécessairement entrainer avec rapidité les particules les plus grossiéres qui nagent dedans; ces particules sont par cela seules déterminées à se mouvoir en rond, & acquiérent dès-là une force centrifuge (*), telle qu'agissant avec violence contre la surface intérieure de l'endroit où elles sont renfermées, elles s'éforcent continuellement d'élargir la prison qui les retient. C'est de cet effort dont dépend la force du ressort. Voici de quelle maniere je conçois la production de cet effet.

18. Soit un espace, par exemple, un recipient d'une figure quelconque, rempli de matiere subtile: on sait assez que cette matiere, qui passe sans peine par les interstices les plus étroits de tous les corps sensibles, traversera avec la même facilité les pores du récipient: je supose qu'outre la matiere subtile contenuë dans le récipient, il y a quantité de corpuscules trop grossiers pour pouvoir s'échaper au travers des pores du récipient, mais qui nageant librement dans la matiere subtile, laissent entr'eux des intervalles si spatieux, que tous ces corpuscules, ramassez en un tas, n'ocuperoient peut-être pas la

M 2 cent-

(*) Voyez l'art. 14.

cent-milliéme partie du récipient. Je ſupoſe enfin, que ces mêmes corpuſcules, tous extrêmement ſuſceptibles de mouvement, le ſont pourtant inégalement, les uns plus, les autres moins, à cauſe de la diverſité de leurs figures.

19. Juſques-ici j'ai conſideré la matiere ſubtile comme étant en repos dans le récipient. Voyons à preſent ce qui doit arriver, lorſque cette matiere, ſe ſuccedant continuellement à elle-même, traverſe avec rapidité le récipient qu'elle pénétre de toutes parts. Il eſt évident, que ces corpuſcules, que leur groſſiéreté empêche de s'échaper au travers des pores du récipient, emportez çà & là par le cours violent de cette matiere, ne peuvent qu'être en une agitation extrêmement confuſe, & ſe choquer les uns les autres dans l'irrégularité de leurs mouvemens. Mais ces corpuſcules, agitez ainſi en tous ſens, s'embaraſſans les uns les autres par des mouvemens rectilignes opoſez, chacun d'eux ſe trouvera bien-tôt déterminé à ſe mouvoir de la maniere où il ſera le moins en obſtacle au mouvement des autres corpuſcules; je veux dire, à changer ſon mouvement droit en un mouvement circulaire autour d'un centre; ainſi chaque corpuſcule agité, que je nommerai dans la ſuite *mobile circulant*, décrira ſon propre cercle, plus ou moins grand, ſelon qu'il aura plus ou moins de viteſſe; car j'ai déja remarqué, que tous les mobiles circulans ne reçoivent pas un même degré de viteſſe par l'agitation de la matiere ſubtile.

20. Il y aura donc differens ordres de mobiles circulans; & entre ceux qui ſont d'un même ordre, pluſieurs pourront ſe mouvoir autour d'un centre commun, ſur des circonferences égales, & décrire differens plans, qui tous paſſeront par le centre commun de leur mouvement; en ſorte que toutes les circonferences, que ces mobiles circulans décriront autour d'un même centre, ſeront autant de grands cercle d'une ſphére, & la multitude de ces mobiles pourra devenir ſi grande, que toute la ſurface ſphérique ſera comme couverte de ces petits mobiles, dont les mouvemens rapides & divers parcoureront toujours des circonferences égales, ou au moins des

arcs

arcs de grands cercles: je dis des arcs, car il arrivera à tout moment que plusieurs mobiles circulans se rencontrans aux points où leurs cercles se croisent, se détourneront de leur route sans rien perdre de leur vitesse, parce que le mouvement de la matiere subtile les entretient toujours dans le même dégré de vitesse qu'elle leur a une fois communiquée. D'où il est aisé de conclure, que les arcs décrits en divers plans par chaque mobile, seront toujours des portions de grands cercles. Car si on suposoit qu'un mobile décrivit un petit cercle avec une vitesse égale, il acquerreroit dès-là une force centrifuge prévalante, qui feroit étendre sur la surface sphérique le petit cercle qu'il décrit, jusqu'à ce qu'il se changeât en un grand cercle, & que sa force centrifuge devint égale à celle des autres mobiles.

21. Mais comme la multitude des mobiles circulans d'un même ordre est sans doute beaucoup trop grande, pour qu'ils puissent tous se mouvoir commodément, & sans s'embarrasser sur une même surface sphérique; on conçoit aisément qu'il doit se former un grand nombre de ces surfaces sphériques, dont chacune se mouvra autour de son centre particulier; à peu près comme font les abeilles, (s'il m'est permis de me servir de cette comparaison) qui se partagent en divers essains, lorsqu'elles sont trop nombreuses pour n'en composer qu'un seul.

22. Considerons à present les dispositions que prendront dans le récipient toutes ces surfaces sphériques, & l'effort qu'elles font, les unes sur les autres, & contre les parois intérieurs du récipient qui les empêche de se dilater; & nous comprendrons, 1°. que toutes les surfaces, grandes & petites, de tous les degrez, seront dispersées dans l'étenduë du récipient, de la même maniere dont DESCARTES a conçu que l'Univers étoit rempli de tourbillons de toute sorte de grandeur. Par quelle raison y auroit-il en effet dans une partie du récipient, plus de surfaces sphériques d'un certain ordre, que dans toute autre partie? 2°. Suposant donc les plus grandes sphéres égale-

également dispersées dans toute la cavité du récipient; celles qui les suivent en grandeur occuperont les intervalles que les premieres laisseront entr'elles, de même que celles du troisiéme ordre se logeront dans les interstices des secondes, & ainsi de suite à l'infini; en sorte que chaque surface sphérique sera environnée de toutes parts d'une infinité de surfaces plus petites dans tous les degrez possibles. 3°. Et comme chacune de ces surfaces fourmille de mobiles, qui circulent avec une vitesse convenable à la grandeur de leurs sphéres, & que chacun de ces mobiles acquiert par cette circulation une force centrifuge; il est clair, que toutes ces sphéres, dont l'intérieur n'est rempli que de matiere subtile, s'efforceront continuellement de se dilater en tout sens; tous les points de leurs surfaces tâchant en même tems de s'éloigner du centre de leur mouvement. On pourroit donc comparer ces sphéres à ces vessies d'eau de savon, que l'on dilate par le moyen de l'air introduit par un chalumeau; avec cette difference pourtant, que les surfaces de celles-ci sont poussées du dedans au dehors par une force étrangère, au lieu que les surfaces sphériques tendent d'elles-mêmes à se dilater en dehors, par la force centrifugé qui reside dans ces mêmes mobiles circulans dont chaque surface sphérique est composée. 4°. Aussi chacune de ces sphéres grossiroit-elle actuellement par la dilatation de sa surface, si les sphéres voisines qui font de pareils efforts pour s'étendre, ne l'en empêchoient. 5°. Mais y ayant un parfait équilibre entre les préssions, par le moyen desquelles ces sphéres agissent les unes sur les autres, il faut de nécessité que chacune de ces sphéres, tant grandes que petites, ait une force égale, qui contrebalance l'effort de celles qui l'environnent, & l'empêche de ceder à leur préssion.

23. Tout ceci bien entendu, j'én tire les conséquences suivantes: 1°. Il faut que les mobiles qui circulent sur des surfaces sphériques de différentes grandeurs, ayent des vitesses qui soient en raison sou-doublée des rayons de leurs sphéres: car de cette maniere les forces centrifuges deviennent égales, par le Théorème de l'article 16; & les surfaces sphériques que j'appel-

j'appellerai dans la suite *Sphéres creuses*, ou simplement *Sphéres*, se maintiendront dans un parfait équilibre, quoiqu'inégales en grandeur, par leurs préssions égales & réciproques. 2°. Comme les sphéres contiguës aux parois du récipient, ne trouvent de réaction, du côté de leur attouchement à ces parois, que la simple résistance passive, ou la fermeté du récipient; il est manifeste que toute sa surface intérieure, devant soutenir l'effort des sphéres qui la touchent, sera continuellement pressée du dedans au dehors dans tous ses points par des directions perpendiculaires. 3°. Les sphéres qui ne touchent pas les parois du récipient, ne faisant autre chose que se contre-balancer mutuellement, & servant ainsi uniquement d'apui aux sphéres qui touchent ces parois; il est évident que ce sont ces dernieres seules, dont l'effort se fait sentir sur la surface intérieure du récipient. Il en est de ceci, comme de la préssion de plusieurs ressorts rangez en ligne droite, dont j'ai parlé dans mon Discours (*Chap. VI, art.* 3,) où j'ai fait voir que la puissance *L*, qui empêche que les quatre ressorts égaux *ACB*, *BED*, *DGF*, *FIH*, ne se débandent, est égale à la puissance *P*, qui résiste à un seul de ces ressorts, au ressort *ACB*, par exemple. 4°. D'où il s'ensuit, que la préssion totale, que souffre la surface intérieure du récipient, ne doit pas être estimée par la multitude de toutes les sphéres contenues dans la cavité du récipient; mais seulement par le nombre de celles qui sont contiguës à sa surface. 5°. Ainsi tout l'amas de nos sphéres creuses étant transporté dans un autre récipient de même capacité, mais de figure differente, la préssion totale, que le second récipient soutiendra, sera plus ou moins forte, selon que sa surface sera plus ou moins grande que celle du premier récipient. 6°. Il s'ensuit encore de là qu'un récipient beaucoup moins spatieux que le premier, quoiqu'il ne puisse contenir qu'une partie de ces mêmes sphéres creuses, sera cependant exposé à une plus forte préssion, si sa surface intérieure est plus grande que celle du premier récipient.

TAB. XLI. *Fig.* 5.

24. Il est aisé, après tout ce que je viens de dire, de détermi-

terminer quelle peut être la cause probable du ressort des corps élastiques. En effet, on ne peut guéres attribuer qu'à une matiere subtile, telle que je l'ai décrite, la cause primitive de l'élasticité de tous les corps à ressort; soit que ces corps soient eux-mêmes fluides, comme l'air grossier que nous respirons; soit que ces corps soient solides, & de la nature de ceux qu'on nomme *roides*, lorsque, parmi les particules terrestres qui composent une matiere fluide ou liquide, il se trouve quantité de ces sphéres creuses, lesquelles tendent continuellement à se dilater par la force centrifuge de leurs mobiles circulans, il est évident que ce mouvement imprime à ces particules terrestres une force, ou une tendance à s'écarter les uns des autres, & à occuper ainsi un plus grand volume qu'auparavant. C'est en vertu de cette force, ou de cette tendance des sphéres creuses à se dilater, que le fluide, où elles se trouvent, est apellé *élastique*: tel est non seulement l'air ordinaire, mais encore l'esprit de vin rectifié, & d'autres liqueurs spiritueuses, lesquelles se dilatent avec impétuosité, dès que la préssion extérieure de l'air qui retenoit leurs sphéres creuses en contrainte est ôtée, ou que la force centrifuge de leurs mobiles circulans est augmentée, par un nouveau degré de vitesse, causé par la chaleur, ou par quelqu'autre cause étrangere. Aussi voyons-nous que l'esprit de vin, mis dans la machine du vuide, boüillonne avec force; & qu'étant exposé à un air plus chaud, il se dilate sensiblement : les Thermométres sont une preuve de ce que j'avance. Ce seroit ici le lieu de parler des effets surprenans des fermentations, & des effervescences chymiques, & particuliérement de ceux de la poudre enflammée, si le sujet le permettoit, n'y ayant aucun de ces effets qui ne découle naturellement de ma Théorie sur la cause du ressort.

25. Il n'est pas plus difficile d'assigner aux solides élastiques une cause probable de leur ressort. Concevons que ces corps, semblables à une éponge, sont remplis de petites cavitez ou cellules, & que chacune de ces cellules renferme des sphéres creuses, qui jointes aux particules terrestres, composent ce que nous

nous venons de nommer *matiere fluide élastique*. Concevons de plus, qu'outre ces cellules, il y a une infinité de pores fort étroits, par lesquels la matiere subtile passe librement d'une cellule à l'autre, sans que les mobiles circulans puissent s'échaper de leurs cellules à cause de la petitesse de ces pores. Voilà donc le corps roide ou élastique, consideré comme un amas de petits récipiens, dont chacun contient une quantité de matiere fluide élastique, proportionnée à sa capacité. Mais un corps composé de la sorte, ne sauroit être plié ou comprimé, qu'une partie de ses cellules ne se retrécissent, & que les sphéres creuses qui y sont renfermées, se retrécissant aussi à proportion, ne deviennent plus petites. Leurs mobiles circulans seront donc obligez de décrire de plus petits cercles, pendant qu'ils conserveront toujours leur même vitesse; la matiere subtile, qui la leur imprime, continuant toujours d'être agitée de même, quelle que puisse être la compréssion des pores & des cellules, ainsi que je l'ai fait voir art. 11, & 12. D'où il s'ensuit, que chacun des mobiles circulans aura une force d'autant plus grande, que le rayon de la surface sphérique sur laquelle il circule diminuë davantage; les forces centrifuges des mobiles égaux, qui circulent avec des vitesses égales sur des circonferences de cercles inégaux, étant en raison renversée de leurs rayons. Les surfaces sphériques, ou les sphéres creuses contenuës dans les cellules retrécies, feront donc un plus grand effort pour les dilater, qu'elles ne faisoient avant la compression des cellules. Or c'est précisément dans cet effort, exercé continuellement contre les parois des cellules, & qui tend à les élargir, que consiste la vertu des corps à ressort; & c'est aussi ce que j'avois entrepris d'expliquer.

COROLLAIRE I.

26. Le ressort des corps solides provenant de l'effort que fait une matiere fluide renfermée dans leurs petites cellules; on voit aisément pourquoi ce ressort est parfait en quelque corps,

& imparfait en d'autres. En effet un corps est parfaitement élastique, lorsque les fibres, qui composent ses cellules, sont assez fortes pour résister à l'effort des sphéres, pendant le retrécissement de ses cellules; en sorte que bien loin qu'il en creve aucune, elles se rétablissent toutes dans leur premier état. Il n'est au contraire qu'un corps imparfaitement élastique, lorsque la structure de ses fibres est telle, qu'il creve une partie de ses cellules retrécies par la compression, tandis que l'autre partie de ses cellules se rétablit.

COROLLAIRE II.

27. Tout ce qui augmente la vitesse des mobiles circulans sur les surfaces sphériques, augmente aussi en même tems la force de l'élasticité du fluide élastique; & plus la force centrifuge de chaque mobile circulant devient grande par l'augmentation de sa vitesse, plus les sphéres creuses tendent à se dilater avec effort; c'est par cette raison, que l'air enfermé dans une phiole, étant aprochée du feu, la casse & la fait sauter avec bruit; car la chaleur mettant en une agitation violente la matiere subtile, & celle-ci augmentant la rapidité des mobiles circulans, augmente aussi leurs forces centrifuges, d'où dépend l'élasticité de la matiere fluide; & cela à un point, que les parois de la phiole n'étant plus en état de soutenir l'effort avec lequel les sphéres creuses tendent à se dilater, il faut de nécessité que le verre se casse avec éclat.

COROLLAIRE III.

28. C'est aussi de là que dépend la cause physique de ce que certains corps, dont les cellules sont composées de fibres peu fléxibles, tels que le verre, le cristal, & diverses sortes de pierres, étant jettées au feu, se fendent de toutes parts; les mobiles circulans du fluide élastique contenu dans les cellules de ces corps, étant excitez par la chaleur à se mouvoir d'une vitesse

teſſe extraordinaire, ſe dilatent avec tant de violence, qu'ils font crever leurs cellules incapables de ſoutenir un ſi grand effort, & s'échapant ainſi de tous côtez, laiſſent dans ces corps une infinité de crevaſſes ou fêlures: auſſi voit-on que ces corps perdent leur élaſticité par la calcination.

COROLLAIRE IV.

29. D'autres corps, tels que les métaux, par exemple, ont une ſtructure differente, & les fibres de leurs cellules ſujetes à extenſion, prêtent plûtôt que de rompre par la dilatation de leurs cellules: auſſi voit-on que la contexture de ces corps demeure entiere, quoique leur volume augmente par la chaleur, à moins que la chaleur devenuë exceſſive, ne les faſſe fondre; & cela conformément à l'expérience, qui montre qu'une plaque de fer rougie au feu, augmente ſenſiblement dans toutes ſes dimenſions. On doit cependant remarquer que les corps les plus caſſans & les plus roides, tels que ceux dont j'ai parlé dans le Corollaire précédent, n'ont jamais leurs fibres aſſez inextenſibles, qu'elles n'obéiſſent un peu avant que de rompre, & qu'une chaleur moderée dilate ces ſortes de corps, ſans déſunir leurs petites parties. La pierre même eſt ſujete à cette loi; & un bloc de marbre, meſuré avec ſoin, a été trouvé plus long en Eté qu'en Hyver.

30. Je reviens aux fluides élaſtiques; il ſera facile à preſent de découvrir le reſte de leurs proprietez: ç'en eſt une fort connuë, que celle dont j'ai parlé au ſecond Corollaire; ſavoir que la chaleur augmente la force du reſſort de l'air enfermé dans une phiole. Mais on n'a pas encore fait aſſez d'attention au raport qu'il peut y avoir entre les differens degrez de chaleur & les augmentations des forces du reſſort de l'air que la chaleur occaſionne: Voici ce que je conçois ſur cela.

Puiſque la chaleur conſiſte dans une agitation violente de la matiere ſubtile, qui, pénétrant avec facilité les corps les

plus compactes, met en mouvement leurs mobiles circulans ; il est évident que la vitesse de leur mouvement est la mesure du degré de chaleur, ou, ce qui revient au même, l'intensité de la chaleur est en raison de la vitesse des mobiles circulans d'un ordre donné; ensorte que si cette vitesse augmente, par exemple, du double, on doit conclure que la chaleur, qui a produit cet accroissement de vitesse, a deux fois plus d'intensité qu'elle n'en avoit avant cet accroissement.

31. Venons à la maniere de mesurer la proportion des divers degrez de vitesse, que peuvent avoir entr'eux les mobiles circulans. Les forces centrifuges des mobiles circulans d'un même ordre, c'est-à-dire, qui décrivent des cercles égaux, sont comme les quarrez de leurs vitesses. Mais j'ai démontré que l'effet de ces forces centrifuges n'est autre chose que la force du ressort d'un fluide élastique. On aura donc la juste mesure de la force du ressort, & par conséquent aussi du degré de chaleur, réduite au poids, & les intensitez de la chaleur seront en raison soû-doublée des forces du ressort, ou des poids, que le fluide élastique, tantôt plus, tantôt moins échauffé, peut soutenir. Soient, par exemple, *A* & *B*, deux cylindres creux, parfaitement égaux en largeur & en hauteur, fermez par en bas, & ouverts par en haut, remplis tous deux d'air d'une même densité, & que nous suposerons d'abord de même temperature que l'air extérieur. Soient de plus deux diaphragmes *LM*, *NP*, qui bouchant exactement les ouvertures des cylindres, puissent néanmoins se mouvoir sans frottement, de haut en bas, & de bas en haut; il est clair que ces deux diaphragmes, considerez sans pesanteur, resteront en équilibre, chacun d'eux étant également pressé dessus & dessous, d'un côté par l'action de l'air extérieur, & de l'autre par une force égale du ressort de l'air intérieur.

TAB. XLIV. Fig. 16.

Suposons à present que l'air extérieur étant ôté, on lui substituë deux poids *R* & *S*, dont chacun, égal à la préssion de l'air extérieur qui pesoit sur les diaphragmes, continuë à les tenir en équilibre contre l'effort de l'air intérieur, qui renfermé dans

dans les cylindres *A* & *B* agit contre ces diaphragmes, & tâche de les soulever par son ressort. Il est encore manifeste que cet équilibre durera, aussi long-tems que l'air en *A* & en *B* restera dans son premier état de chaleur naturelle. Mais s'il survient un nouveau degré de chaleur à l'un ou à l'autre de ces deux cylindres d'air, à *B*, par exemple; en ce cas son ressort sera augmenté, & il soulevera le diaphragme dont il est chargé, à moins qu'on n'augmente aussi la charge d'un nouveau poids *T*. Soient donc les poids *T* & *S*, pris ensemble, ce qu'il faut précisément de pesanteur pour empêcher que l'air en *B* ne souleve le diaphragme *NP*; je dis que, suivant le systême que je viens d'établir, la chaleur de l'air naturel en *A*, sera à la chaleur augmentée en *B*, comme $\sqrt{R}$ est à $\sqrt{(S+T)}$.

32. Il seroit aisé de déterminer par ce moyen, ou par d'autres moyens équivalens, & plus faciles à pratiquer, celui-ci n'ayant été proposé que pour mieux faire entendre ma pensée; il seroit, dis-je, aisé de déterminer la proportion qui regne entre les degrez de chaleur de l'air en Eté, & celle que ce même air conserve en Hyver. Je suis persuadé, qu'il s'en faut beaucoup que la chaleur de l'air en Eté ne surpasse, autant qu'on le croit communément, la chaleur de l'air en Hyver: & qu'on ne soit pas surpris si j'attribuë un degré de chaleur à l'air en Hyver; car le froid le plus violent n'étant causé que par une diminution, & non pas par une entiere extinction de la chaleur, il ne fait jamais si froid, qu'il ne puisse faire encore plus froid; ainsi, quelque froid que l'air paroisse à nos sens, il conserve toujours quelque reste de chaleur.

33. Une des proprietez les plus curieuses qu'on ait reconnuë dans l'air, c'est la proportion constante qui regne entre son élasticité & sa densité. L'expérience ayant découvert, que le même air, & dans un même degré de chaleur, devient d'autant plus élastique, qu'on le réduit à une plus grande densité; les efforts, que l'air fait pour se dilater, étant toujours en raison de ses densitez. La densité de l'air se mesure par la quantité

tité d'air contenuë dans un volume donné, ou réciproquement par l'espace connu qu'une quantité d'air occupe. Ainsi, par exemple, le piston d'une pompe pneumatique, & remplie d'air, étant enfoncé jusqu'à la moitié de la profondeur du cylindre, ensorte que l'air, qui en occupoit auparavant toute la cavité, n'en occupe plus que la moitié; cet air, comprimé & réduit à un volume deux fois plus petit que son premier volume, sera dit avoir deux fois plus de densité qu'il n'en avoit avant l'avancement du piston. Reste à faire voir pourquoi, dans cet état de compréssion, l'air repousse le piston avec deux fois plus de force: car dans le premier état de consistance naturelle, l'air intérieur repoussoit le piston en dehors avec autant de force que l'air extérieur le repoussoit en dedans: mais dans l'état de compréssion dont nous venons de parler, il faut, outre la force de l'air extérieur, que celui qui enfonce le piston employe de nouveau une force précisément égale à celle de l'air extérieur, s'il veut empêcher que le piston ne rebrousse chemin. Et si on enfonce le piston dans le cylindre, ensorte que l'air enfermé se trouve réduit à un tiers de la hauteur qu'il occupoit auparavant, cet air ainsi comprimé sera trois fois plus dense, & repoussera par conséquent le piston avec trois fois plus d'effort: car pour empêcher le retour du piston, il faut joindre à la pression contraire de l'air extérieur, une force double de cette pression, & oposer par ce moyen au piston une résistance égale à l'effort de l'air condensé: il en est de même des autres cas que l'expérience vérifiera tous. J'en excepte les pressions excessivement grandes, où les forces de l'élasticité croissant en plus grande raison que les densitez; la regle generale commence à s'écarter un peu de cette proportion. Ma théorie en découvre la raison.

TAB. XLIV. Fig. 16. 34. Reprenons les deux cylindres égaux de l'article 31, *A* & *B*, suposons qn'il n'y ait point d'air extérieur qui agisse sur les diaphragmes *LM* & *NP*; que le cylindre *A* est rempli d'air naturel, & que le cylindre *B* en contient huit fois autant; l'air de ce cylindre sera huit fois plus dense que celui du cylindre

lindre *A*. Soient chargez les diaphragmes *LM*, *NP*, des poids *R* & *S* + *T*, dont la pesanteur proportionnée contrebalance précisément l'effort, avec lequel l'air renfermé dans les cylindres *A* & *B* tend à soulever ces diaphragmes; ensorte que les poids *R* & *S*+*T* marquent les forces de l'élasticité de l'air en *A* & en *B*: il s'agit de démontrer que $R : S + T = 1 : 8$; c'est ce que j'exécute de la maniere suivante.

35. Puisque dans l'espace *B* il y a, par l'hypothése, huit fois plus d'air que dans l'espace *A*; il est visible que tout ce qui concourt à composer l'air naturel en *A*, se trouvera huit fois dans l'air en *B*, & que c'est la même chose, que si j'avois introduit successivement dans le cylindre *B* huit cylindres d'air naturel, dont chacun fut égal au cylindre *A*: il y aura donc en *B* huit fois plus de particules terrestres, & parmi celles-ci huit fois plus de sphéres creuses de toutes façons, qu'il n'y en a en *A*, lesquelles seront entre-mêlées de la même maniere qu'elles le sont dans le cylindre *A*; avec cette seule différence, qu'en *B* toutes les dimensions des sphéres creuses seront réduites à la moitié de ce qu'elles sont en *A*; je veux dire, que le rayon de chacune de ces sphéres étant devenu deux fois plus petit par la compression, la distance des mobiles circulans, au centre de leurs sphéres, sera aussi deux fois plus petite: c'est dans cette proportion que les dimensions homologues doivent diminuer, pourvû qu'il y ait huit fois plus de sphéres en *B* qu'en *A*: la raison en est manifeste, & la moindre attention aux principes de Géométrie fait voir que, dans le cas proposé, le nombre des sphéres creuses de chaque espéce contenuës en *B*, doit être au nombre des sphéres creuses qui leurs répondent, & que contient l'espace *A* égal à l'espace *B*, en raison triplée réciproque de leurs rayons. Remarquez que je supose ici les espaces *A* & *B* incomparablement plus grands que la plus grande des sphéres creuses; sans quoi il pourroit arriver que la raison triplée réciproque ne seroit pas tout-à-fait exacte.

36. Il s'ensuit encore, conformément aux mêmes principes de la Géométrie, que la multitude des sphéres de chaque espece,

péce, contiguës au diaphragme *NP*, est à la multitude de celles qui leurs répondent, contiguës au diaphragme *LM*, en raison doublée réciproque de leurs rayons; parce que les diaphragmes *NP* & *LM*, sont des cercles égaux; ensorte que, dans le cas suposé, il y a quatre fois plus de sphéres de chaque espéce qui s'apuyent contre *NP*, qu'il n'y en a qui s'apuyent contre *LM*. Mais puisque de toutes les sphéres que renferme un cylindre, son diaphragme n'est chargé que de la préssion de celles qui le touchent immédiatement, ainsi que nous l'avons fait voir dans les notes 3, & 4 de l'article 23 de ce Discours: il reste à examiner ici, combien la préssion totale des sphéres apuyées contre le diaphragme *NP*, dont le nombre est quadruple du nombre de celles qui s'apuyent contre le diaphragme *LM*, surpasse la préssion que les sphéres contenuës dans le cylindre *A* font sur ce méme diaphragme *LM*: le calcul en est aisé; le voici. Le rayon de chaque sphére étant réduit à la moitié par la condensation, comme on l'a dit dans l'article précédent, & les mobiles continuans à circuler sur chaque surface sphérique avec la méme vitesse après la condensation, puisqu'on supose le même degré de chaleur; il est évident, par le Théorème de l'article 16, que chacun des mobiles circulans aura une force centrifuge double de celle qu'il avoit avant la condensation, & que chaque sphére creuse réduite à la moitié de son rayon, tendra à se dilater avec deux fois plus de force. Ainsi le diaphragme *NP* étant pressé par quatre fois plus de sphéres, & chacune de ces sphéres ayant deux fois plus de force; il en resulte une pression totale contre *NP*, deux fois quatre fois, ou huit fois plus grande que celle avec laquelle l'air dans son état naturel agit sur le diaphragme *LM*. On démontrera, par le même raisonnement, que la préssion contre *NP* doit être vingt-sept fois plus forte, lorsque l'air en *B* est vingt-sept fois plus dense que n'est l'air naturel en *A*; parce que chaque sphére creuse, réduite par la condensation au tiers de son rayon, augmentera au triple l'effort avec lequel elle tend à se dilater, y ayant dans ce cas trois fois trois, ou neuf fois plus de sphéres qui agissent sur *NP*; de sorte

que

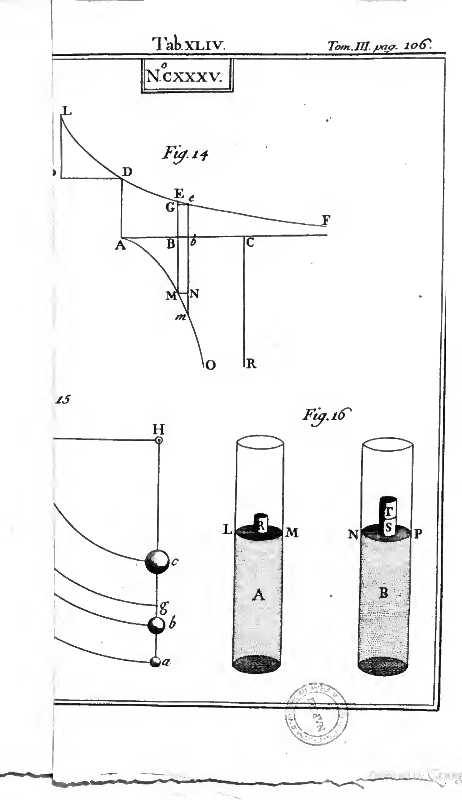
que la pression totale de l'air condensé contre *NP*, sera $3 \times 3 \times 3$, ou vingt-sept fois plus grande que celle de l'air naturel contre *LM*. La démonstration est generale, puisque les pressions suivent toujours la proportion des densitez. Mais c'est dans la force de ces pressions que consiste la force du ressort de l'air, & de toute autre fluide élastique: donc les élasticitez sont proportionnelles aux densitez. *C. Q. F. D.*

37. Dans tout ce raisonnement, j'ai fait abstraction de l'étenduë qu'auroit la matiere propre du fluide élastique, si toutes les particules qui la composent, & qui ne peuvent pas pénétrer les pores des corps, étoient ramassées en une masse solide & sans pores; ou plutôt, j'ai suposé tacitement, que toute l'étenduë de cette masse ne feroit qu'une partie infiniment petite de l'espace entier dans lequel le fluide élastique est contenu. En effet, l'air naturel étant pour le moins 15000 fois moins pesant, & par conséquent plus rare, que l'or, qui lui-même n'est pas sans pores; on peut dire que la matiere propre de l'air naturel, & des sphéres creuses qui nagent dedans, ne fait pas la quinze milliéme partie du volume qu'occupe l'air; de sorte qu'on peut bien considerer cette partie comme infiniment petite par raport à l'étenduë de son volume entier. Mais un autre fluide élastique, qui contiendroit beaucoup plus de matiere que l'air, ou l'air même extrémement condensé, demanderoit sans doute qu'on eut égard à ce que son étenduë pourroit aporter de changement à notre régle. Car soit l'espace *A* occupé par un fluide élastique, dont la matiere ramassée forme une étenduë $= b$; soit une autre espace $B = $ à A, qui tienne huit fois autant du même fluide élastique. On devroit dire, selon la définition ordinaire de la densité, que le fluide en *B* est huit fois plus dense que le fluide en *A*, mais on se tromperoit, puisqu'à proprement parler, il est plus de huit fois plus dense. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à considerer que l'espace entier *A* ou *B* étant nommé a, le volume que le fluide élastique occupe en *A* & en *B* par sa dilatation, se détermine en retranchant de l'espace entier a, ce que le fluide ramassé contiendroit d'étenduë de part & d'autre, savoir b

& $8b$: de ſorte que le volume en A, n'eſt pas a, mais $a - b$, & le volume en B, $a - 8b$; ces deux volumes ne peuvent donc pas être pris pour égaux; comme lorſqu'on ſupoſe que la matiere du fluide ne fait pas une partie finie de l'eſpace dans lequel il eſt contenu, je veux dire, que b eſt infiniment petit par raport à a; & lorſque ces volumes ſont inégaux, la véritable denſité du fluide en B, n'eſt pas à la denſité du fluide en A, comme la quantité de matiere en B, eſt à la quantité de matiere en A, ou comme 8 eſt à 1; mais en raiſon compoſée de la directe de ces quantitez, & de la raiſon inverſe des véritables volumes que le fluide élaſtique occupe de part & d'autre par ſa dilatation. Ainſi la denſité en B, eſt à la denſité en A, $= \frac{8}{a - 8b} : \frac{1}{a - b} = 8a - 8b : a - 8b$; ce qui fait une raiſon plus grande que de 8 à 1. Mais par notre démonſtration (*art. 36*) les élaſticitez ſont toujours proportionnelles aux véritables denſitez: donc la force de l'élaſticité du fluide en B, eſt à la force de l'élaſticité en A, $= 8a - 8b : a - 8b$, c'eſt-à-dire, en plus grande raiſon que 8 à 1; & en general, ſi on introduit en B une quantité de fluide élaſtique, n fois plus grande que celle qui eſt en A, on aura l'élaſticité en B à l'élaſticité en A, $= na - nb : a - nb > n : 1$; & partant en une raiſon plus grande que celle des denſitez aparentes.

38. On remarquera que quoique b ſoit plus petit que $\frac{1}{15000}a$, lorſque l'air eſt dans ſon état naturel, & que par conſéquent il ne faſſe pas une partie ſenſible de a; cependant le nombre n peut augmenter ſi fort, que nb deviendra enfin ſenſible par raport à a. C'eſt ce qui fait que l'air extrêmement condenſé a la force de ſon reſſort plus grande que ne ſemble l'exiger la denſité aparente: lorſqu'on dit donc, que les élaſticitez de l'air ſont proportionnelles à ſes denſitez aparentes; cela ne doit s'entendre que des denſitez aparentes mediocres ou moyennes, leſquelles ne different pas ſenſiblement des denſitez véritables.

39. Nous ne connoiſſons juſqu'ici que la chaleur & la condenſa-

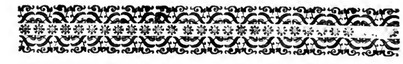

N.° CXXXV.
Fig. 14
L
D
E
e
G
F
A
B
b
C
M
N
m
O
R
15
H
c
g
b
a
Fig. 16
L
R
M
A
N
T
S
P
B

densation qui augmentent le ressort de l'air ; j'ai consideré ces causes séparément, & j'ai déterminé l'effet que chacune d'elles peut produire de son côté : Il ne sera pas difficile de déterminer présentement l'effet que ces deux causes produisent étant combinées ensemble, lorsque l'une & l'autre vient à être changée. Nous avons prouvé, que les differens degrez de chaleur causent, dans le même air, des élasticitez, qui sont comme les quarrez des intensitez de la chaleur ; & que les differentes densitez (la même chaleur supoſée) sont en simple raison des élasticitez. On trouvera donc, en composant ces deux raisons, que les élasticitez de deux volumes d'air differemment chauds & differemment denses, sont en raison composée de la raison doublée des chaleurs, & de la simple des densitez : vérité qui a lieu, tant que les densitez aparentes ne different pas sensiblement des véritables : je veux dire, tant que la compression de l'air n'est pas assez grande pour que la quantité de matiere, ramassée en une masse, fasse une étenduë comparable à l'espace où il est renfermé.

40. J'aurois pû tirer ici de mes principes diverses consequénces, qui peut-être contribuëroient à perfectionner l'usage des Thermometres, & des Barometres. La matiere est riche, & d'autant plus curieuse, qu'il ne me paroit pas qu'on ait eu jusqu'à present des idées assez nettes sur la mesure du froid & du chaud ; & si les Thermometres ordinaires marquent les variations qui arrivent à l'une & à l'autre de ces qualitez, c'est sans indiquer au juste la proportion qui regne entr'elles, ni combien l'air est plus ou moins chaud en un tems qu'en un autre. Mais cette entreprise me meneroit trop loin ; elle passe les bornes que je me suis prescrites, & ce que Messieurs de l'Académie exigent de moi. Content donc de me renfermer dans une explication probable de la cause physique du ressort, je pourrai un jour leur faire part de mes méditations, si cet Ecrit, que j'ai l'honneur de leur presenter, a le bonheur de leur plaire.

FIN.

Voyez le N°. CXLV.



N°. CXXXVI.

DE INTEGRATIONIBUS ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM,

Ubi traditur Methodi alicujus specimen integrandi sine prævia separatione indeterminatarum :

Auctore Joh. BERNOULLI.

I.

Comment. Acad. Petrop. Tom. I. pag. 167. Jun. 1726.

QUando æquatio aliqua differentialis primi gradus reducta habetur ad $pdx = qdy$, ubi p datur per x, & q per y, hoc est, meo loquendi more, ubi p & q sunt functiones qualescunque datæ indeterminatarum x & y; eo casu constructio æquationis nulla premitur difficultate, concessis nimirum quadraturis; quæ & ipsæ generaliter ad extensiones curvarum algebraïcarum non ita pridem reductæ sunt. Vid. Cel. HERMANNI Schediasma in *Actis Lips.* 1723, meumque de hac materia analytice tractanda editum in iisdem *Actis* 1724 *. Adeo ut hac in parte nihil ulterius ad majorem perfectionem desiderari videatur, nisi hoc tantum, quod, cum infinitis modis, ceu monstravimus, idem præstari possit, ille eligatur qui exhibeat curvam constructu facillimam, cujus extensione uti lubeat ad quadraturam determinandam. Hanc vero rem, utpote alius negotii, nunc non attingimus.

* N°. CXXXII. *Tom. II.* pag. 582.

II. Quod

II.

Quod si autem æquatio differentialis $pdx = qdy$ laborat indeterminatarum permixtione, id est, si utraque quantitas p & q, vel alterutra saltem, componitur diversimode ex indeterminatis x & y simul, earumque variis potentiis, atque contineant vel non contineant varia signa radicalia; id quidem est, quod hodienum crucem figit Geometris, nec quemquam novi hucusque, qui generalem invenerit Regulam (ad praxim applicabilem) integrandi ejusmodi æquationes differentiales, si integrabiles sunt: aut, si non sunt, construendi eas, sive per quadraturas, sive per rectificationes curvarum datarum: dico notanter *applicabilem ad praxin*, nam cum constructio requirat executionem, nihil pensi haberem alicujus regulæ, quæ in speculatione tantum subsisteret, re ipsa autem nullius esset usus, quæ & totam requireret hominis ætatem, si in levissimis quoque exemplis vellet eam effectui dare. Tales utique regulæ generales, vel potius regularum ideæ, etiam mihi in promtu forent, sed quas ob dictam rationem negligo.

III.

Dantur regulæ particulares, etsi omnibus casibus in suo quæque genere applicabiles, quæ cum successu adhibentur. Earum multas ac varias jam eo tempore excogitavi, quo de nascente calculo vix quisquam alius cogitabat, nedum ad ejus perfectionem animum applicabat. Inventas regulas communicavi paulo post cum amicis, partim coram, partim per litteras, præsertim cum Illustr. *Marchione* HOSPITALIO, in cujus privatam utilitatem initio a me conscriptæ Lectiones, in multorum jam manibus versantes, æque ac litteræ meæ cum ipso postea frequenter commutatæ, luculento sunt veritatis testimonio.

IV.

Inter prædictas regulas maximam universalitatem sive exten-

ſionem habet illa, quæ valet pro omnibus æquationibus differentialibus, quantæcunque dimenſionis ſint termini, modo ubique ſint homogenei; id eſt, in quibus exponentes indeterminatarum x & y ſimul ſumti eundem in quolibet termino componunt numerum, adeoque litteræ conſtantes, quæ in ejuſmodi æquationibus occurrunt, nihil aliud deſignant quam numeros coefficientes, nihilque proin contribuunt ad dimenſionum ſuppletionem. Monſtravi namque talem æquationem mutari in aliam indeterminatas ſeparabiles habentem, ſi aſſumendo novam indeterminatam z, ſubſtituatur zy pro x, & $zdy + ydz$ pro dx; vel contra zx pro y, & $zdx + xdz$ pro dy. Aut etiam quod interdum ſimpliciorem reddit æquationem, ſi pro x ſcribatur $z^n y$, atque pro dx, $z^n dy + nyz^{n-1} dz$, vel vice verſa $z^n x$ pro y, & $z^n dx + nxz^{n-1} dz$ pro dy; ita enim fit, ut, cum n ſit exponens arbitrarius, pro eo aliquis eligi poſſit, qui exhibeat æquationem tractabiliorem. Quinimo certiſſimum eſt, nihil obſtare, quo minus adhiberi queat functio quælibet ipſius z ad arbitrium formata, ponendo ex. gr. $y\sqrt{(aa+zz)}$ pro z, adeoque $dy\sqrt{(aa+zz)} + yzdz : \sqrt{(aa+zz)}$ pro dx; aut ſi mavis $x\sqrt{(aa+zz)}$ pro y, & $dx\sqrt{(aa+zz)} + xzdz : \sqrt{(aa+zz)}$ pro dy.

V.

Dantur ſane caſus, ubi talis functionum formatio utilitate ſua non caret, præcipue in illis aliquando in quibus ſigna radicalia reperiuntur: ſciendum enim regulam noſtram porrigi quoque ad eas omnes æquationes, quæ unum pluresve terminos habent ſignis radicalibus affectos. Verbi gratia, ſit propoſita æquatio inter coordinatas x & y alicujus curvæ hæc, $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, in qua indeterminatæ x & y ſunt unius dimenſionis, quia quantitas $\sqrt{(xx+yy)}$ non niſi primæ dimenſionis eſſe cenſetur; ſi itaque, ſecundum regulam noſtram, ſimpliciter ponatur zy & $zdy + ydz$ pro x, & dx, mutatur æquatio propoſita in

in hanc $dy : y + dz\sqrt{(zz+1)} : (az + z\sqrt{(zz+1)}) = 0$ quæ quidem non amplius laborat indeterminatarum permixtione; at vero irrationalitas adhuc ineſt, quæ nondum permittit videre, annon forſan ex differentialibus logarithmicis componatur æquatio, unde illa per integrationem ad terminos finitos deinceps reduci poſſit.

V I.

Quamobrem præſtat ut ſcribam pro x productum ipſius y per convenientem aliquam functionem ipſius z ad aſymmetriam tollendam; in hunc finem, pono ex. gr. $x = y\sqrt{(zz-1)}$ ac proinde $dx = dy\sqrt{(zz-1)} + yzdz : \sqrt{(zz-1)}$; quibus ſubſtitutis in æquatione propoſita $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, convertetur illa in hanc $(z^3 + azz - z - a)dy + yzzdz = 0$, quæ per diviſionem reducta dat hanc alteram, $dy : y + zzdz : (z^3 + azz - z - a) = 0$, ab omni irrationabilitate immunem: Reſolvitur vero poſterius membrum $zzdz : (z^3 + azz - z - a)$ in differentialia logarithmica, per methodum quam communicavi in *Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris.* an. 1702, * & in *Actis Lipſ.* an. 1703: Cum enim denominator hujus fractionis $z^3 + azz - z - a$ conſtet ex iſtis tribus factoribus $z + a$, $z + 1$ & $z - 1$, faciendum eſt ex præſcripto illius methodi $zzdz : (z^3 + azz - z - a) = \alpha dz : (z + a) + \beta dz : (z+1) + \gamma dz : (z-1)$; tum quærendi valores litterarum α, β, γ, qui reperientur eſſe $\alpha = aa : (aa - 1)$, $\beta = -1 : (2a - 2)$; $\gamma = 1 : (2a + 2)$. Quare æquatio noſtra $dy : y + zzdz : (z^3 + azz - z - a) = 0$ ſeu $dy : y + \alpha dz : (z + a) + \beta dz : (z + 1) + \gamma dz : (z - 1) = 0$ [ſubſtitutis valoribus ipſarum α, β, γ & dein ſingulis terminis in $2aa - 2$ ductis] abibit in hanc æquationem $(2aa - 2)dy : y + 2aadz : (z + a) - (a + 1)dz : (z + 1) + (a - 1)dz : (z - 1) = 0$, in differentialibus logarithmicis expreſſam; quæ integrata, ut olim docuimus, reddit $(2aa - 2)ly + 2aal(z + a) - (a + 1)l(z + 1) + (a - 1)l(z - 1) = lC$, ubi per lC intelligo logarithmum

* N°. LXX. *Tom.* I. *pag.* 393.

rithmum quantitatis conſtantis pro lubitu aſſumtæ ; reducendo igitur, ut moris eſt, logarithmos ad potentias, acquiritur æquatio finita, ſeu in terminis finitis expreſſa, $y^{(2aa-2)} \times (z+a)^{2aa} \times (z+1)^{(-a-1)} \times (z-1)^{(a-1)} = C$. Nunc vero, ut in coordinatis x & y exprimatur, reſtituendus eſt valor ipſius z; qui ex hypotheſi aſſumta $x = y\sqrt{(zz-1)}$, eſt $= \sqrt{(xx+yy)}:y$; hinc enim emergit

$$y^{(2aa-2)} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}+ay}{y}\right)^{2aa} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}+y}{y}\right)^{(-a-1)} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}-y}{y}\right)^{(a-1)} = C;$$

vel quia in denominatoribus habetur y elevata ad $2aa$, ad $-a-1$, & ad $a-1$, quarum ſumma $= 2aa-2$, patet tres iſtos denominatores y deſtrui per alteram y fractionibus præmiſſam, ita ut tandem hæc prodeat æquatio naturam curvæ determinans, $(\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{2aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}+y)^{(-a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}-y)^{(a-1)} = C$. Quæ ſi dextre tractetur ulterius reduci poteſt in iſtam $x^{(a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}+y)^{-a} = C$; vel etiam in hanc $x^{(-a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}-y)^{a} = C$. Ubi recordandum, per litteram C intelligi perpetuo conſtantem arbitrariam in omnibus æquationibus ſumendam, vel eandem, vel diverſam, prout libuerit; quod in ſequentibus etiam, ſicubi reperietur, monitum volo.

V I I.

Singularis caſus conſiderandus hic venit, exiſtente nimirum $a = 1$, quo fit ut duo priores factores in prima æquatione, qui jam erunt $(\sqrt{(xx+yy)}+y)^2$ & $(\sqrt{(xx+y)}+y)^{-2}$ ſe mutuo deſtruant, & tertius $(\sqrt{(xx+yy)}-y)^{0}$ evadat $= 1$, unde tota æquatio foret $1 = C$; ſic pariter ſecunda & tertia, ex prima æquatione deductæ, in caſu $a = 1$, abirent in $1 = C$, quod eſſet abſurdum; unitas enim non poteſt eſſe æqualis quantitati arbitra-

arbitrariæ C. Quæritur itaque, quid jam sit statuendum, utrum in hoc casu nulla satisfaciat curva æquationi propositæ, quæ jam est $x\,dy + dx\,\surd(xx+yy) = 0$, aut si aliqua satisfafaciat, quomodo illa determinetur? Hunc scrupulum ut tollam, dico, incommodum istud ex eo venire, quod in præced. §, æquatio $dy:y + \alpha\,dz:(z+a) + \beta\,dz:(z+1) + \gamma dz:(z-1) = 0$ multiplicata fuerit per $2aa - 2$, h. e. per 0, in hoc casu, unde totam æquationem evanescere necesse est. Ut igitur hoc evitemus, notandum est quantitatem $zzdz:(z^3 + azz - z - a)$, quam æqualem supposuimus hisce fractionibus $\alpha dz:(z+a) + \beta dz:(z+1) + \gamma dz:(z-1)$, continere in se aliquid absolute integrabilis quando $a = 1$; illa igitur non potest supponi constare ex meris differentialibus logarithmicis. Quod autem contineat partem aliquam integrabilem, ex eo patet, quod denominator fractionis, qui jam est $z^3 + zz - z - 1$, constet ex duobus factoribus $zz + 2z + 1$, & $z - 1$, quorum ille est quadratum perfectum; unde $dz:(zz+2z+1)$ fiet integrabile, est enim ejus integrale $= -1:(z+1)$, Oportet itaque, ceu monui in præmemoratis *Commentariis Paris.* 1702, pag. 290. Edit. Paris †. separare ex quantitate $zzdz:(z^3+zz-z-1)$ illud quod est integrabile, & tum procedere secundum regulam; quod utrumque simul sic perago: Pono statim $zzdz:(z^3+zz-z-1) = \alpha dz:(z+1) + \gamma dz:(z-1) + \pi dz:(zz+2z+1)$, quibus reductis ad communem denominatorem $z^3+zz-z-1$, habebo æqualitatem inter numeratorem zz & summam trium reliquorum, quæ erit $(\alpha+\gamma)zz + (2\gamma+\pi)z + (\gamma - \pi - \alpha)$; instituta comparatione terminorum, faciendo $\alpha + \gamma = 1$, $2\gamma + \pi = 0$, $\gamma - \pi - \alpha = 0$, invenietur, $\pi = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$. His ita inventis integrentur, ut olim monstravimus, termini æquationis $dy:y + zzdz:(z^3+zz-z-1) = 0$ & prodibit $ly + \frac{3}{4}l(z+1) + \frac{1}{4}l(z-1) + 1:(2z+2) = lC$, seu $4ly + 3l(z+1) + l(z-1) = -2:(z+1) + lC$; hinc ergo, considerando unitatem tanquam logarithmum numeri alicujus qui vocetur n, habebitur $y^4 \times (z+1)^3$.

† *Tom.* I. pag. 393.

$\times (z-1)^1 = C \times n^{-2:(z+1)}$, quæ, ſubſtituto pro z ejus valore $\sqrt{(xx+yy)}:y$, & reductis reducendis, ut ſupra factum, deſinit in iſtam $(\sqrt{(xx+yy)}+y)^1 \times (\sqrt{(xx+yy)} - y)^1 = C \times n^{-2y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$, transmutabilem porro in $(\sqrt{(xx+xyy)}+y) \times x = C \times n^{-y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$, vel etiam non minus ſimplici modo in $(\sqrt{(xx+yy)}-y)^{-1} \times x^1 = C \times n^{-y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$; quarum autem quælibet ſi evolvatur, & homogeneitatis gratia ſcribatur $bbRR$ pro quadrato quantitatis exponentialis, hanc induit faciem $x^4 \pm 2bRyx - bbRR = 0$. Aio igitur hanc æquationem $x^4 \pm 2bRyx - bbRR = 0$ oriri ex vera integratione hujus differentialis $xdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$; quod confirmabitur a poſteriori, ſi nimirum illa differentietur & quod provenit cum hac comparetur. Unde videmus curvam propoſitæ æquationi ſatisfacientem non eſſe algebraïcam, ſed exponentialem, & ita quidem, ut ipſæ indeterminatæ ingrediantur exponentem, qua in re differt ab omnibus aliis caſibus particularibus æquationis generaliter propoſitæ $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$; utpote quæ in quovis alio caſu ſemper admittit curvam aliquam algebraïcam, modo a ſit rationalis; aut ſi a non eſt rationalis, erit quidem curva exponentialis, ſed exponentem nulla quantitas variabilis (ſicuti in caſu $a = 1$) ingreditur, cujuſmodi curvæ dici poſſunt algebraïcis proximæ.

VIII.

Paulo fuſior fui quam forſan neceſſe videbatur in diſcuſſione hujus exempli, quod, cum olim *Lutetiæ* agerem, multum agitabatur inter Geometras ejus loci, ex occaſione Problematis *Beauniani*, mihi tunc quoque cum aliis ab HOSPITALIO propoſitum atque feliciter ſolutum, poſtquam a Geometris inſolutum ad me perveniſſet. Fuſior igitur in hoc fui, ut fieret manifeſtum, qua dexteritate evitari poſſit ingens aliquando calculus

culus, in quem intricaremur, si regulas generales, prout primo intuitu se offerunt, sine ulla circumspectione sequi vellemus. Præterquam quod multoties accidat, ut credamus curvas, quæ prodeunt per incautam regularum applicationem, esse transcendentes, nonnisi per quadraturas aut rectificationes construibiles, quæ tamen si rite tractentur evadunt algebraïcæ aut saltem exponentiales, hoc est, tales quæ sunt finitæ & non aliter transcendentes quam ex sola exponentium irrationalitate. Quis enim prima fronte non crederet, æquationem supra §. 5 expressam $dy : y + dz\sqrt{(zz+1)} : (az + z\sqrt{(zz+1)}) = 0$, quæ oritur ex suppositione $x = zy$, deducere ad curvam transcendentem? nisi ante omnia id curet, ut sublata irrationalitate $\sqrt{(zz+1)}$ per methodum *Diophanteam* acquirat fractionem rationalem; quam deinde, per nostram methodum in §. 6 traditam, in differentialia logarithmica resolvat: sed & hic processus operosi foret calculi; quare tutissimum erit ut statim ab initio dispiciatur, prout exempli cujusque natura exigit, de commoda aliqua functione assumtæ z substituenda in locum alterutrius indeterminatarum x vel y, quo immediate preveniatur ad æquationem rationalem & simplicem, sicuti hic factum vidimus, ubi sola substitutione $y = x\sqrt{(zz-1)}$ obtinuimus hæc tria simul, nempe indeterminatarum separationem, rationalitatem terminorum, & maximam possibilem æquationis simplicitatem $dy : y + zzdz : (z^3 + azz - z - a) = 0$.

IX.

Pergo ad methodum a me inventam integrandi æquationes differentiales, sine adhibita indeterminatarum separatione, aliave ulla earum in alias transmutatione per substitutionem facienda; loquor hic de illis æquationibus $pdx + qdy = 0$, in quibus p & q designant functiones rationales & homogeneas indeterminatarum x & y utcunque inter se complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatæ in singulis terminis eandem habeant exponentium summam, propter quod functiones, quæ ita sunt

 compa-

comparatæ, ipſaſque æquationes differentiales ex illis compoſitas, voco *homogeneas*.

X.

Poſtquam ejuſmodi æquationes a fractionibus liberatæ ſunt, ope multiplicationis, erunt illæ ordinis vel primi, vel ſecundi, vel tertii, vel cujuſcunque altioris; voco autem *ordinem primum*, *ſecundum*, *tertium* &c. ubi exponentium ſumma in quolibet termino obtinet dimenſionis gradum primum, ſecundum, tertium &c. His ita definitis, formo ſequentem Tabellam, quæ conſpectui offert ordines æquationum canonicarum. Per *æquationem canonicam* intelligo talem, quæ omnes æquationes particulares alicujus ordinis in ſe complectitur, ope coefficientium univerſalium ſingulis terminis præfixorum.

TABELLA ÆQUATIONUM CANONICARUM DIFFERENTIALIUM.

I. $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0.$

II. $(axx + bxy + cyy)dx + (exx + fxy + gyy)dy = 0.$

III. $(ax^3 + bxxy + cxyy + ey^3)dx + (fx^3 + gxxy + hxyy + iy^3)dy = 0.$

IV. $(ax^4 + bx^3y + cxxyy + exy^3 + fy^4)dx + (hx^4 + ix^3y + kxxyy + mxy^3 + ny^4)dy = 0.$

V. $(ax^5 + bx^4y + cx^3yy - - - + hy^5)dx + (ix^5 + kx^4y + mx^3yy - - - + qy^5)dy = 0.$

X I.

Ex hac Tabella patet, æquationem canonicam cujuſque ordinis tot habere terminos præfixos ipſi dx, totidemque præfixos ipſi dy, quot habet unitates numerus ordinis unitate auctus. Sic æquatio ordinis primi, habet terminos utrobique duos; ordinis ſecundi, terminos tres; tertii, quatuor; quarti, quinque; & ita porro: Itaque in ordine primo ſunt coefficientes univerſales quatuor, in ſecundo ſunt ſex, in tertio octo, in quarto decem &c. Jam dico has omnes æquationes poſſe integrari ſeu reduci ad æquationes finitas, exprimentes naturam linearum, quæ ſingulæ conveniunt ſuis reſpective æquationibus cano-

canonicis differentialibus. Istæ vero æquationes finitæ erunt semper algebraïcæ vel saltem exponentiales, prout exponentes indeterminatarum fuerint vel rationales, vel irrationales. Quandoquidem igitur æquationes canonicæ in hac Tabella continuanda comprehensæ, includunt omnes quæ dari possunt æquationes differentiales homogeneas & rationales; liquet, si ostendero modum canonicas integrandi, rem generaliter confectam fore pro quacunque ejusmodi æquatione differentiali integranda, sine prævia indeterminatarum separatione. Hoc vero est, quod jam docere volo.

XII.

In antecessum notare convenit, cuicunque æquationi differentiali homogeneæ, sive sit rationalis, sive irrationalis, satisfacere lineam aliquam rectam, id quod ex eo patet, quia, si ponatur $y = nx$, adeoque $dy = ndx$ (assumto coefficiente invariabili n), iique valores pro y & dy in æquatione differentiali surrogentur, prodibit utique æquatio quæ divisa per dx, & per potentiam ipsius x, cujus exponens est ipse ordinis index, dabit æquationem algebraïcam, ab indeterminatis liberam, inter cognitas a, b, c, &c. & incognitam n, ejusque varias dimensiones; unde supposita radicum extractione ex æquationibus algebraïcis; erit illius æquationis radix n coefficiens quæsitus in nx, quod ipsi y æquale ponebatur.

XIII.

Ut res exemplo illustretur, capiamus æquationem differentialem canonicam ordinis secundi $(axx + bxy + cyy)dx + (exx + fxy + gyy)dy = 0$, atque in ea substituamus nx pro y, $nnxx$ pro yy, & ndx pro dy. Quo facto habebitur $(axx + nbxx + nncxx)dx + (exx + nfxx + nngxx)ndx = 0$; Dividendo igitur per $xxdx$, ac more solito secundum ordinem dimensionum incognitæ n disponendo, resultat æquatio cubica

$gn^3 + (f + c)nn + (e + b)n + a = 0$, cujus radix n ducta in x dabit valorem ipsius y. Adeoque si construatur triangulum rectangulum (supposito coordinatas angulum rectum facere) cujus basis ad cathetum habeat rationem ut 1 ad n, dico hypothenusam hujus trianguli, in utramque partem prolongatam, esse lineam satisfacientem æquationi differentiali canonicæ ordinis secundi, cujus coordinatæ sunt parallelæ basi & catheto.

XIV.

Loco alterius exempli ex homogeneis irrationalibus sit æquatio in §. 5 proposita $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$. Ubi si ponatur $nnxx$ pro yy, & ndx pro dy, ac postea dividatur per xdx; emerget $na + \sqrt{(1+nn)} = 0$, quæ resoluta dat $n = 1 : \sqrt{(aa - 1)}$. Facto itaque triangulo cujus basis ad cathetum sit ut 1 ad $1:\sqrt{(aa-1)}$, hoc est, ut $\sqrt{(aa-1)}$ ad 1, erit hypothenusa utrimque prolongata conveniens linea æquationi differentiali propositæ $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = 0$, ejusque coordinatæ lateribus parallelæ. Si $a = 1$, abit hypothenusa in rectam applicatis parallelam, abscissæ vero evanescunt. Hicque casus omnino fluit ex æquatione ad curvam quam supra §. 7 invenimus $x^4 \pm 2bR)x - bbR^2 = 0$, faciendo enim b (quia est arbitraria) $= 0$, habetur $x^4 = 0$, adeoque $x = 0$.

XV.

Propero nunc ad methodum eruendi quoque lineas curvas, æquationibus canonicis differentialibus cujusque ordinis respondentes, h. e. integrandi illas æquationes universaliter, idque sine interventu separationis indeterminatarum. Hoc ut præstetur, formanda est æquatio finita, in quam ingrediantur tot litteræ assumtitiæ constantes, quot sunt termini in æquatione canonica integranda, & quæ differentiata easdem cum hac obtineat dimensiones indeterminatarum x & y. Illa autem æquatio finita talem (ceu cuilibet attendenti haud ægre patescit) habere debet formam $(x+\alpha y)^\pi \times (x+\beta y)^\tau \times (x+\gamma y)^\varsigma \times (x+\epsilon y)^\varphi \times \&c. = C$, ut

ut nimirum constituatur productum ex factoribus binomialibus $x+\alpha y$, $x+\beta y$, $x+\gamma y$, $x+\epsilon y$ &c. ad potentias π, τ, ρ, ϕ &c. elevatis, quod æquale fiat quantitati constanti C, ubi coefficientes α, β, γ, ϵ, ut & exponentes π, τ, ρ, ϕ, &c. sunt assumtitii per calculum investigandi. Quod attinet ad numerum factorum horum binomialium, assumendi sunt duo pro canonica primi ordinis, tres pro canonica secundi ordinis, quatuor pro canonica tertii ordinis, atque ita consequenter. Hoc nempe pacto fit, ut tot simul habeantur assumti coefficientes & exponentes, quot sunt termini in proposita æquatione canonica. Unde differentiando, cum in modum quem statim exponam, assumtam æquationem formatam ex factoribus binomialibus, prodibit æquatio differentialis ejusdem ordinis, & tot præcise terminorum quot canonica habet; adeo ut totidem institui possint comparationes inter utriusque terminorum coefficientes, quæ determinabunt assumtos coefficientes & exponentes, ipsamque adeo æquationem finitam, quæ desideratur, pro data canonica differentiali.

X V I.

Dabo exemplum unicum & quidem omnium facillimum, quod abunde illustrabit methodum: Sit æquatio canonica primi ordinis $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$ integranda, cui suppono convenire hanc æquationem finitam $(x+\alpha y)^{\pi}+(x+\mathfrak{G}y)^{\tau}=C$; indagandi ergo sunt valores litterarum α, $\mathfrak{G}$, π, τ. Hoc ut commode fiat, sumo, priusquam differentietur, logarithmos assumtæ æquationis finitæ, & habebo $\pi l(x+\alpha y)+\tau l(x+\mathfrak{G}y)=lC$, quæ postea more solito differentiata mihi dat $(\pi dx+\alpha\pi dy):(x+\alpha y)+(\tau dx+\mathfrak{G}\tau dy):(x+\mathfrak{G}y)=dlC=0$; seu peracta reductione, multiplicando scilicet per crucem, ut denominatores tollantur, $(\pi+\tau)xdx+(\mathfrak{G}\pi+\alpha\tau)ydx+(\alpha\pi+\mathfrak{G}\tau)xdy+(\alpha\mathfrak{G}\pi+\alpha\mathfrak{G}\tau)ydy=0$. Itaque hanc inter & canonicam $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$ instituenda est comparatio terminorum similium, ad determinandos coefficientes & exponentes assumtos α, $\mathfrak{G}$, π, τ; unde hæ quatuor emergent æqualitates

litates $\pi+\tau=\alpha$, $\beta\pi+\beta\tau=b$, $\alpha\pi+\beta\tau=c$, $\alpha\beta\pi+\alpha\beta\tau=e$. Computo jam recte instituto, reperientur valores optati tam coefficientium quam exponentium, quemadmodum sequitur, scilicet

$$\alpha=(b+c-\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}):2a$$
$$\beta=(b+c+\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}):2a$$
$$\pi=(ab-ac+a\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}):2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$$
$$\tau=(-ab+ac+a\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}):2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$$

Ubi notandum, posse hos valores simplicius exprimi, reducendo nempe x in utroque factore binomiali ad communem denominatorem $2a$, & hunc postea omittendo; sicuti etiam dividendo exponentes inventos per communem quantitatem $a:2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$. Liquet enim, si $(x+\alpha y)^{\pi}\times(x+\beta y)^{\tau}$ fuerit $=$ constanti, fore etiam $(2ax+2a\alpha y)^{\pi:n}\times(2ax+2a\beta y)^{\tau:n}$ $=$ constanti. His ita monitis, & scripto brevitatis gratia m pro $\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$, atque C majusculo pro quantitate constanti arbitraria, dico hanc æquationem finitam $(2ax+(b+c-m)y)^{(b-c+m)}\times(2ax+(b+c+m)y)^{(-b+c+m)}=C$, esse integralem æquationis differentialis canonicæ primi ordinis $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, omnes possibiles casus particulares hujus ordinis in se complectentis. Potest vero inventa illa æquatio finita mutari in hanc formam, adhibita aliqua dexteritate, $(axx+byx+cyx+eyy)^{(-b+c+m)}\times(2ax+(b+c+m)y)^{(2b-2c)}$ $=C$, vel in hanc aliam nonnihil diversam $(axx+byx+cyx+eyy)^{(b-c+m)}\times(2ax+(b+c+m)y)^{(-2b+2c)}=C$.

XVII.

CORÖLL. I. Hinc si $b=c$, erit tunc in prima æquatione inventa, neglecto communi exponente m utriusque factorum, $(2ax+(2b-m)y)\times(2ax+(2b+m)y)=C$; hoc, est multipli-

multiplicatione actualiter peracta, erit $4aaxx + 8abxy + (4bb - mm)yy = C$, sive, restituto valore ipsius mm & dein per $4a$ diviso, proveniet $axx + 2bxy + eyy = C$, quod idem etiam ex duabus mutatis provenit; sicuti omnino provenire debet per vulgarem integrandi modum, qui hoc in casu locum habet, cum enim nunc sit $axdx + b(ydx + xdy) + eydy = 0$, cujus singulæ partes sunt integrabiles; integrentur ergo, & erit duplum sumendo, $axx + 2byx + eyy = C$; ut modo habuimus.

XVIII.

Coroll. II. Esto jam alterutra a vel $e = 0$; erit $m = l + c$, quo substituto in prima nostra æquatione mutabitur illa [posito $e = 0$] in hanc $x^b \times (ax + by + cy)^c = C$, vel [posito $a = 0$] in hanc $y^c \times (bx + cx + ey)^b = C$. Idem dant duæ reliquæ, in quas prima illa mutata fuit.

XIX.

Coroll. III. Si $m = 0$, hoc est si $bb + 2bc + cc = 4ae$; prima nostra generalis æquatio finita respondens differentiali canonicæ primi ordinis, migraret in hanc quæ absurdum quid contineret $(2ax + (b + c)y)^{b-c} \times (2ax + (b + c)y)^{-b+c} = C$. Quia enim factores nunc sunt æquales, exponentes vero, utpote alter alterius negativus, se mutuo destruunt, haberetur $(2ax + (b + c)y)^0 = C$, sive $1 = C$, id est, unitas = quantitati arbitrariæ; quod utique esset absonum & nihil indicaret; idemque etiam ex reliquis duabus emergeret. Quocirca cautela aliqua hic opus est, ne quis credat nullam prorsus in hoc casu dari æquationem inter coordinatas x & y. Sic itaque statuo. Fingamus loco exponentis o haberi exponentem generalem p, ita ut sit $(2ax + (b + c)y)^p = C$; atque cum C denotet quantitatem arbitrariam, vocetur illa C^p; eritque $(2ax +$

$((b+c)y)^p = C^p$, unde extracta radice exponentis p, fiet $2ax + (b+c)y = C$; hoc autem valet qualiscunque sit p, ergo etiam quando $p=0$. Proinde dico, æquationem $2ax+by+cy=C$ satisfacere in casu quo $m=0$, seu quo $bb+2bc+cc=4ae$. Atqui hoc ita se habere apparebit, si in æquatione $(ax+by)dx + (cx+(bb+2bc+cc)y:4a)dy=0$, pro x, & dx, ponantur eorum valores ex æquatione inventa eliciti, $-(b+c)y:2a$ & $-(b+c)dy:2a$; etenim evanescet, ut fieri debet, æquatio proposita $(ax+by)dx+(cx+(b+c)^2y:2a)dy=0$. Hinc videmus, nullam lineam curvam huic casui inservire, sed rectam tantum ex hac æquatione $2ax+by+cy=0$ describendam. Quæ eadem quoque reperitur, si adhibetur regula in §. 12 tradita pro determinandis lineis rectis, quas in universum omnes æquationes canonicæ admittunt, ut ibidem ostendi.

X X.

Coroll. IV. Quod si quatuor coefficientes a, b, c, e sint proportionales, adeoque si $ae=bc$ in hoc casu erit $m=b-c$; id quod quamlibet ex tribus nostris æquationibus finitis mutat in $(2ax+2cy)^{2b-2c}=C$, vel neglecto exponente, in $ax+cy=C$, quæ iterum est ad lineam rectam. Quod quidem immediate colligi potest ex proposita æquatione differentiali, quæ in præsenti casu est $(ax+by)\,dx+(cx+bcy:a)dy=0$ divisibilis per $ax+by$; prodit enim $dx+cdy:a=0$, seu $adx+cdy=0$; adeoque integrando, erit $ax+cy=C$, ut ante. Et hic quidem casus, cum altero §i præcedentis sunt fortasse soli, qui per solas lineas rectas solvi possunt, omnemque adeo curvam excludunt.

X X I.

Coroll. V. Cum in æquatione canonica indeterminatæ x, y, earumque differentiales dx, dy, simili gaudeant habitu & relatione inter se invicem; manifestum est posse mutari æquationem finitam in aliam æquipollentem, scribendo tantum in illa

illa y pro x, e pro a, c pro b, & vice versa. Quo facto prima nostra æquatio finita $(2ax+by+cy-my)^{b-c+m} \times (2ax+by+cy+my)^{-b+c+m} = C$, induet hanc aliam formam, licet reipsa non diversam $(2ey+bx+cx-mx)^{c-b+m} \times (2ey+bx+cx+mx)^{-c+b+m} = C$. Quod verum esse comperietur, si utraque differentietur eo modo, quo usi sumus in §. 16, reducendo nempe ad logarithmos ante differentiationem. Ita quoque reliquæ duæ in has æquipollentes permutantur, $(axx+byx+cyx+eyy)^{b-c+m} \times (2ey+(b+c-m)x)^{-2b+2c} = C$; & $(axx+byx+cxy+eyy)^{-b+c+m} \times (2ey+(b+c+m)x)^{2b-2c} = C$.

XXII.

COROLL. VI. Illud quoque notatu dignum reputo, quod omnes curvæ, quæ respondent æquationibus nostris finitis, habent areas suas quadrabiles, uno tantum casu excepto, quando scilicet $b=c$. Quod sane pro paradoxo haberi posset, nisi res admodum facile demonstraretur ex ipsa æquatione canonica $(ax+by)\,dx+(cx+ey)\,dy=0$ apte disposita. Liquet enim, illam ita posse ordinari, $axdx+cydx+cxdy+eydy=(c-b)\,ydx$, ut integrabilis fiat per partes prioris membri, alterum vero designet elementum areæ ydx in $c-b$ ductum; integrando itaque per partes prodibit $\frac{1}{2}axx+cxy+\frac{1}{2}eyy=(c-b)\int ydx+C$, unde $\int ydx$, seu area curvæ, erit $=(axx+2cxy+eyy-2C):(c-b)$ & proinde quadrabilis, præterquam in casu $c=b$, in quo haberetur $=\infty$, hoc est $=$ infinito, quod ipsum inditio est in illo casu aream curvæ esse inquadrabilem; etiamsi hoc jam concludi possit ex ipsa æquatione ad curvam, quam in §. 17 hanc esse invenimus $axx+2bxy+eyy=0$; & quæ, si examinetur, ad hyperbolam vel ellipsin spectare observabitur.

XXIII.

SCHOLIUM. Ex hoc, quod ad longum deduximus, ſpecimine pro integranda æquatione canonica primi ordinis, ſine præcedanea indeterminatarum ſequeſtratione, nemo non videt, methodum eſſe generalem pro quocunque ordine, aſſumendo pro ſecundo ordine hanc æquationem $(x+\alpha y)^{\pi} \times (x+\beta y)^{\tau} \times (x+\gamma y)^{\varrho} = C$; pro tertio hanc $(x+\alpha y)^{\pi} \times (x+\beta y)^{\tau} \times (x+\gamma y)^{\varrho} \times (x+\varepsilon y)^{\Phi} = C$, & ita pro cæteris; ſic enim fiet, ut pro quolibet ordine tot reperiantur litteræ aſſumtitiæ α, β, γ, ε, &c. π, τ, ϱ, Φ, &c. quot ſunt coefficientes in æquatione differentiali canonica illius ordinis, atque hoc modo obtineantur totidem æqualitates ad determinandos tam coefficientes α, β, γ, ε, &c. quam exponentes π, τ, ϱ, Φ, &c. In altioribus evadit calculus operoſior quidem, ac propterea moleſtior; ſed ideo methodus haudquaquam difficilior, quippe quæ uniformis eſt in omnibus.

N°. CXXXVII.

THEOREMATA SELECTA,

Pro conſervatione virium vivarum demonſtranda & experimentis confirmanda.

Auctore Joh. BERNOULLI.

Excerpta ex Epiſtolis datis ad filium Danielem, 11. *Oct.* & 20. *Dec.* (*ſtil. nov.*) 1727.

THEOREMA I.

Comment. Acad. Petrop. Tom. II. pag. 200.

VElocitas aquæ per foramen valde parvum in fundo vaſis exilientis, tanta eſt, quantam grave acquirit libere cadendo ex altitudine aquæ ſupra foramen. *

* Videatur Nrus CXLIX.

THEO-

THEOREMA II.

Sit curva data CbB, (*fig.* 1.) per quam descendat grave B post se in altum trahens aliud grave minus A, ope funiculi ACB trochleam C ambientis. Quæruntur velocitates ponderum A & B? TAB. XLV. *Fig.* 1.

Sit $CB = x$, $EB = y$, earum differ. $Bn = dx$, $Bo = dy$, $Bb = ds$, altitudo verticalis TV, per quam grave liberum cadens celeritatem acquirit, quam mobile B habet $= t$, erit $t = ds^2 (By - Ax) : (Bds^2 + Adx^2)$. Haud difficilius est Problema, si etiam grave A super curva aliqua data moveatur *.

THEOREMA III.

Sit tubus cylindricus ACBH (*fig.* 2.) utrobique apertus atque inflexus in duo crura BA & CH ad partem horizontalem BC; sit sinus anguli $ABC = p$, & sinus anguli $HCB = q$, existente nimirum sinu toto $= 1$. Sit porro ille tubus aqua plenus usque ad horizontalem MN, voceturque L longitudo partis tubi MBCN aqua plenæ. Erunt agitati liquoris in hoc tubo oscillationes, tam majores, quam minores, omnes tautochronæ atque ejusdem durationis cum oscillationibus minimis penduli alicujus simplicis, cujus longitudo $= L : (p + q)$. TAB. XLV. *Fig.* 2.

COROLL. Si anguli ABC & HCB sunt recti, qui unicus casus est a NEWTONO solutus, erit longitudo penduli simplicis, quod oscillanti aquæ isochronum est, $= \frac{1}{2} L$, ut invenit NEWTONUS.

THEOREMA IV.

Chorda musica, datæ longitudinis & ponderis, tensa a dato pondere, invenitur facere vibrationes, quemadmodum definit TAYLORUS in *Transactionibus Londin.*

* Vid. Ni. CXLIV, CXLV.

THEOREMA V.

TAB. XLV. Fig. 3. Sit jam chorda ALB (*fig.* 3) craſſitiei & ponderis expers, onerata in medio ponduſculo dato perexiguo L, tenſa autem dato pondere P magno: dico numerum vibrationum hujus chordæ, durante una oſcillatione penduli datæ longitudinis D, fore $= 2\sqrt{(D \times P : AB \times L)}$.

THEOREMA VI.

TAB. XLV. Fig. 4. Iisdem poſitis ſit chorda AB (*fig.* 4.), onerata duobus ponduſculis æqualibus & æquidiſtantibus, cum a ſe invicem tum ab extremitatibus A & B. Vocetur unumquodque ponduſculorum $\frac{1}{2}L$: dico fore numerum vibrationum (oſcillante ſemel pendulo dato D) $= \sqrt{(6D \times P : AB \times L}$.

THEOREMA VII.

Si, manentibus reliquis, ſint tria ponduſcula ſingula $= \frac{1}{3}L$; erit numerus vibrationum chordæ $= 2\sqrt{((6 - 3\sqrt{2})D \times P : AB \times L)}$. Si ponduſcula ſint quatuor ſingula $= \frac{1}{4}L$, erit numerus vibrationum, quem vocabo $N = 2\sqrt{((5 - \sqrt{5})D \times P : (5 + \sqrt{5}) \times \frac{1}{5}AB \times L)} = 2\sqrt{((25 - 5\sqrt{5})D \times P : (5 + \sqrt{5})AB \times L)}$. Si fuerint quinque ponduſcula, quorum unumquodque $= \frac{1}{5}L$, habebitur $N = \sqrt{((60 - 30\sqrt{3})D \times P : AB \times L)}$. Sint tandem ponduſcula ſex, ſingula $= \frac{1}{6}L$, erit $N = \sqrt{((42xx - 126ax + 168aa)D \times P : (2xx + ax + aa)AB \times L)}$, ubi notandum, per a me intelligere numerum quemlibet pro lubitu aſſumtum, atque tum x eſſe radicem hujus æquationis $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$. Eadem methodo, quam habeo, progredi poſſum ad determinandos numeros vibrationum pro pluribus ponduſculis, quibus chorda onerata ſupponi poteſt: ſed pergo ad alia *.

De gravibus rotando deſcendentibus in plano inclinato, vel in

* Vid. Nus. CXL.

in curva aliqua, vel etiam verticaliter ſuſpenſis ex filis circa axes circumvolutis ſeſe evolvendo, ſequentia habe.

THEOREMA VIII.

Sit grave aliquod cujuſcunque figuræ BFG, (*Fig.* 5.) cujus centrum gravitatis ſit C, ex quo & radio CA deſcriptus AHL circulus repræſentet axem, cui circumvolutum intelligatur filum aliquod, ſecundum ordinem litterarum EALHALHAL &c. Ipſum vero grave ſua gravitate deſcendere concipiatur, id quod fieri non poteſt niſi rotando, dum nimirum axis ex filo ſeſe evolvit hoc litterarum ordine AHLAHL. Quæritur, poſtquam ex altitudine EA quacunque deſcenderit grave, quanta ſit velocitas centri C? TAB. XLV. Fig. 5.

SOLUTIO. Vocetur *D* diſtantia centri oſcillationis figuræ rotantis a puncto ſuſpenſionis, quod ubicunque in circumferentia AHL ſumi poteſt. Sit radius CA $= a$; EA altitudo verticalis, per quam grave rotando deſcendit, $=$ R; altitudo quæſita per quam grave aliquod liberum deſcendere debet, ut acquirat velocitatem æqualem illi quam habet gravis rotantis centrum gravitatis *C*, $= z$; dico fore $z = aR : D$.

COROLL. 1. Si grave BFG eſt circumferentia circuli, vel ſuperficies cylindrica, cujus radius CB $= b$, erit $z = aaR : (aa + bb)$.

COROLL. 2 Si vero ſit ipſe circulus vel cylindrus, erit $z = 2aaR : (2aa + bb)$.

COROLL. 3. Si ſit ſuperficies ſphærica, habebitur $z = 3aaR : (3aa + 2bb)$.

COROLL. 4. Et tandem ſi ſit globus gravis, fiet $z = 5aaR : (5aa + 2bb)$.

Notandum, in his omnibus, poni axem AHL gravitatis expertem.

SCHOLION. Poſſent experimenta inſtitui, ut pateret an centrum C haberet velocitatem, quam hic aſſignavimus, quo ipſo cuilibet manifeſta fieret conſervatio virium vivarum, cum præ-

præſertim pro lubitu temperare liceat deſcenſum, ut centrum tam lente, quam volumus, deſcendat, adeoque tempus deſcenſus per quamlibet altitudinem EA commode comparari poſſit cum deſcenſu naturali gravium cadentium, quæ nimirum uno ſecundo 15 ped. Reg. Paris. circiter a quiete delabuntur. Ut enim lentiſſime deſcendat, minuenda eſt tantum quantum ſatis ratio CA ad CB. Poſſunt quoque ex principio conſervationis virium vivarum determinari leges communicationis motus pro corporibus perfecte elaſticis, quæ rotando ſe mutuo impellunt, ſed brevitatis gratia eas hic non exprimo, ſufficit monere eas ex parte dependere a figura corporum rotantium. Multa alia nunc taceo, quæ commode per theoriam virium vivarum explicari aut ſolvi poſſunt, quæ vero ex aliis principiis difficulter, nec ſine ambagibus, determinantur, quibus annumero, quæ ſuperius dixi circa vibrationes chordarum & oſcillationes fluidorum in tubis reflexis, nec non ea, quæ de gravibus rotando deſcendentibus, vel de corporibus rotando in ſe invicem impingentibus expoſui. Cætera, argumentum plane eſt novum & nulli hactenus, quantum ſcio, conſideratum. Demonſtrationes alia vice mittam.

MONITUM.

Experimenta deſiderata in Scholio Theorematis 8, *fuerunt inſtituta accuratiſſime in diverſis corporibus, eaque plane cum Theoria convenire obſervatum fuit. In ſequenti Epiſtola ad Filium data, talia ad hoc argumentum pertinentia atque in Latinum ſermonem verſa reſcripſit horum Theorematum Auctor.*

Non dubitavi, quin facile invenires demonſtrationes Theorematum meorum, ope principii conſervationis virium vivarum, & gaudeo te alia eruiſſe ſimilia: gratum quoque fuit ex te intelligere, tam egregie Theoriam iſtam experimentis confirmari. Sententiam meam de tenſione fili corpus rotans ſuſtinentis in Theoremate octavo, quam ſcire cupis, jam tecum communicabo, ex qua patebit, eſſe tenſionem fili conſtantem, durante

te toto descensu mobilis rotantis, cujuscunque sit figuræ. Sit IKL (*fig. 6.*) scala velocitatum naturalium, cujus nempe applicatæ MK, NL designent velocitates acquisitas mobilis libere cadentis ex altitudinibus IM, IN. Sit alia curva IRS, cujus applicatæ PR, QS exprimant velocitates centri gravitatis mobilis alicujus ex filo suspensi, rotando ab initio I descendentis per evolutionem fili. Agantur ex punctis infinite propinquis K, L rectæ KT, LS, axi IQ parallelæ, secantes curvam IRS, in R, & S; erunt, ductis applicatis RP, SQ, ex natura velocitatum mobilis rotando descendentis [nominatis IP vel $IQ = R$, & IM vel $IN = Z$, $PQ = dR$, $MN = dZ$] $Z = aR : D$. [Vid. Epistolam meam anteriorem], hoc est, $D : a = R : Z = IQ : IN = IP : IM = PQ : MN$; unde, ob constantem rationem inter IQ & IN, vel inter IP & IM, patet curvam IRS, esse etiam parabolam; hinc, ob velocitates PR, MK æquales, erit tempusculum per PQ ad tempusculum per MN ut PQ ad MN, seu ut IP ad $IM = R : Z = D : a$. Sumta jam $PO = MN$, ductaque applicatis parallela OV secante KR productam in Y, & elementum parabolæ RS in X; fingamus filum, quando mobile pervenit in P subito rumpi, ita ut acquisita sua velocitate $PR = MK$, pergat libere descendere; quare in O habebit velocitatem $OV = NL$, & incrementum velocitatis momentaneum erit $YV = ZL$. Quia autem non rupto filo, incrementum velocitatis eodem momento acquisitum est tantum YX, liquet reliquum XV impediri a filo; idemque adeo impendi in tensionem fili. Unde ita argumentor: Incrementa & decrementa velocitatis, in eodem corpore & eodem tempusculo producta, sunt ut vires quæ ea producunt: est ergo tensio fili, quæ dicatur T, ad vim gravitatis mobilis rotantis, hoc est, ad ejus pondus, quod vocetur P, ut VX ad $VY = ST$, adeoque ut SV ad RT, vel ut OQ ad PQ, hoc est, ut $PQ - MN$ ad PQ. Unde T ad $P = dR - dZ : dR = R - Z : R$ $:: D - a.\ D$, proinde $T = (D - a) P : D$. Q. E. I.

TAB. XLV. *Fig. 6.*

TAB.XLV. Fig. 5. COROLL. 1. Si mobile grave BFG (vid. *fig.* 5.) eſt circumferentia circuli vel ſuperficies cylindrica, cujus radius CB $= b$, erit $D = (aa + bb) : a$, adeoque $T = bbP : (aa + bb)$.

COROLL. 2. Si BFG ſit ipſe circulus vel cylindrus, cujus radius $= b$, crit $D = (2aa + bb) : 2a$, unde $T = bbP : (2aa + bb)$.

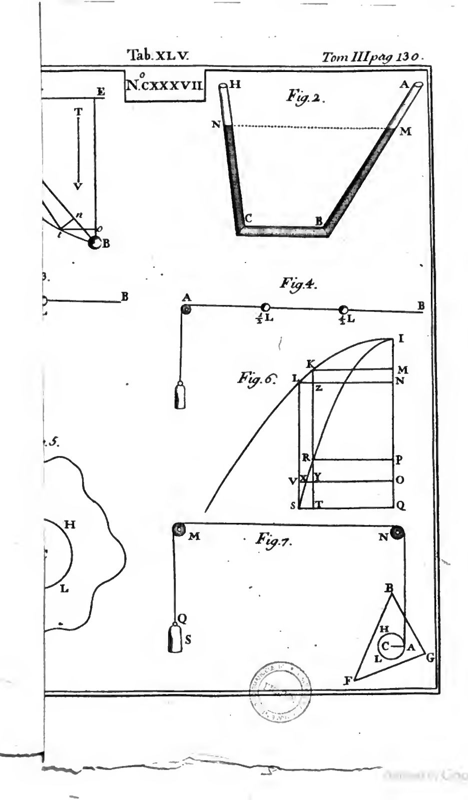
COROLL. 3. Si ſit ſuperficies ſphærica, cujus radius $= b$, erit $D = (3aa + 2bb) : 3a$; hinc $T = 2bbP : (3aa + 2bb)$.

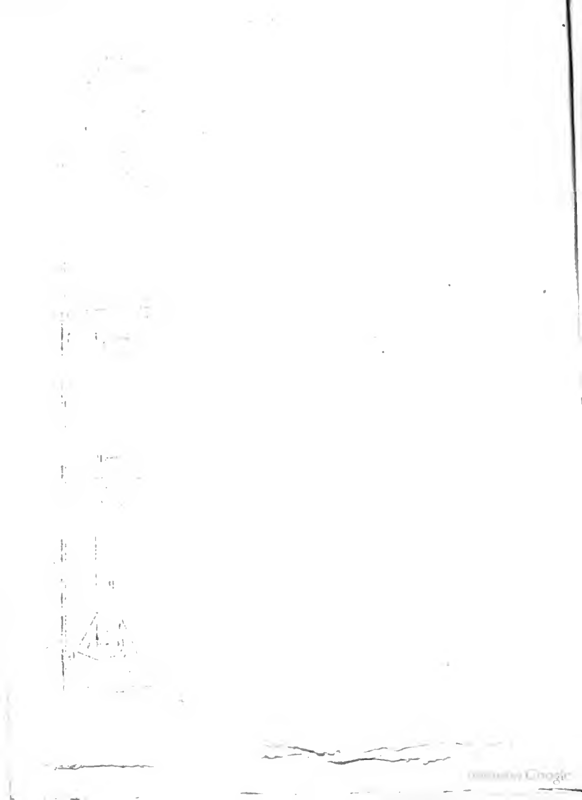
COROLL. 4. Si ſit globus ſolidus, cujus radius $= b$, erit $D = (5aa + 2bb) : 5a$; proinde $T = 2bbP : (5aa + 2bb)$.

COROLL. 5. Sit jam mobile grave BFG (*Fig.* 7.) non TAB.XLV. Fig. 7. rotundum, ſed ex. gr. triangulum iſoſceles rectangulum in G; recta perpendicularis ex G in hypothenuſam demiſſa $= c$; CA radius circuli AHL [qui repræſentat axem cui filum circumvolutum eſt, & qui pro centro habet centrum gravitatis trianguli BFG] $= a$: Erit $D = (2cc + 9aa) : 9a$, ideoque $T = 2ccP : (2cc + 9aa)$, ſumendo hic etiam P pro pondere trianguli. Atque ita in aliis.

SCHOLION. Hæc Corollaria, tanquam totidem Theoremata non parum curioſitatis habent, ſiquidem facillimum eſt ea per experientiam confirmare; appendatur ex. gr. prædictum triangulum quod rotando deſcendere debet ad extremitatem unius brachii libræ; & ad alteram ejus extremitatem alligetur pondus $= 2ccP : (2cc + 9aa)$. Dico enim pondus hoc minus in æquilibrio ſervaturum pondus majus trianguli P; quamdiu hoc rotando deſcendit. Vel etiam hunc in modum inſtitui poſſet experimentum: Sint duæ trochleæ in centris ſuis parieti infixæ, quas ambiat filum QMNA axi ALH involutum, ſitque hujus axis centrum C in centro gravitatis trianguli iſoſcelis BFG rectanguli in G, cujus pondus $= P$; ad alteram fili extremitatem Q appendatur pondus $S = 2ccP : (2cc + 9aa)$. Dico pondus S, in quiete manſurum, dum triangulum BFG, per evolutionem fili rotando deſcendit.

NOU-


N.° CXXXVII
Fig. 2.
H
A
N
M
C
B
E
T
V
n
o
t
B
B
Fig. 4.
A
B
½ L
½ L
Fig. 6.
I
K
M
L
N
Z
R
P
V
X
Y
O
S
T
Q
.5.
H
L
Fig. 7.
M
N
Q
S
B
H
C
A
L
G
F



N°. CXXXVIII.

NOUVELLES PENSÉES SUR LE SYSTÊME DE M. DESCARTES,

Et la maniere d'en déduire les Orbites & les Aphélies des Planètes.

PIECE QUI A REMPORTÉ LE PRIX proposé par l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1730.

Par M. JEAN BERNOULLI, *Professeur des Mathématiques à Bâle, & membre des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse.*

Imprimé

A PARIS,

MDCCXXX.

R 2

AVERTISSEMENT.

L'ACADEMIE a trouvé cinq Pieces, parmi celles qui lui ont été envoyées, qui méritoient de concourir, & principalement la Piece N°. 13, dont la Devise est:

Me vero primum dulces ante omnia Musæ
Accipiant, Cælique vias & sydera monstrent.

Les autres sont la Piece N°. 3, dont la Devise est: *Sicut tenebræ ejus, ita & lumen ejus.* La Piece N°. 26, dont la Devise est: *Multa contigit scire, sed non intelligere.* La Piece N°. 20, dont la Devise est: *Cœli enarrant gloriam Dei, & opera manuum ejus annunciat firmamentum.* Et la Piece N°. 27, dont la Devise est: *Ex minimis maxima.*



NOUVELLES PENSÉES SUR LE SYSTÊME DE M. DESCARTES,

Et la maniere d'en déduire les Orbites & les Aphélies des Planètes.

Virtus recludens immeritis mori
Cœlum, negata tentat iter via.

HORAT. Od. 2 Lib. 3. Carm.

I.



L'ILLUSTRE Académie des Sciences ayant proposé pour l'année 1730 cette question: *Quelle est la cause de la figure elliptique des Orbites des planetes, & pourquoy le grand axe de ces Ellipses change de position; ou ce qui revient au même, Pourquoy leur Aphélie, ou leur Apogée répond successivement à differens points du Ciel?* J'ai cru qu'il m'étoit permis d'essayer mes forces sur ce sujet. On sera peut-

être ſupris de voir que j'oſe reproduire ſur la ſcène les Tourbillons céleſtes, dans un tems où pluſieurs Philoſophes, particulierement des Anglois, les regardent comme de pures chimeres, & n'en parlent qu'avec le dernier mépris; mais la ſavante COMPAGNIE, à l'examen de laquelle je ſoumets mes penſées, jugera ſi on a raiſon de condamner un Syſtême bâti ſur des principes clairs & intelligibles, & de lui en ſubſtituer un autre fondé ſur des principes dont on ne peut ſe former aucune idée; ce qui en matiere de Phyſique me paroit une raiſon ſuffiſante pour rejetter un tel Syſtême, quand il ſeroit au reſte le plus heureuſement inventé pour l'explication de tous les Phénomènes; ſur tout ſi on a les moyens en main de faire voir que par le premier Syſtême bien ménagé, on eſt en état, non ſeulement de rendre raiſon de ces mêmes Phénomènes, mais auſſi de répondre aux objections les plus fortes qu'on a voulu faire valoir en Angleterre comme des armes invincibles contre les Tourbillons. Or je montrerai dans ce petit Diſcours qu'on a effectivement ces moyens pour éxécuter l'un & l'autre. Je vais commencer par faire une courte diſcuſſion des differentes idées que l'on a ſur le Syſtême général du Monde; enſuite, je répondrai à la prétendue impoſſibilité des Tourbillons fondée ſur deux Propoſitions de M. NEWTON; en troiſiéme lieu, je donnerai la ſolution de la queſtion propoſée, par l'hypothéſe des Tourbillons.

II.

Les deux parties que contient cette Queſtion, conſiſtent à déterminer 1°. la cauſe des Ellipſes que les Planètes décrivent dans le Ciel, 2°. la cauſe du changement de poſition des grands axes de ces Ellipſes. On ſuppoſe donc, comme une choſe avérée que les Orbites des Planètes ont une figure elliptique, & que les Aphélies ſont mobiles.

III.

I I I.

On a raiſon de le ſuppoſer ; les Phénomènes démontrent l'un & l'autre : quoique quant aux Planètes principales, le mouvement de leur Aphélie ſoit ſi lent, que pluſieurs, tant Aſtronomes que Philoſophes, ont voulu douter s'il eſt véritable, ou plûtôt apparent ; mais je le ſuppoſerai réel & véritable, d'autant plus qu'il découle fort naturellement du Syſtème dont j'entreprends la défenſe.

I V.

L'arrangement des parties du Monde, l'ordre & le mouvement des Aſtres, enfin la ſymmétrie entre tout ce qui compoſe l'Univers, eſt ce qu'on nomme communément le Syſtème du Monde ; mais comme c'eſt une explication phyſique qu'on demande ſur les deux points en queſtion, on voit bien qu'il ne ſuffit pas de regarder ce grand édifice avec des yeux aſtronomes, c'eſt-à-dire, de ſe contenter de ſavoir le cours & les autres ſymptomes des Aſtres, ſuivant les régles établies par les obſervations & l'idée du Syſtème qu'on adopte, ſans ſe mettre en peine comment ni pourquoy les choſes ſont ainſi faites & point autrement. Il faut de plus pénétrer dans les cauſes phyſiques, connoitre les Loix du mouvement, & les prendre de la ſource, ſi on veut être en état de rendre raiſon des effets obſervés par les Aſtronomes.

V.

Cependant comme les Aſtronomes ſont obligés de choiſir un Syſtème qui convienne, autant qu'il eſt poſſible, aux Phénomènes céleſtes, dans toutes les particularités qui les accompagnent ; auſſi les Phyſiciens ne ſont pas moins obligés de s'y tenir préférablement à tout autre : car comment pourroit-on tirer des vérités en raiſonnant ſur une hypothéſe douteuſe, ou tout-à-fait fauſſe ? Ainſi je ne m'arrêterai pas au Syſtème de PTO-

LO-

LOMÉE, ni à celui de TYCHO, puiſqu'il y a long-tems qu'on reconnoit l'inſuffiſance de l'un & de l'autre, tant pour l'Aſtronomie que pour la Phyſique.

V I.

Le Syſtême de COPERNIC eſt celui qui quadre le mieux pour l'Aſtronomie, comme étant le plus ſimple. On ſatisfait par ſon moyen aux principaux Phénomènes; & il eſt d'ailleurs confirmé par un grand nombres d'obſervations, & par des découvertes nouvellement faites, depuis qu'on a trouvé moyen d'employer les grands tuyaux optiques pour obſerver le Ciel. Les Satellites de Jupiter & ceux de Saturne, qui ſont leurs révolutions autour de ces Aſtres; le mouvement propre de Jupiter; celui de Mars & de Venus ſur leur centre, ſemblable au mouvement diurne de la Terre; les Phaſes croiſſantes & décroiſſantes de Venus; le mouvement du Soleil autour de ſon centre fixe & immobile, & pluſieurs autres découvertes de cette nature, ſont autant de preuves preſque certaines de la vérité du Syſtême de COPERNIC. Auſſi les Aſtronomes les plus habiles & de ce ſiécle & du paſſé, l'ont-ils reçû ſans difficulté, comme le ſeul qui puiſſe expliquer tous ces Phénomènes d'une maniere ſimple & naturelle.

V I I.

Mais pour ce qui eſt des cauſes phyſiques qui produiſent les mouvemens des corps céleſtes & les varietés de ces mouvemens, il s'en faut beaucoup que les Philoſophes ne ſoyent d'accord entr'eux. Mon but n'eſt pas d'éxaminer le ſentiment de chacun; on ne l'éxige pas. Je me propoſe ſeulement, parce que cela me conduit à mon ſujet, de confronter les deux differentes opinions qui ont fait le plus de bruit dans le monde. La prémiere eſt celle de M. DESCARTES; la ſeconde, qui eſt la plus en vogue en Angleterre, vient du fameux M. NEWTON.

VIII.

VIII.

Pour parler de cette derniere; en premier lieu, on ſait que M. NEWTON l'a batie ſur les vûës de KEPLER, dont il a emprunté le fondement pour compoſer ſon Syſtème. Il ne faut pas nier qu'il n'ait éxécuté ſon deſſein fort heureuſement par la force centrifuge des Planètes contre-balancée par une force contraire de leur gravitation vers le centre du mouvement. Quant à la premiere de ces deux forces, ſa nature eſt connuë, on en conçoit clairement la cauſe, & perſonne ne fait difficulté d'accorder, qu'une pierre, par exemple, agitée en rond par une fronde, acquiert un effort continuel pour s'éloigner du centre, parce qu'elle eſt empêchée par la fronde de ſe mouvoir en ligne droite, qui eſt la tangente du cercle en tout point où la pierre ſe trouve, & qui eſt la direction naturelle qu'elle ſuivroit, ſi elle n'étoit point retenuë par la fronde: Et comme il faut une certaine force pour détourner à tout moment la pierre de ſon mouvement rectiligne, il eſt viſible qu'elle doit faire une réſiſtance égale (puiſque l'action & la réaction ſont toujours égales) & c'eſt dans cette réſiſtance que conſiſte la force centrifuge. Ainſi cette force eſt reconnuë & admiſe comme un principe clair & intelligible.

IX.

Mais quand il s'agit d'expliquer la cauſe de la gravitation des Planètes ſur le Soleil, & la raiſon pourquoi elles ne trouvent point de réſiſtance de la part du milieu dans lequel elles ſe meuvent; il a falu hazarder deux ſupoſitions hardies, qui révoltent les eſprits accoûtumés à ne recevoir dans la Phyſique que des principes inconteſtables & évidens. La premiere de ces ſupoſitions eſt d'attribuer aux corps une *vertu* ou *faculté attractive*, par laquelle ils s'attirent mutuellement, ſans le ſecours d'aucune autre action. La ſeconde conſiſte à ſuppoſer dans le Monde un *vuide* parfait. Voilà donc *l'attraction & le vuide* (comme dit agréablement M. de FONTENELLE) *bannis de la Phyſique par* DESCARTES, *& bannis pour jamais ſelon*

les apparences, y reviennent ramenés par M. N E W T O N, *armés d'une force toute nouvelle, dont on ne les croyoit pas capables, & ſeulement peut-être un peu déguiſés;* deux principes qui tendent directement à rétablir ſur le trône le Péripatétiſme, qui a tyranniſé ſi long-tems les anciens Philoſophes. Auſſi M. NEWTON a-t-il bien ſenti & prévû les objections qu'on lui feroit, en particulier contre la peſanteur innée des corps: c'eſt pour cela qu'il proteſte, en pluſieurs endroits, qu'il n'adopte ce ſentiment que comme une hypothèſe, par exemple, à la page 389 de ſes *Princip. Phil. Nat.* Edit. derniere: *Attamen*, dit-il, *gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minime affirmo;* plus retenu en cela que ſes Sectateurs outrés, tels que M. COTES, qui a fait la Préface devant cette Edition, où il prétend poſitivement & d'un air impérieux contre les Cartéſiens, pag. 8, & 9, *Que la peſanteur n'eſt pas moins eſſentielle aux corps que leur étenduë, mobilité & impénétrabilité,* On voit là le Diſciple plus courageux que le Maître.

X.

Mais puiſque cette confiance de parler ne nous oblige en aucune maniere de donner aveuglément dans ces ſentimens incompréhenſibles, il nous ſera permis d'abandonner le Syſtême de M. NEWTON, quelque ingénieux qu'il ſoit, juſqu'à ce qu'il ſoit délivré de tout ce qui choque la ſaine raiſon: comme en effet, je crois avoir trouvé un expédient tout particulier pour expliquer la gravitation des Planètes par une cauſe purement méchanique, ſans recourir ni à l'attraction, ni au vuide; avec cet avantage, que je me fais fort de montrer clairement, pourquoi les gravitations des Planètes ſur le Soleil doivent être en raiſon renverſée des quarrés des diſtances au centre du Soleil, ce que M. NEWTON & ſes Sectateurs ont ſeulement ſupoſé comme une hypothèſe, ſans pouvoir le démontrer, pour en déduire les Ellipſes, au foyer deſquelles on place le Soleil, ou le centre auquel tendent les gravitations. Mais mes penſées là-deſſus me donneroient matiere

tiere à une autre Dissertation, que j'aurai l'honneur de communiquer à l'illustre ACADE'MIE, quand je verrai que celle-ci aura été reçûë favorablement. Je m'attache, pour le présent, à convaincre les Adversaires des Tourbillons, qu'ils sont beaucoup plus commodes qu'on ne l'a crû jusqu'ici, pour sauver les Phénomènes, en particulier ceux dont il est ici question; ce qui dissipera en quelque façon les difficultés ausquelles ce Systême étoit sujet.

X I.

Les Tourbillons que M. DESCARTES a introduits, sont trop connus des Physiciens pour en faire une ample description. On sait que par ces Tourbillons il a prétendu expliquer deux effets principaux, savoir le mouvement des Planètes autour du Soleil, & la nature de la pesanteur, qui fait descendre les corps grossiers vers le centre de la Terre, ou d'une autre Planète. Mais ce Systême, tout spécieux qu'il est d'abord, n'a pas manqué de rencontrer ses Antagonistes: on y a trouvé à redire sur tout, que par les Tourbillons il est très-difficile d'expliquer la Règle de KEPLER, que les observations les plus exactes vérifient d'une maniere admirable. En conséquence de cette Règle, les Planètes décrivent autour du centre du Soleil, non pas des Cercles excentriques, comme on croyoit, mais des Ellipses, quoique approchantes des cercles; le Soleil est dans un des foyers de chacune de ces Ellipses; le tems pour parcourir un arc d'une Ellipse est proportionel à l'aire du Secteur Elliptique formé par cet arc & les deux lignes droites tirées du foyer aux extrémités du même arc; les tems périodiques des révolutions entières des Planètes sont en raison sesquipliquée de leurs distances moyennes au centre du Soleil, c'est-à-dire, que les quarrés des tems périodiques sont comme les cubes de ces distances; d'où il suit, que la vitesse moyenne des Planètes est réciproquement comme la racine quarrée de leur distance moyen-

ne. Enfin tout cela s'obſerve auſſi dans les Planètes ſécondaires, ou Satellites, autour de leur Planète principale.

X I I.

D'ailleurs M. DESCARTES a tàché de rendre quelque raiſon pourquoi une même Planète eſt tantôt plus, tantôt moins éloignée du Soleil: ce qui ſe fait, ſelon lui & ſes Commentateurs. parce que le Tourbillon ſolaire, entouré de pluſieurs autres Tourbillons inégaux, en eſt preſſé inégalement; en ſorte que l'interſtice par où doit paſſer la matiere du Tourbillon, étant d'un côté plus étroit, & du côté opoſé plus large, il faut que la Planète s'approche plus du Soleil, & marche plus vite là où elle ſerrée, & qu'elle s'éloigne plus du Soleil, & aille plus lentement à l'endroit où elle eſt plus au large. Quand on accorderoit cela, on voit bien que les Orbites des Planètes ne ſeront pas des Cercles, & qu'elles auront leurs Aphélies & Perihélies; mais faut-il pour cela, dira-t-on, que les Orbites ſoyent juſtement des Ellipſes? que le Soleil ſoit juſtement placé dans un des foyers? que les Planètes obſervent ſi précisément dans leur cours la loi de KEPLER? Faut-il auſſi que les Apſides ſoyent mobiles, nonobſtant que l'inégalité des interſtices entre le Soleil & les Tourbillons voiſins paroiſſent par cette explication devoir occuper toujours les mêmes endroits, par raport aux étoiles fixes? Voudra-t-on dire que Dieu a fait exprès un arrangement tout particulier par une eſpèce de miracle entre les Tourbillons, pour produire ces effets? En vérité cela ſeroit ce qu'on apelle *Deum accerſere ex machina*. On pourroit ſoûtenir avec le même droit, que Dieu dirige immédiatement par ſa Toute-puiſſance la machine de l'Univers, & que c'eſt ſa pure volonté, que les Corps céleſtes ſe meuvent de la ſorte & point autrement; ou bien, on pourroit rapeller ces Génies ou ces Intelligences, que Dieu a conſtituées, ſelon la groteſque idée de certains Anciens, pour tourner éternellement les Cieux

&

& les Aftres, en obfervant la Règle de KEPLER. Mais s'il étoit permis de raifonner fur ce pied-là, en entaffant hypothèfes fur hypothèfes, il n'y auroit aucun Phénomène dans la Nature des chofes, dont on ne pût imaginer fur le champ quelque explication, femblable à celle que donne par plaifanterie M. COTES dans fa Préface que j'ai alléguée cideffus, ou pour fe rire des Tourbillons Cartéfiens, il dit; quoi-qu'avec un peu trop de préfomption, qu'ils ne font pas plus propres pour expliquer les mouvemens des Planètes, que feroit l'hypothèfe de celui, qui pour rendre raifon pourquoi une pierre jettée en l'air décrit une Parabole, voudroit foûtenir, que c'eft parce qu'il y a une matiere fubtile qui fe meut en tous fens, & toûjours fur des Paraboles grandes & petites, tellement que la pierre entrainée par le cours de cette matiere, fera obligée de fuivre la route de l'une ou de l'autre de ces Paraboles, felon la direction & la force avec laquelle la pierre a été jettée.

XIII.

Un tel ufage des Tourbillons feroit, en vérité, ridicule; mais d'un autre côté, on leur feroit grand tort de les rejetter tout-à-fait, à caufe des difficultés qui fe préfentent d'abord. Si on veut être équitable, il faut voir fi on ne peut pas les lever par quelque tempérament ou explication raifonnable. Ce feroit une efpece d'ingratitude, fi nous ne reconnoiffions pas que c'eft principalement à M. DESCARTES que nous fommes redevables des premieres idées qu'il nous a données pour raifonner en Phyfique, fur des principes qu'on peut entendre clairement, au lieu de tout ce fatras de qualités occultes, de formes fubftantielles, de facultés, de vertus plaftiques, & de cent autres chimères femblables, que l'Antiquité nous avoit laiffées.

XIV.

Les Tourbillons fe préfentent fi naturellement à l'efprit, qu'on

ne sauroit presque se dispenser de les admettre. Mais pour dissiper les inconvéniens qui résultent de la maniere dont M. DESCARTES veut qu'ils emportent les Planètes, ne fera-t-on pas bien d'y apporter quelque remède, en montrant un autre effet auquel on n'a pas songé, qui nous mette en état d'en tirer, d'une maniere simple & claire, les Phénomènes des Astres, comme je tâcherai de faire, lorsqu'après cette discussion j'aurai l'honneur d'exposer à mes Juges la nouvelle idée que j'ajoûte au Système de DESCARTES, qui me paroit la plus simple & la plus naturelle, tant pour obvier aux difficultés, que pour donner une réponse convenable au sujet de la question proposée par l'ACADE'MIE.

X V.

Quoique les Tourbillons Cartésiens soyent, comme nous venons de voir, sujets à de grandes difficultés; il faut avoüer aussi qu'il y en a, formées même par des Philosophes célèbres, qui ne sont qu'apparentes, & qu'on peut d'abord dissiper par des réponses solides. En effet, le Savant M. SAURIN n'a-t-il pas solidement répondu, dans les Mémoires de l'ACADE'MIE de 1709, à l'objection de M. HUGUENS sur la cause de la Pesanteur? lorsque celui-ci avoit prétendu, que si la matiere céleste se mouvoit proche de la Terre en même sens, avec une vitesse qui devroit être, selon son calcul, beaucoup plus grande que la vitesse du mouvement journalier de la Terre autour de son axe, il ne seroit pas possible que par le continuel effort d'un mouvement si rapide, elle n'entrainât avec elle tous les corps qui sont sur la surfaee de la Terre; ce qui n'arrive pas. La raison que M. SAURIN a donnée, pourquoy ce mouvement si rapide ne doit pas se faire sentir, ni entrainer les corps qui sont sur la Terre, me paroit si bonne, qu'elle ne sauroit être meilleure, ni plus satisfaisante.

XVI.

X V I.

Je paſſe donc à une autre objeċtion, qui paroit d'autant plus importante qu'on l'a voulu fonder ſur une démonſtration géométrique. Elle vient du célèbre M. NEWTON, qui a donné deux propoſitions dans ſes *Principes de la Phil. nat.* (ce ſont la 51ᵉ & la 52ᵉ du ſecond Livre,) par leſquelles il prétend démontrer l'impoſſibilité des Tourbillons. Mais outre la réponſe judicieuſe de M. SAURIN, que l'on voit à la fin de ſon Mémoire allégué, je trouve que le raiſonnement de M. NEWTON eſt un ſophiſme manifeſte, étant fondé ſur deux ſupoſitions également fauſſes. Voici comme il raiſonne. Il conçoit d'abord un fluide uniforme & infini en repos, dansleque il fait tourner un Cylindre, & puis auſſi une Sphère ſolide autour de leur axe. Il diviſe par la penſée le fluide en une infité de couches d'une épaiſſeur égale & infiniment petite, toutes parallèles à la ſurface du Cylindre, ou de la Sphére. Cette ſurface en tournant fait une impreſſion continuelle ſur la premiere couche qui lui eſt contiguë, & l'entraine peu à peu; de même cette premiere couche met en mouvement la ſeconde; celle-ci la troiſieme, & ainſi conſécutivement chacune des couches entrainera par ſon frottement ſa voiſine ultérieure, juſqu'à ce qu'une grande partie du fluide ſoit miſe dans une eſpèce de Tourbillon, qui tourne à chaque diſtance avec une viteſſe permanente & convenable à l'éloignement de l'axe du Cylindre ou de la Sphére. Pour déterminer le tems périodique qui convient à la révolution de chaque couche, M. NEWTON conſidere les couches comme ſolides & d'une petite épaiſſeur égale, comme je l'ai déja dit; enſuite il parle ainſi (v. pag. 375, Ed. derniere) „ Quo-
„ niam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum or-
„ bium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypoth.) ut eorum tranſ-
„ lationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus im-
„ preſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt
„ vel minor ex parte concava quam ex parte convexa, præva-
„ lebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit, vel
„ retar-

„ retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel „ in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in mo- „ tu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte „ utraque ſibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias. Un- „ de cum impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum „ translationes ab invicem, erunt translationes inverſe ut ſu- „ perficies (cylindricæ), h. e. inverſe ut ſuperficierum diſtan- „ tiæ ab axe, &c.

XVII.

Or les dernieres lignes de ce raiſonnement, qui ne ſont qu'une répétition des premieres, contiennent une erreur. Car 1°. les impreſſions que ſe font les couches, les unes ſur les autres, conſiſtent dans la réſiſtance que cauſe le frottement, lorſque la ſurface convexe d'une couche ſe ſépare de la ſurface concave de la couche voiſine : mais on ſait que cette réſiſtance dépend uniquement de la force avec laquelle les deux ſurfaces ſont preſſées l'une contre l'autre, & point du tout de la grandeur ou de l'étenduë dans laquelle elles ſe touchent. Nous avons ſur ce ſujet une excellente Diſſertation de feu M. AMONTONS, dans les Mémoires de l'ACADE'MIE de *1699*, où il fait voir, pag. 212, *Que la réſiſtance cauſée par le frottement des ſurfaces de differentes étenduës eſt toûjours la même, lorſqu'elles ſont chargées de poids égaux, ou ce qui eſt la même choſe, lorſque les preſſions ſont égales.* Cependant M. NEWTON conſidere ſeulement l'étenduë des couches & la viteſſe relative avec laquelle elles ſe ſéparent, ſans faire attention à la quantité de preſſion dont chacune eſt preſſée contre ſa voiſine. 2°. Il néglige entiérement de faire intervenir l'action du levier, dont la conſidération pourtant eſt ici abſolument néceſſaire, étant viſible que la même force, appliquée ſuivant la tangente de la circonference d'une grande rouë, a plus d'efficace pour la faire tourner, qu'elle n'a lorſqu'on l'applique à la circonference d'un rayon plus petit. D'où vient donc que M. NEWTON, qui regarde ces couches comme autant de rouës ſolides à tourner ſur

ſur leur axe commun, ne tire pas en conſéquence le raport des diſtances au centre, qu'obſervent les forces du frottement dans les couches, pour avoir leur véritable ***momentum***, ou efficace? D'où vient auſſi qu'il ne met pas en ligne de compte la quantité de preſſion que chaque couche doit ſoûtenir; puiſque, ſans la preſſion, les couches ne ſeroient que gliſſer l'une ſur l'autre ſans ſe frotter, comme il eſt évident par les expériences de M. AMONTONS.

XVIII.

Voilà deux erreurs, qu'on ne ſauroit concevoir comment elles ſont échapées à la ſagacité d'un ſi grand Géométre, & moins encore peut-on s'imaginer pourquoy ſes zélés Partiſans ne s'en ſont point aperçûs pendant ſi long-tems, juſques-là même qu'ils ont laiſſé paroitre ces fautes dans les trois differentes éditions qu'on a faites en Angleterre de l'Ouvrage de M. NEWTON, fort long-tems l'une après l'autre. Voyons ce qu'il faut faire pour remédier à ce double deffaut. Pour cette fin, je donne la ſolution de ſes deux Propoſitions dans les articles ſuivans; on jugera ſi je n'ai pas mieux réüſſi.

XIX.

Il eſt évident que chaque couche du fluide entre deux autres voiſines, pour qu'elle puiſſe circuler avec une viteſſe uniforme, doit recevoir autant d'efficace par le frottement de la couche inférieure, pour en être avancée ou accélerée, qu'elle en reçoit en ſens contraire par le frottement de la ſupérieure pour en être retardée; de ſorte que les décroiſſemens de viteſſe étant à tous momens réparés par des accroiſſemens égaux, la couche conſerve ſa circulation uniforme. Or qu'eſt-ce qui produit ces deux effets égaux & contraires l'un à l'autre? C'eſt ſans doute la force du frottement que ſouffre chaque couche en arriere & en avant, par les deux contiguës, la ſupérieure & l'in-

l'inférieure; mais cette force d'où vient-elle au frottement, puisque ni le seul attouchement des surfaces, ni la vitesse rélative avec laquelle elles se séparent, quelque grande qu'elle soit, ne produisent encore aucune force ? Voici donc d'où je dérive cette force. Pendant qu'une couche est en circulation, il est visible qu'elle fait un continuel effort pour se dilater, à cause de la force centrifuge avec laquelle toutes ses parties cherchent à s'éloigner du centre de la circulation; mais la dilatation actuelle étant empêchée par la couche voisine supérieure, il est naturel que celle-ci en sera pressée. C'est donc ainsi que la premiere, ou la plus basse couche, mise en circulation, presse la seconde; & la seconde aidée de la premiere, presse la troisième; celle-ci aidée des deux précédentes, presse la quatrième, & ainsi, de couche en couche, par toute l'étendue du Tourbillon. D'où il suit que pour estimer la quantité de l'impression que chaque couche éxerce sur la surface concave de la suivante, il faut prendre la force centrifuge de la matiere, non de la seule couche inférieure contiguë, mais de toutes les précédentes, puisque la derniere des couches doit toûjours soûtenir l'effort total de la force centrifuge que toute la matiere du fluide compris sous elle acquiert par la circulation.

X X.

TAB. XLVI. *Fig.* 1. Il ne reste que le calcul à faire pour trouver combien de pression chacune des couches précédentes contribuë à presser la derniere; la somme de toutes ces pressions donnera la pression totale. Soit donc le corps *S* que je supose premierement cylindrique, & qui, par le mouvement autour de son axe, produit dans le fluide un tourbillon composé d'une infinité de couches d'épaisseur égale & infiniment petite. Prenons deux de ces couches, comme *ERP* & *GMC*, éloignées l'une de l'autre de l'intervalle *EG*, & considerons *ERP* comme la dernie-

derniere, dont le rayon *SE* soit d'abord d'une longueur déterminée & invariable $= a$, pendant que l'autre couche *GMC*, considérée comme une des précédentes, a le rayon *SG* indéterminé & variable $= x$, & l'épaisseur constante $Gg = dx$. Soit v la vitesse absoluë avec laquelle la couche *GMC* circule autour de *S*. La quantité de matiere contenuë dans la couche *GMC* est proportionnelle au produit de *SG* par *Gg*; donc cette quantité s'exprimera par xdx, ce qui étant multiplié par la force centrifuge absoluë (qui est, comme on sait, en raison composée de la directe du quarré de la vitesse & de la réciproque simple du rayon, c'est-à-dire en raison de $vv : x$) nous donnera $xdx \times (vv : x) = vvdx$ pour la force centrifuge de la matiere contenuë dans la couche *GMC*.

X X I.

C'est donc avec cette force $vvdx$ que la couche particuliére *GMC*, sans le secours des précédentes inférieures, fait un effort pour se dilater, je veux dire qu'elle presse le fluide extérieur contenu dans l'espace *RPEGCM*. Or c'est un principe d'Hydrostatique, qu'un fluide qui remplit éxactement quelque espace, étant pressé d'un côté, répand également la méme pression sur toutes les parties des parois extérieures de l'espace qui renferme le fluide. Donc pour savoir quelle sera la pression que toute la surface concave de la couche *ERP* reçoit de l'effort dilatatif de la seule couche *GMC*, il faut faire cette analogie : Comme la circonférence *GMC* est à la circonférence *ERP*, ou, comme le rayon *SG* [x] est au rayon *SE* [a]; ainsi la force céntrifuge ou l'effort dilatatif de la couche *GMC*, que nous avons trouvée $= vvdx$, est à une quatrième $avvdx : x$, qui montre par conséquent la pression que la surface concave de la derniere couche *ERP* souffre de l'effort dilatatif de *GMC*. Donc la somme ou l'intégrale de $avvdx : x$, c'est-à-dire $a\int(vvdx : x)$ désignera la pression totale que toutes les couches inférieures comprises entre *S* &

GMC transmettent conjointément sur la concavité de la derniere *ERP*. Faisons présentement cette couche *ERP* variable & contiguë à *GMC*, afin que nous ayons indéterminément la pression totale sur chacune. Ainsi il n'y a qu'à mettre x pour a, & nous aurons $x\int(vvdx : x) =$ à l'impression totale que le fluide du Tourbillon communique à la surface concave d'une couche quelconque, dont le rayon est x; donc cet $x\int(vvdx : x)$ dénotant la force avec laquelle la surface convexe d'une couche est pressée contre la concave de la plus voisine supérieure, doit, selon l'expérience & le raisonnement de M. Amontons, règler la force du frottement que se font les deux couches contiguës l'une à l'autre, ce que j'exécute en cette maniere.

XXII.

TAB. XLVI. Fig. 2. Ayant tiré (*Fig.* 2.) une ligne droite *SE* qui coupe les circonférences des couches *A*, *B*, *C*, &c. aux points *L*, *M*, *N*, *O*, &c. que l'on conçoive les arcs *LR*, *MT*, *NV*, *OP*, &c. qui expriment les vitesses réelles avec lesquelles les couches font leurs révolutions autour de *S*. La courbe *RPF* qui passe par les points *R*, *T*, *V*, *P*, &c. sera nommée la courbe des vitesses. Considerons une de ces couches, par exemple *B* entre les deux voisines *A* & *C*; & tirons les rayons *ST* & *SV*, qui coupent l'arc *MT* aux points *T* & *t*, pour avoir le petit arc *Tt*, élément de *Translation*, comme M. Newton l'apelle, c'est-à-dire, la vitesse rélative avec laquelle la couche *B* se sépare de ses voisines *A* & *C*. Soit donc, comme auparavant, la distance indéterminée SM ou $SN = x$, MT ou $NV = v$; nous aurons $Tt = TM - tM = TM - VN + VN - tM$. Or $TM - VN$ n'est autre chose que la differentielle de l'arc TM prise négativement, je veux dire, que $TM - VN = - dv$, & $VN - tM$ (parce que $SN : NM = VN : VN - tM) = vdx : x$. Et partant $Tt = - dv + vdx : x = (vdx - xdv) : x$. La

même

même chose se peut conclure en différentiant la vitesse angulaire, dont la mesure est l'angle TSM ou $v:x$. Car $VSN - TSM = -TSt = -d(v:x) = (vdx - xdv):xx$. Mais $TSt = Tt:TS = Tt:x$; donc $Tt = (vdx - xdv):x$, comme auparavant.

XXIII.

Tout cela étant ainsi trouvé, il en faut déduire le *momentum*, ou l'efficace du frottement des couches, en prenant les trois raisons, qui en doivent déterminer l'effet total. 1°. La pression des couches exprimée par $x\int(vvdx:x)$, 2°. La vitesse rélative de translation ou de séparation de leur surfaces contiguës, $(vdx - xdv):x$. 3°. La longueur du Levier, c'est-à-dire, le rayon des couches qui est $= x$. Ainsi la raison composée de ces trois raisons $x \times \frac{vdx - xdv}{x} \times x\int\frac{vvdx}{x}$, ce qui fait $(vxdx - xxdv) \times \int(vvdx:x)$ donnera le *momentum* du frottement, en vertu duquel la surface concave de chaque couche est poussée en avant, pendant que sa surface extérieure ou convéxe en est autant précisément repoussée en arriere; dont l'effet est que la couche sera conservée dans sa circulation uniforme. Mais afin que cela arrive généralement à toutes les couches, il n'y a qu'à faire $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x) =$ à une quantité constante que je nommerai cdx. Ainsi j'ai cette équation $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x) = cdx$, qui détermine la nature de la courbe des vitesses RPF; par conséquent aussi la loi de la vitesse réelle du tourbillon pour chaque distance au centre S. Or comme je remarque que dans le facteur du premier membre $vxdx - xxdv$ les deux indéterminées v & x montent ensemble à la même dimension, savoir à la seconde cela me fait connoitre que v peut être égal à une certaine puissance de x. Pour la trouver, suposons $v = x^n$, & partant $dv = nx^{n-1}dx$; & substituons ces deux valeurs dans notre équation $(vxdx - xxdv)\int(vvdx:x) = cdx$; le pre-

T 3 mier

mier membre $(vxdx - xxdv)\int(vvdx : x)$ [après avoir pris l'Integrale de $vvdx : x$, ou de $x^{2n-1}dx$, qui est $\frac{1}{2n}x^{2n}$] se change en $(x^{n+1}dx - nx^{n+1}dx)\times\frac{1}{2n}x^{2n}$, ou $\frac{1-n}{2n}\times x^{3n+1}dx$. Nous avons donc cette équation $\frac{1-n}{2n}x^{3n+1}dx = cdx$; laquelle doit être identique, afin qu'elle satisfasse à l'équation trouvée, c'est pourquoi il faut faire $3n+1=0$, & $(1-n):2n=c$, ce qui donne $n=-\frac{1}{3}$ & $c=-2$, par conséquent $x^{3n+1}=x^{0}=1$. La valeur de n étant ainsi déterminée, je dis que notre Equation differentielle $(vxdx - xxdv)\int(vvdx : x) = cdx$ convient à cette autre algébrique $v = x^{-\frac{1}{3}} = 1 : \sqrt[3]{x}$.

XXIV.

D'où l'on voit que la vitesse v, avec laquelle la matiere du tourbillon circule, est reciproquement proportionnelle à la racine cubique de sa distance au centre S. Il est présentement aisé d'en tirer aussi les tems périodiques; car puisque ces tems sont directement comme les circonferences à parcourir & reciproquement comme les vitesses, & que les circonferences sont comme les rayons, le tems d'une circulation sera proportionel à $x : v = x\sqrt[3]{x} = x^{\frac{4}{3}}$. Je dis donc que les tems périodiques des parties du fluide sont en raison sesquitripliquée, ou comme les racines cubiques de la quatrième puissance des distances à l'axe du cylindre, au lieu que M. NEWTON les a trouvées seulement en raison des simples distances.

XXV.

Examinons à présent l'autre cas, où le corps S qui tourne uniformément sur son centre est une Sphére, laquelle formera autour

autour d'elle un tourbillon ſphérique, que nous diviſerons par la penſée, avec M. NEWTON, en une infinité de couches concentriques, d'épaiſſeur égale & infiniment petite. Il s'agit de trouver la loi des viteſſes que ces couches auront dans le plan de l'Equateur, je veux dire, dans le plan qui paſſe par le centre perpendiculairement à l'axe lorſque chacune de ces couches aura acquis ſon mouvement uniforme. La méthode eſt tout-à-fait la même, que celle dont je me ſuis ſervi pour le cas précédent. On conſidérera ſeulement chaque couche comme diviſée en zones d'une largeur infiniment petite par des cercles paralleles à l'Equateur. Et d'autant que ces zones d'une même couche doivent achever leur révolution dans le même tems, parce que les couches ſont regardées comme ſolides, il eſt viſible que nous n'avons qu'à chercher la viteſſe d'une ſeule de ces zones pour en tirer enſuite le tems d'une révolution de toute la couche ſphérique. Prenons donc la premiere zone contiguë à l'Equateur (*Fig.* 1.). D'abord il eſt manifeſte, que ſi *GMC* répréſente l'Equateur ou le circuit de la zone conſidérée avec ſon épaiſſeur *Gg* infiniment petite & égale dans toutes les couches ſphériques, la quantité de matiere contenuë dans la zone *GMC*, dont l'épaiſſeur eſt *Gg*, ſera ici proportionelle au produit du quarré de *SG* par *Gg*, parce que les zones ſemblables en différentes couches ſphériques ſont comme les quarrés des rayons; & partant ladite quantité de matiere ſera exprimée par $xxdx$, ce qui multiplié par la force centrifuge abſoluë $vv:x$, me donne $xxdx \times (vv:x) = vvxdx$ pour la force centrifuge de la matiere qui remplit la zone de l'épaiſſeur *Gg*. Enſuite pour connoitre la preſſion que la ſurface concave de la zone ſemblable *ERP* priſe ſur la derniere couche ſphérique doit ſouffrir par l'effort dilatatif de la ſeule zone *GMC* ſans l'aide des précédentes, il faut faire ici cette analogie: Comme le quarré de la circonference GMC, au quarré de la circonference ERP, ou comme le quarré du rayon SG [xx] eſt au quarré du rayon SE [aa], ainſi l'effort dilatatif de la zone GMC [$vvxdx$] eſt à un quatrieme $aavvdx:x$ TAB. XLVI. *Fig.* 1.

qui

qui marque la pression que ce même effort exerce sur la surface concave de la zone *ERP*. Donc l'Intégrale de cela, qui est $aa\int(vvdx:x)$ donne la pression totale que toutes les zones semblables des couches inférieures comprises entre *S* & *GMC* transférent conjointément sur la surface concave de la derniere zone *ERP*. En changeant présentement la déterminée a en x; nous aurons, pour ce cas du tourbillon sphérique, $xx\int(vvdx:x)$ pour la force de pression entiere que la zone, dont le rayon est x, doit soutenir. Et achevant le reste comme dans le cas précédent, nous aurons le *momentum* du frottement pour faire circuler les zones supérieures par les inférieures $= x \times \frac{vdx - xdv}{x} \times xx\int(vvdx:x) = (vxxdx - x^3dv)$ $\int(vvdx:x)$, ce qui doit être égal à une quantité constante cdx. Suposons ici comme ci-devant, que $v = x^n$ & $dv = nx^{n-1}dx$; nous trouverons en faisant le calcul, que $n = -\frac{2}{3}$, & $c = -\frac{5}{4}$, d'où on conclut que l'équation differentielle $(vxxdx - x^3dv)$ $\int(vvdx:x)$ se réduit à cette algébrique $v = x^{-\frac{2}{3}} = 1 : \sqrt[3]{xx}$.

XXVI.

Cela fait voir que, dans un tourbillon sphérique, la vitesse des couches sous l'Equateur est réciproquement comme la racine cubique du quarré de la distance au centre; ou bien, parce que chaque couche fait sa révolution avec toutes ses parties ensemble, comme une Sphére solide qui tourne sur son axe, il est clair que la vitesse, sous tel parallele que l'on voudra, sera reciproquement proportionnelle à la racine cubique du quarré de la distance perpendiculaire à l'axe. C'est pourquoi les tems périodiques de differentes couches, étant toûjours proportionels à $x:v$, s'exprimeront dans ce cas par $x^{\frac{5}{3}}$, c'est-à-dire, que les parties d'un tourbillon formé par le tournoyement d'une Sphére font la révolution en des tems qui sont comme les racines cubiques de la cinquieme puissance de

ce de leurs éloignemens du centre de la Sphére. Mais M. NEWTON les a trouvés, par son raisonnement erroné, comme les quarrés de ces éloignemens.

XXVII.

On peut remarquer en passant une particularité assés curieuse; c'est que les tems périodiques, trouvés par M. NEWTON pour le tourbillon cylindrique en raison de x, sont trop petits; devant être en raison de $x^{\frac{4}{3}}$; mais au contraire, ceux qu'il trouve pour le tourbillon sphérique en raison de xx sont trop grands, puisqu'ils ne sont véritablement que comme $x^{\frac{5}{3}}$. D'où il paroit, que son erreur l'a fait écarter de la Règle de KEPLER, pour le premier cas dans le défaut, & pour le second dans l'excès, de part & d'autre plus qu'il n'étoit juste. En effet, chacune de nos deux proportions aproche bien plus de l'exactitude de cette règle, qui veut, que les tems périodiques des Planètes soient en raison sesquipliquée des distances moyennes, ou comme $x^{\frac{3}{2}}$. Or $x^{\frac{4}{3}}$ que nous avons trouvé, marque une raison un peu plus petite que celle de $x^{\frac{3}{2}}$, & $x^{\frac{5}{3}}$ en donne une un peu plus grande que $x^{\frac{3}{2}}$.

XXVIII.

Ne seroit-il donc pas permis de hazarder à cette occasion quelque conjecture en faveur des tourbillons Cartésiens? On pourroit dire que puisque la figure cylindrique du Soleil donne un peu trop peu, & la figure sphérique un peu trop; il y a, peut-être, une figure à donner au Soleil entre le Cylindre & la Sphère, qui produiroit au juste ce qu'il faut. Mais donnera-t-on au Soleil une autre figure que celle d'un Globe? Je répondrois; pourquoi non? Les Physiciens d'aujourd'hui ne sont-ils pas du sentiment, que la Terre, les Planètes, en-

fin tous les Corps céleſtes qui tournent ſur leur centre, doivent avoir une figure, non pas tout-à-fait ſphérique, mais celle d'un Sphéroïde, ſoit oblong, comme M. DE MAIRAN en a montré la poſſibilité (voy. les *Mém. de l'Académie* de 1720,) ſoit aplati fait par la converſion d'une Ellipſe autour de ſon petit axe? Au moins, les obſervations des Aſtronomes ont vérifié cela dans Jupiter, dont la diſtance d'un Pole à l'autre a été obſervée plus petite que le diamètre de ſon Equateur. Pourquoi donc le Soleil, qui tourne auſſi ſur ſon axe, témoin le mouvement de ſes taches, en ſeroit-il exempt? au lieu qu'il ſemble qu'il devroit être le plus ſujet à cet aplatiſſement vers ſes poles, à cauſe qu'il eſt vraiſemblablement compoſé d'une matiere entierement fluide. Il faut peut-être peu de difference entre la longueur de ſon Axe & le diamètre de ſon Equateur, pour que les tems périodiques des couches du tourbillon ſolaire ſuivent éxactement la Règle de KEPLER.

XXIX.

D'ailleurs, nous avons ſupoſé juſqu'ici, avec M. NEWTON, une parfaite uniformité dans tout le fluide du tourbillon; mais outre l'inégale fluidité qui s'y trouve, ſelon toutes les aparences, à meſure qu'on s'éloigne du centre, ce que M. SAURIN a fort bien remarqué; on peut, & même on doit, ſupoſer auſſi une differente denſité dans la matiere céleſte; je parle de cette matiere qui compoſe proprement le tourbillon, & laquelle, par le continuel effort de s'éloigner du centre, retient les Planètes dans leurs Orbites, & les entraine; en ſorte que les Planètes occuperont chacune telle ou telle région dans le tourbillon; où la matiere céleſte leur eſt convenable en denſité. Car ſi le tourbillon étoit, par toute ſon étenduë, uniformément denſe, & que les Planètes fuſſent auſſi d'une même denſité, il eſt viſible qu'elles ſeroient toutes également éloignées du Soleil, & feroient leurs périodes en tems égaux. Voyons donc quelle loi de denſité doivent obſerver les

les differentes couches du tourbillon, afin que les tems périodiques suivent précisément la Règle de KEPLER. Le calcul n'en est pas trop difficile, après celui que j'ai fait pour l'uniformité de la matiere du tourbillon. Le voici; en considerant le Soleil de figure sphérique, qui est le cas le plus convenable: sans avoir besoin de recourir au Sphéroïde oblong ou aplati.

X X X.

Puisque tout revient à bien suputer la pression que les couches inférieures communiquent aux supérieures, & que nous avons montré §. 25, que si toutes les couches étoient également denses, la pression de chacune sous l'Equateur, seroit proportionnelle à $xx\int(vvdx:x)$, il faut ici faire entrer la densité que je supose proportionnelle à x^p, je veux dire à une certaine puissance de la distance x, dont je chercherai l'exposant p. Je raisonne donc ainsi. La quantité de matiere contenuë dans la zone *GMC* (*Fig.* 1.) qui est contiguë à l'Equateur du tourbillon, ou plûtôt de sa couche, dont le rayon est x, est proportionnelle au produit, non seulement du quarré de SG par Gg, mais encore par la puissance cherchée de SG, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à $xx \times dx \times x^p$. Donc cette quantité de matiere sera exprimée par $x^{p+2}dx$. D'où l'on tire, comme j'ai fait §. 25, $xx\int vvx^{p-1}\,dx$ pour la pression entiere de la zone, dont le rayon est x. Ainsi le *momentum* du frottement sera $= x \times \frac{vdx - xdv}{x} \times xx\int vvx^{p-1}\,dx$ $= (vxxdx - x^3dv) \times \int vvx^{p-1}\,dx$. Faisons cela $= cdx$, & suposons [pour le réduire à une équation algébrique] que $v = x^n$, & $dv = nx^{n-1}\,dx$; nous trouverons que $n = (-p-2):3$, & $c = (p-4):(p+5)$. On aura donc la vitesse $v = 1:\sqrt[3]{x^{p+2}}$, & le tems périodique $[x:v] =$

TAB. XLVI. *Fig.* 1.

$x\sqrt[3]{x^{p+2}} = x^{(p+5):3}$. Si nous voulons rendre présentement les tems périodiques conformes à la Règle de KEPLER, il faut que $x^{(p+5):3}$ soit $= x^{3:2}$, & partant $(p+5):3 = 3:2$ ce qui donne $p = -\frac{1}{2}$. Donc, afin que cette Règle ait lieu, il faut que la densité de la matiere du tourbillon soit réciproquement comme la racine quarrée des distances au centre. Substituant cette valeur de $p = -\frac{1}{2}$ dans l'expression de la vitesse $v = 1 : \sqrt[3]{x^{p+2}}$, nous aurons $v = 1 : \sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}+2}} = 1 : \sqrt[3]{x^{3:2}} = 1 : \sqrt{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$, c'est-à-dire que la vitesse sera aussi réciproquement comme la racine quarrée des distances, conformément à la Règle de KEPLER. Ainsi la vitesse & la densité sont en même raison.

XXXI.

On trouvera peut-être étrange que la matiere soit plus dense près du centre que loin de-là; vû qu'il semble, que le fluide du tourbillon étant composé de parties héterogènes, les plus denses, ayant une plus grande force centrifuge, devroient gagner le dessus, & se ranger vers la circonference du tourbillon; mais pour obvier à cette difficulté, on peut concevoir deux sortes de densité, l'une qui consiste dans une plus grande grosseur des particules, l'autre dans une plus grande multitude de particules contenuës dans un volume égal, lesquelles, quoique moins grossiéres, peuvent être si serrées que prises ensemble elles feront une plus grande quantité de matiere. Or il est fort probable, que vers le centre du tourbillon, les particules, quoiqu'extrêmement subtiles, sont aussi beaucoup plus serrées que celles qui sont vers la circonference, lesquelles, quoique plus grossiéres, ne laissent pas d'être beaucoup plus écartées les unes des autres, nageant dans un fluide infiniment subtil, qui passe librement par les plus petits interstices des particules du tourbillon; lequel fluide, par conséquent,

ne

ne fait que remplir le vuide, sans faire aucune résistance aux Corps céleſtes emportés par le tourbillon.

XXXII.

Nous voilà donc enfin débaraſſés de la grande objection, que l'on a fait tant valoir contre le Syſtème des tourbillons. Les Adverſaires ne manqueroient pas, ſans doute, d'y inſiſter perpétuellement, ſi je n'avois pas démontré, une bonne fois, la fauſſeté des deux Propoſitions de M. NEWTON, qui ont fourni la matiere à cette objection. Ainſi on m'accordera que j'ai fait voir par des principes inconteſtables, que l'effet des tourbillons peut conſpirer merveilleuſement avec la Régle de KEPLER, quant à la loi des tems périodiques des Planètes.

XXXIII.

Après tout ce détail, dans lequel il m'a fallu entrer néceſſairement pour mettre les tourbillons à l'abri des objections, & par lequel je ne crois pas avoir fait une choſe inutile, ni déſagréable aux Fauteurs des tourbillons, qui m'en ſauront peut-être bon gré; après ce détail, dis-je, je me ſuis frayé le chemin pour rendre raiſon, avec plus de ſuccès, de ce qu'on demande. C'eſt, ſans doute, une autre difficulté, pour le moins auſſi grande que celles que nous venons de diſſiper, qui eſt de dire pourquoi les Orbites des Planètes ne ſont pas des cercles éxacts, mais des Ellipſes; pourquoi le Soleil, ou le centre des tourbillons, n'eſt pas auſſi le centre de ces Ellipſes: Enfin la plus grande difficulté eſt d'expliquer la cauſe qui fait que les axes de ces Ellipſes ſont mobiles; c'eſt en quoi conſiſte préciſément la queſtion de l'illuſtre ACADE'MIE. Je vais donc ſatisfaire aux deux points de notre ſujet, ſelon l'ordre de diviſion que j'ai faite §. 2, en montrant 1°. que la figure elliptique des Orbites peut fort bien ſubſiſter avec les tourbillons dans toutes les circonſtances qu'on remarque. 2°. Que les Ap-

fides doivent être mobiles, ou ce qui eſt la même choſe, que le grand axe des Orbites elliptiques change de poſition par raport aux étoiles fixes, dont je dois expliquer la cauſe.

XXXIV.

Je ne veux rien changer dans la figure ſphérique des couches du tourbillon ſolaire; je les laiſſe même parfaitement concentriques au Soleil, au moins juſqu'à une vaſte étenduë au-delà de Saturne; ce qui rendra entiérement infructueuſe l'objection de M. Newton, qui veut prouver que les parties du tourbillon ne peuvent pas décrire des Ellipſes; (voy. le *Scholium* à la fin du ſecond Livre de ſes *Principes*). Sa démonſtration, contre laquelle on pourroit faire bien des exceptions, ne nous touche pas. Il eſt certain qu'une Planète qui ſeroit d'abord placée dans une couche, dont la matiere fût avec elle de la même denſité, ſuivroit éxactement le cours de cette couche, & décriroit par conſéquent un cercle parfait autour du centre du tourbillon. Mais voyons ce qui doit arriver, ſi une Planète au commencement de ſon exiſtence ne ſe trouve pas placée dans une couche qui ſoit également denſe que la Planète. Il eſt naturel que, ſuivant ce que j'ai expliqué ci-deſſus, cette Planète n'étant pas dans ſon point d'équilibre, elle doit ou deſcendre, ou monter, ſelon qu'elle eſt ou plus, ou moins denſe que la matiere du tourbillon qui l'environne. Remarqués que je prends toûjours le mot de denſité dans le ſens que je lui ai donné §. 31. Mais pendant qu'elle change ainſi de place en ligne droite, par raport au centre du tourbillon; elle eſt auſſi emportée autour de ce centre par le mouvement circulaire de la matiere céleſte; il en réſultera donc dans la Planète un mouvement composé, qui lui fera décrire une ligne differente de la circonference d'un cercle. Il s'agit de faire comprendre que cette ligne ſera une Ellipſe, dont le grand axe ne changera ſenſiblement de poſition qu'après un grand nombre de révolutions.

XXXV.

XXXV.

Soit *S* le centre d'un cercle *CAB*, qui repréſente la ſection d'une couche ſphérique, de la même denſité que la Planète *P* placée un peu au-delà de cette couche. Si on fait abſtraction du mouvement circulaire, ou que l'on ſupoſe que la Planète *P* ſoit empêchée d'être emportée pat le tourbillon, mais enſorte qu'elle puiſſe pourtant deſcendre, ou ſe mouvoir librement ſur le rayon *PS*; on conçoit aiſément qu'elle deſcendra en effet, avec accélération, pendant qu'elle ſe trouve encore au-deſſus de *C* dans une matiere moins denſe, & qu'étant parvenuë en *C*, elle aura acquis ſa plus grande viteſſe; delà elle continuera de deſcendre, mais avec un mouvement retardé, à meſure qu'elle paſſe par des couches plus denſes, juſqu'à ce que le mouvement de deſcente ſoit entierement détruit en *D* par la réſiſtance de la matiere des couches inférieures. Or la Planète ne pouvant ſubſiſter en *D*, parce qu'elle ſeroit dans une matiere trop denſe; elle ſera obligée de remonter en *P* avec un mouvement, d'abord accéleré, & puis retardé. De *P* elle redeſcendra en *D*, puis remontera, & de cette maniere, il ſe ſera une réciprocation comme les oſcillations des Pendules, ou comme les balancemens du vif-argent dans le tuyau du Baromètre, que l'on obſerve quand on le ſecouë un peu. Il faut remarquer que *CD* doit être plus petit que *CP*, parce que les couches inférieures ayant plus de denſité que les ſupérieures, la Planète en deſcendant depuis le point d'équilibre *C*, où elle a acquis ſa plus grande viteſſe, rencontre plus de réſiſtance, qu'en montant du même point *C*, avec la même viteſſe qu'elle avoit acquiſe en deſcendant. TAB. XLVI. Fig. 3.

XXXVI.

Donnons à préſent auſſi à la Planète le mouvement tranſlatif; je parle de celui auquel elle s'accommode en entrant ſucceſſivement dans une autre couche qui l'emporte au tour

de

de *S* par un petit arc élémentaire. Concevons donc que la Planète, entraînée par le fluide du tourbillon, parte du point de sa plus grande hauteur *P*, en sorte que si elle ne descendoit pas, elle iroit conjointément avec la couche *PHR*, ne faisant autre chose qu'obéïr à son mouvement & recevoir sa vitesse. Mais puisque la Planète est obligée de descendre, en même tems qu'elle est emportée par le tourbillon, elle quittera à tout moment la couche où elle est, pour entrer dans une autre dont elle va prendre le mouvement de circulation. Il est manifeste, comme je l'ai déja insinué, que la Planète, pour satisfaire à ses deux mouvemens, continuëra son chemin suivant une courbe particuliére *PLEM*, dont je chercherai la figure.

XXXVII.

Suposons d'abord, qu'il faille précisément le même tems à la Planète pour descendre de *P* en *D*, qu'il faut à la matiere céleste pour lui faire décrire la moitié d'une révolution *PLE*; il suit de cette suposition, que pour achever l'autre moitié *EMP*, il faut encore le même tems, qui est aussi celui dans lequel la Planète remonteroit de *D* en *P*. Et puisque les vitesses accélerées & retardées de *P* en *D* sont les mêmes, dans un ordre renversé, que celles de *D* en *P*; il faut que la même chose se fasse à rebours, lorsque la Planète décrit la moitié *EMP*, qui se faisoit en décrivant la premiere moitié *PLE*. Donc ces deux moitiés *PLE* & *PME* sont deux courbes égales & semblables, ou plûtôt deux branches d'une même courbe: Donc elles font ensemble la courbe entiere *PLEMP*, en forme d'Ellipse, qui a pour axe la droite *PE*, dont l'extrêmité *P* est l'Aphélie & l'autre *E* le Périhélie. Ayant prolongé l'axe *PE*, qui coupera les cercles *PHR* & *CAB* en *E* & *G*, nous aurons $GE = PD$; dont SE ($SG - GE$) $= SP - PD = SD$, c'est-à-dire, que la distance de l'Aphélie *P* au Soleil *S* surpasse celle du Périhélie *E*, de

de l'intervalle *PD* entre les deux couches extrêmes, qui sont les limites de toutes celles que la Planète traverse, en faisant chaque révolution.

XXXVIII.

Mais pour connoitre la nature de cette courbe elliptique *PLEM*, & afin d'être assuré que c'est une véritable Ellipse, une des sections coniques, & que le point *S* en est le foyer. On voit bien, sans que je le dise, que cela dépend en partie de la vitesse des couches, qui est connuë, étant comme $1 : \sqrt{x}$, ou en raison soudoublée réciproque de leurs distances au Soleil, & en partie de la vitesse accélerée & ensuite retardée de la descente de *P* en *D*. Or la loi, suivant laquelle la variation de cette vitesse se doit faire, afin que ce mouvement, combiné avec la circulation des couches, oblige la Planète de décrire une telle Ellipse; cette loi, dis-je, se découvre, en faisant attention avec combien de force la Planète est poussée ou repoussée, quand elle se trouve dans une couche d'une densité differente de la sienne. Connoissant ainsi les loix de la vitesse translative, & de celle de la descente, on sera en état de déterminer la nature de l'Ellipse *PLEM*. Car soit *N* un point quelconque, auquel la Planète soit parvenuë, & que l'on tire la droite *SN*, & une autre *Sn*, infiniment proche. Soit aussi décrit du centre *S* l'arc *NI* & son plus proche *ni*, qui coupe *SN* au point *e*; il est clair que *Ii* ou *Ne* est à *ne*, comme la vitesse acquise en *I* si la Planète tomboit perpendiculairement de *P* en *I*, est à la vitesse de la couche *IN*. Ainsi le raport de *Ne* à *en* du triangle élémentaire *Nen* étant déterminé; on en trouvera la nature de la courbe *PLM* par la méthode des tangentes inverse. Ou bien, on pourra proceder synthetiquement, en suposant que *PLM* est une Ellipse ordinaire, dont *S* soit le foyer, & chercher ensuite par la méthode differentielle directe le raport de *Ne* à *ne*, pour en tirer la vitesse requise en

 I,

I, afin que nôtre courbe devienne l'Ellipse supofée. Je n'ajoute pas le calcul, parce qu'il feroit long & pénible. Il suffit, pour la premiere partie de la question d'avoir indiqué la cause qui peut produire la figure elliptique des Orbites des Planètes : les principes d'où je l'ai déduite sont clairs, intelligibles, & admis de tous ceux qui entendent la Méchanique ; c'est, je crois, tout ce qu'on prétend sur cet article, & je ne pense pas qu'on trouve la moindre difficulté dans la supofition que je fais, que les oscillations des Planètes persévérent sans être alterées par la résistance externe que leur opose la matiere du tourbillon, comme il arrive à un Pendule agité dans notre air grossier, où nous voyons que l'étenduë des oscillations diminuë enfin sensiblement par la résistance de l'air, jusqu'à l'entiere extinction du mouvement. Car l'énorme grosseur des Globes des Planètes, jointe à l'extrême rareté de la matiere du tourbillon où elles nagent, fait concevoir aisément, sans le secours du calcul de M. NEWTON, que dans plusieurs centaines de siécles, il n'arrivera point de changement sensible, ni à la durée, ni à l'étenduë des oscillations que les Planètes ont une fois commencé de faire. Passons donc à l'autre partie, où on demande, pourquoi le grand axe de ces Ellipses change de position : c'est à quoi il me sera facile de satisfaire ; toute la réponse pouvant être tirée de mon explication comme un simple Corollaire, de la maniere qui suit.

XXXIX.

Il est visible que les Apsides *P* & *E* répondroient constamment aux mêmes points du Ciel, si le tems périodique pour achever une révolution entiere *PLMP* étoit précisément égal au tems que la Planète employeroit (si elle n'étoit point emportée) à descendre de *P* en *D* & à remonter de *D* en *P*, poussée & repoussée par la seule force qui vient de l'inégalité de densité, comme je l'ai expliqué ci-dessus. Mais qu'est-ce qui empêche de supofer, que le tems périodique d'une révolution

lution n'est pas parfaitement égal au tems des deux oscillations? d'autant plus que nous savons d'ailleurs, que dans la nature des choses il est presque impossible de trouver deux productions d'une égalité parfaite & prise à la rigueur géométrique. Il nous est donc permis de suposer que la Planète fait sa révolution un peu plûtôt que deux de ses oscillations. Ainsi suposons cela comme une chose fort naturelle, & voyons quel effet il en résultera.

X L.

La Planète, qui quitte le point *P* & qui, après avoir parcouru tout le Ciel, revient à la ligne *SP*, n'aura pas encore achevé, tout-à-fait, de remonter à la même hauteur *SP*, c'est-à-dire, il lui manque encore quelque chose pour revenir à son Aphélie. Donc la Planète, après la premiere révolution, croisera la ligne *SP* obliquement, quoique bien près, au-dessous de *P*, & consumera encore un peu de tems avant que d'atteindre la circonference *PHR* dans un point π, qui sera le lieu de l'Aphélie après la premiere révolution. On voit donc une raison physique, déduite du Systême des tourbillons, 1°. Pourquoi les Orbites des Planètes sont des Ellipses. 2°. Pourquoi le grand axe de ces Ellipses change de position, ou pourquoi leur Aphélie répond successivement à differens points du Ciel. Ce sont les deux articles ausquels j'avois à satisfaire.

X L I.

Il faut, suivant mon explication, que le mouvement de l'Aphélie soit uniforme, & qu'il se fasse d'Occident en Orient selon l'ordre des Signes, au moins pour les Planètes principales; mais ce mouvement est si lent, que le petit arc $P\pi$, qui est parcouru dans le tems d'une révolution, est insensible, & qu'il ne peut devenir sensible qu'après un grand nombre de révolutions. Aussi cela fait-il que les Astronomes ne pouvant pas faire des observations assés fréquentes sur ce sujet, ne sont

X 2 pas

pas d'accord combien il faut donner de mouvement à l'Aphélie de chaque Planète. M. NEWTON ſupoſe comme vrai, que le progrès de l'Aphélie de Mars, ſuivant l'ordre des ſignes, eſt tel qu'en cent années il n'avance que de 33 min. 20 ſecondes, enſorte qu'il faudroit 648 ſiécles pour une ſeule révolution de l'Aphélie de Mars; d'où il conclut, par ſa Théorie fondée ſur l'attraction mutuelle entre les Planètes, que les Aphélies des autres Planètes inférieures doivent avancer auſſi dans l'ordre des ſignes en raiſon ſeſquipliquée de leurs diſtances au Soleil; enſorte que dans un ſiécle l'Aphelie de la Terre avancera de 17 min. 14 ſec. celui de Venus de 10 min. 53 ſec. & enfin celui de Mercure de 4 min. 16 ſec. Il ſemble qu'il a établi cette proportion ſeſquipliquée ſur une pure aparence & ſans aucun fondement; car je ne vois pas, & je crois que bien d'autres plus clairvoyans que moi ne voyent pas non plus, comment la gravitation de l'une ſur l'autre (quand on l'accorderoit) demande une telle proportion; d'autant plus que, ſelon lui, cette même gravitation produit ſur l'Aphélie de Saturne un effet entierement irrégulier & contre ſa règle; puiſqu'il veut que cet Aphélie ſoit tantôt avancé, tantôt reculé par l'attraction de Jupiter, dans le tems de conjonction de ces deux Planètes. Ne ſemble-t-il pas que M. NEWTON devroit dire la même choſe de chaque Planète inférieure? Car s'il y avoit une telle attraction, la Terre, par exemple, étant dans ſon Aphélie, quand elle précède Jupiter par raport au Zodiaque, en ſeroit retirée; & au contraire elle en ſeroit avancée, quand Jupiter la précède; c'eſt-à-dire, que la même force que Jupiter fait influer ſur la Terre cauſeroit des effets entierement opoſés, avant & après la conjonction de la Terre & de Jupiter. Mais on ne remarque rien de ſemblable, & M. NEWTON lui-même ne l'infere pas de ſon hypothèſe, comme il le devroit faire.

XLII.

Quant au mouvement de la Lune, il eſt ſujet à tant d'irrégularités, qu'on a de la peine à le bien mettre en règles. Cela vient de ce que la Lune étant Satellite de la Terre, elle eſt emportee autour de celle-ci par ſon tourbillon particulier, lequel lui-même, envelopé dans le tourbillon ſolaire & entrainé autour du Soleil, ſoufre de grandes variations à bien des égards, auſquelles il ne ſeroit pas ſujet s'il étoit libre & hors d'un autre tourbillon, & que le centre de la Terre fût immobile, comme celui du Soleil ou d'une autre Etoile fixe. D'où il eſt clair 1°. que le tourbillon de la Terre ſerré comme il eſt entre les couches du grand Tourbillon ſolaire, qui le terminent par en haut & par en bas, doit ſe retrécir dans la ligne droite tirée par les centres du Soleil & de la Terre, & s'étendre ſuivant la perpendiculaire à cette ligne, à peu près comme une veſſie preſſée entre deux plans, ſe doit aplatir. 2°. Comme la matiere du tourbillon terreſtre, quand elle eſt entre la Terre & le Soleil, ſe meut à contre ſens du mouvement de la matiere du tourbillon ſolaire; mais quand elle circule à l'opoſite, où elle eſt le plus éloignée du Soleil, elle va de même côté avec le grand tourbillon; il eſt viſible que la partie d'en bas du tourbillon terreſtre, trouvant plus de réſiſtance, & partant plus de preſſion que celle d'en haut, il faut que l'interſtice entre la Terre & l'extrêmité inférieure de ſon tourbillon ſoit plus étroit que l'interſtice opoſé, qui eſt entre la Terre & l'extrêmité ſupérieure. D'où il ſuit 3°. que les ſections des couches, qui compoſent le tourbillon de la Terre, ſont d'une figure inégale & differente du cercle, non point pourtant comme les Ellipſes ordinaires, qui ont les concavités opoſées égales, telles que DESCARTES & quelques autres ont conçû l'Orbite de la Lune, en plaçant la Terre dans le centre de cet Orbite. Mais je conçois la choſe à peu près ainſi.

X L I I I.

TAB. XLVI. *Fig.* 4. Soit *T* le centre de la Terre (*Fig.* 4) *PTS* la ligne droite tirée vers le Soleil, à laquelle soit conçûë la perpendiculaire *ATB*. Du centre *T*, & sur *AB* comme sur le grand axe, soient décrites deux demi-Ellipses *ACB* & *AFB*; dont le petit demi-axe superieur *TC* soit un peu plus grand que l'autre petit demi-axe inférieur *TF*. La courbe entiere *CAFBC* representera assés bien la section d'une couche du tourbillon terrestre ; tellement que si la Lune étoit de la même densité que la matiere de cette couche, & qu'elle fût d'abord placée au point *C*, elle seroit obligée de suivre le cours de la couche, & décriroit par conséquent la ligne *CAFB*. Mais pour donner une idée générale des principales circonstances qui accompagnent le mouvement de la Lune, il n'y a qu'à suposer, suivant ma Théorie, que la Lune ait été mise primitivement au delà de *C*, savoir en *P* où la matiere du tourbillon de la Terre est moins dense que la Lune, & où les couches commencent à devenir d'une rondeur plus uniforme & plus aprochante de la figure sphérique (car il est à remarquer, qu'à mesure que la matiere du tourbillon est plus éloignée du centre de son mouvement, par conséquent moins pressée par la proximité de la Terre, les couches affecteront plus la figure sphérique). Cela étant, concevons le cercle *PHGR*, décrit du centre *T* & du rayon *TP*, qu'on pourra nommer la limite des Apogées de la Lune. Soit aussi *PD* l'intervalle des oscillations qu'elle feroit, si n'étant point emportée par le tourbillon, elle pouvoit descendre & remonter, à cause de la difference de densité. Il est clair que la couche qui passe par *D* sera la limite des Perigées, qui sera plus aplati que la couche d'équilibre *CAFB*. Ainsi elle coupera le grand axe aux points *I* & *K* plus près de *A* & *B*, que n'est le point *D* du point *C*. C'est pourquoy l'intervalle des oscillations *HI* & *KR* sera plus petit que l'intervalle *PD*; mais puisque *CD* est

est un peu plus grand que *FE*, & par récompense *FG* un peu plus grand que *FC*, on voit que les deux intervalles *PD* & *GE* doivent être à peu près égaux, comme le sont exactement les deux autres *HI* & *KR*.

XLIV.

Après tous ces préparatifs, considerons la route que doit tenir la Lune dans le tourbillon, & les Phénomènes qui en découlent. Si les oscillations par *PD* & *GE* étoient parfaitement isochrones aux oscillations par *HI* & *KR*, & que le tems de deux oscillations fût aussi parfaitement égal au tems périodique de la Lune, on voit bien qu'en combinant le mouvement translatif avec le mouvement d'oscillation, l'Orbite *PLEM* qui en résultera, devroit être toûjours la même pour chaque révolution, de sorte que l'Apogée *P* & le Perigée *E* arriveroient toûjours dans les syzygies, & les points de moyennes distances dans les quadratures. Mais les intervalles *PD* & *GE* étant plus grands que les intervalles *HI* & *KR*, il est raisonnable de dire, qu'il faut plus de tems pour faire une oscillation par *PD* ou *GE*, que pour en faire une par *HI* ou *KR*. Voici les conséquences que j'en tire.

XLV.

Quand la Lune part de son Apogée, que je supose être présentement dans les syzygies, par exemple en *P*, il faudra plus qu'une révolution entiere pour qu'ayant fait deux oscillations elle soit remontée à son Apogée, qui sera par conséquent avancé en π. Après une seconde révolution, l'Apogée, sera avancé d'avantage en p, mais non pas autant qu'il l'étoit après la premiere révolution; parce que les tems des oscillations commencent à diminuer. Et comme ils diminuent jusqu'à ce que l'Apogée soit parvenu dans la quadrature, on conçoit que le progrès de l'Apogée doit être retardé jusqu'en *H*; que delà il doit

doit être derechef accéleré jusqu'en *G*; puis retardé jusqu'en *R*, & enfin accéleré jusqu'en *P*. L'avancement moyen sur chaque révolution de la Lune est d'environ 3½ degrés, ce qui fait que l'Apogée principal employe à peu près 9 ans à parcourir tout le cercle *PHGRP*. Je dis le principal, pour le distinguer des deux autres Apogées particuliers, qui se trouvent toûjours dans les quadratures, aux extrêmités du grand axe *AB* de la couche Elliptique *CAFB*, que l'on peut prendre pour l'Orbite moyenne que la Lune décrit autour de la Terre ; de cette maniere la Lune sera chaque mois deux fois dans l'Apogée, & deux fois aussi dans le Perigée. De plus, on voit que la Lune doit avoir la plus grande vitesse dans les syzygies, parce que les couches du tourbillon terrestre, étant le plus serrées dans ces endroits, doivent se mouvoir plus rapidement qu'ailleurs. Et de ces deux plus grandes vitesses, celle que prend la Lune, lorsqu'elle est pleine, est moindre que quand elle est nouvelle, parce que le tourbillon est plus pressé entre *TF* qu'entre *TC*. Par la même raison, la plus grande excentricité se fait lorsque l'Apogée principal se trouve dans les syzygies. Je pourrois démontrer, par cette Théorie, plusieurs autres particularités, qui sont vérifiées par les observations. Aussi le mouvement annuel de la Terre, environnée de son tourbillon, autour du Soleil, cause de nouvelles irrégularités dans le mouvement de la Lune autour de la Terre : mais toutes ces particularités sont hors de nôtre sujet, & on ne prétend pas que je donne ici un Systême complet de l'Astronomie.

X L V I.

Pour ce qui est des Satellites des deux Planètes supérieures, je crois que si on pouvoit les observer de près, & sur les globes-mêmes de ces deux Planètes, on remarqueroit, sans doute, dans le mouvement des Satellites, les mêmes inégalités que l'on remarque ici-bas dans le mouvement de la Lune : il n'y auroit de difference que du plus au moins, en ce que

le

le tourbillon de Jupiter, par exemple, étant beaucoup plus étendu, plus rapide, & plus fort que celui de la Terre, & au contraire le tourbillon du Soleil à la distance de Jupiter étant beaucoup plus foible que dans la région où nage nôtre Terre, il est bien naturel que le tourbillon de Jupiter ne souffre pas tant de dérangement dans la figure sphérique de ses couches, que le tourbillon terrestre. Il y auroit bien d'autres réfléxions à faire sur le Système de la Lune, & celui des Satellites; mais puisque cette matiere me méneroit hors de mon sujet, qui ne doit regarder, à ce que je crois, que les Planètes principales, je prie mes Lecteurs de prendre le peu que j'ai dit sur le mouvement de la Lune & des autres Satellites, comme une legére ébauche d'une ample Théorie, qui mériteroit d'être cultivée & perfectionnée. Mon dessein a été de faire comprendre qu'avec les tourbillons on seroit en état d'expliquer encore d'autres Phénomènes que ceux qui font le sujet de la question proposée.

XLVII.

Avant que de finir ce Discours, je proposerai ici, par surcroit, une maniere de se répréfenter en quelque façon à l'œil la génération des Orbites des Planètes, & l'avancement de leur Aphélie, par une expérience, moyennant un Pendule. Par les Théorèmes de M. HUGUENS, qu'il a mis à la fin de son excellent Ouvrage *de Horologio oscillatorio*, & qui ont été démontrés dans ses Oeuvres posthumes, & par plusieurs autres personnes; on sçait que les Pendules de differentes longueurs, qui font des circulations coniques d'une égale hauteur, achevent leurs circulations en tems égaux; c'est-à-dire, que tous ces Pendules circulans ainsi sont isochrones; c'est le Théorème 7e. Mais par le 9e Théorème, on voit que le tems périodique d'une circulation très petite, qui se fait lorsque le fil du Pendule fait un angle fort aigu avec la verticale qui passe par le point de suspension, & qui est l'axe du cone que le

Pendule décrit; on voit, dis-je, que le tems périodique est égal au tems d'une double oscillation laterale tres petite, que le même Pendule fait lorsqu'il est agité dans un plan vertical qui passe par le point de suspension.

XLVIII.

TAB. XLVI. *Fig.* 5.

Soit donc le fil du Pendule *AP* suspendu en *A*, faisant avec la verticale *AC* un angle quelconque *PAC*, & qu'on donne au poids *P* une vitesse convenable suivant la tangente du cercle *PDEF* décrit du rayon *CP*, afin qu'avec cette vitesse le Pendule *AP* décrive en l'air la surface conique, dont la baze est le même cercle *PDEF*. Cette vitesse doit être (ce qu'on déduit aisément des Théorêmes 5e & 7e de M. HUGUENS) à la vitesse que le poids *P* pourroit acquerir en tombant de la moitié de la hauteur *AC*, comme le rayon *PC* est à la hauteur entiere *AC*. Avec une telle vitesse une fois imprimée, le poids *P* continuera de circuler toûjours sur la circonference *PDEF*, supofé que l'air ne fasse point de résistance. Car dans ces circonstances, le poids *P* est retenu sur l'Orbite circulaire *PDEF* par deux forces qui se contrebalancent, l'une qui est la centrifuge du poids *P* cherchant à dilater l'angle *PAC*, & l'autre force est sa propre pesanteur, qui tendant à descendre fait effort pour diminuer le même angle *PAC*. Mais dès qu'on donne au poids *P* une vitesse un peu plus petite, ou qu'il perd quelque chose de celle qu'on lui avoit d'abord imprimée, il ne circulera plus sur l'Orbite circulaire *PDEF*, mais il la changera en une autre qui aura la figure d'une Ellipse *PGEH* décrite sur la surface sphérique, dont le centre est *A*, & le rayon *AP*. Cependant cette Ellipse pourra être regardée comme plane, pourvû que l'angle *PAC* soit médiocrement aigu, par ex. de 12 ou de 15 dégrés.

XLIX.

XLIX.

En obſervant ce mouvement, on verra, avec plaiſir, que le grand axe de cette Ellipſe *PE* change de poſition après chaque révolution; tellement qu'après la premiere les deux extrêmités de l'axe *P* & *E* ſe trouveront avancées en *π* & *ε*, en même ſens que ſe fait la circulation, & les avancemens de ces deux points continueront ainſi, juſqu'à ce qu'après pluſieurs révolutions du Pendule ils ayent parcouru toute la circonference *PDEF*; pourvû que durant ce mouvement la réſiſtance de l'air ne trouble pas ſenſiblement cet effet. Ainſi voilà le poids *P* répréſentant une Planète, qui fait ſes révolutions ſur l'Orbite elliptique *PGEH*, dont l'Aphélie *P* ou *E* avance peu à peu, juſqu'à faire tout le tour du cercle *PDEF*, & cela du même côté que ſe font les révolutions; il n'y a guères de difference dans cette comparaiſon avec le mouvement des Planètes, ſinon qu'ici les Apſides *P* & *E* ſont tous deux des Aphélies par raport au centre *C* conſideré comme le Soleil; & la comparaiſon conviendroit parfaitement, ſi les forces centrales, avec leſquelles les Planètes ſont pouſſées vers le Soleil, étoient directement comme leurs diſtances; car les Orbites des Planètes ſeroient des Ellipſes, dont le centre & non pas le foyer ſeroit la place du Soleil. Quant au reſte, la mobilité & l'avancement de l'Aphélie *P*, dans nôtre expérience, vient évidemment de la cauſe que j'ai indiquée en expliquant la mobilité de l'Aphélie des Planètes.

L.

Pour en être aſſuré, on conſiderera que le poids *P* n'ayant pas aſſés de viteſſe initiale pour décrire un cercle, la force de ſa peſanteur prévaudra à la force centrifuge. Donc il ſera obligé de ſe raprocher du centre pendant qu'il circule en même tems, ce qui lui fait décrire l'arc *PG* entre *PC* & *PD*,

jusqu'à ce que la distance *CG* soit assés petite, & la vitesse assés grande, (car il doit s'accélerer à cause de ce surplus de force qui le pousse vers le centre) pour que la force centrifuge reprenant le dessus, repousse le poids à la distance *CE* égale à *CP*, & ainsi le poids continuera à décrire l'Ellipse *PGEH*. Or c'est ce surplus de force, qui feroit faire au Pendule *AP* des oscillations laterales très petites dans le plan vertical, & puisque *AP* est plus grande que *AC*, le tems d'une de ces oscillations doit être un peu plus grand que le tems d'une oscillation laterale très petite d'un Pendule de la longueur *AC*. Donc le tems d'une circulation conique du Pendule *AP* (lequel tems est égal, par le Théorème 9e, au tems d'une double oscillation laterale très petite d'un Pendule de la longueur *AC*) sera un peu plus petit que le double du tems qu'il faut au poids *P* pour parvenir en *G*, où il est le plus près du centre *C*, & pour s'en éloigner à sa plus grande distance en *E*.

L I.

D'où il paroit que quand le poids *P* a achevé une révolution entiere sur l'Ellipse *PGEH*, il ne sera pas encore revenu tout-à-fait à son premier plus grand éloignement; il se trouvera donc un peu plus avant en *π*, lorsqu'il aura atteint ce point du plus grand éloignement. C'est ainsi que le point *P*, qui représente un des Aphélies, paroitra parcourir la circonference *PDEF* après un bon nombre de révolutions du Pendule, & cela dans le même sens que se font les révolutions elles-mêmes, tout comme on l'observe dans le mouvement des Planètes principales; avec cette difference seulement, que les Planètes ne passent en chaque révolution qu'une fois par l'Aphélie, & une fois par le Périhélie; au lieu qu'ici le Pendule a deux Aphélies en *P* & *E*, & deux Périhélies en *G* & *H*, par lesquels on le voit passer en chaque révolution.

LII.

L I I.

Si l'angle PAC est fort aigu, ensorte que la longueur du Pendule AP ne differe pas sensiblement de la hauteur verticale AC; alors la force centrale, qui pousse continuellement le poids P vers le centre C, est par tout proportionnelle à sa distance PC, comme il seroit aisé de le prouver; ce qui fait que la courbe $PGEH$ devient une véritable Ellipse, conformément à la Proposition 10 du premier Livre des *Principes* de M. NEWTON, & l'axe des Aphélies PE ne change plus de position. En effet, on remarque que le mouvement du Pendule commençant à s'affoiblir par la résistance de l'air, les petites Ellipses continuent de se décrire pendant plusieurs révolutions, sans que les Aphélies P & E avancent sensiblement.

N°. CXXXIX.

METHODE

Pour trouver les Tautochrones, dans les milieux résistans comme le quarré des Vitesses.

Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à *Bâle*.

AVant que d'entreprendre la solution generale, voici quelques considérations nécessaires sur les fonctions semblables composées d'indéterminées proportionnelles. *Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris* 1730. pag. 78. Ed. de Paris, pag. 109. Ed. d'Amst.

DEFINITION I.

Si l'on forme une fonction quelconque d'une quantité déterminée a, & d'une indéterminée x, de maniere que a & x fassent ensemble le même nombre de dimensions dans chaque

terme : prenant ensuite une autre déterminée A, & une indéterminée X, proportionnelles aux premieres a & x, c'est-à-dire telles que $a : A = x : X$; si l'on forme de A & X une nouvelle fonction, pareille à celle qu'on a formée de a & x; j'appelle ces deux fonctions, & les autres de cette espèce, *Fonctions semblables*. Ainsi, par exemple, $a^3 + faax + gaxx + hx^3$, & $A^3 + fAAX + gAXX + hX^3$ sont des fonctions semblables; de même $\sqrt{(a^4 + fx^4)}$ & $\sqrt{(A^4 + fX^4)}$; $\frac{aa + fax + gxx}{ha^3 + ix^3}$, & $\frac{AA + fAX + gXX}{hA^3 + iX^3}$; $a + \sqrt{(ax + fxx)}$ & $A + \sqrt{(AX + fXX)}$; $\frac{a + x}{axx + f\sqrt{(a^6 + x^6)}}$ & $\frac{A + X}{AXX + f\sqrt{(A^6 + X^6)}}$; & ainsi des autres, prenant toujours f, g, h, i, &c. pour des coëfficiens numeriques.

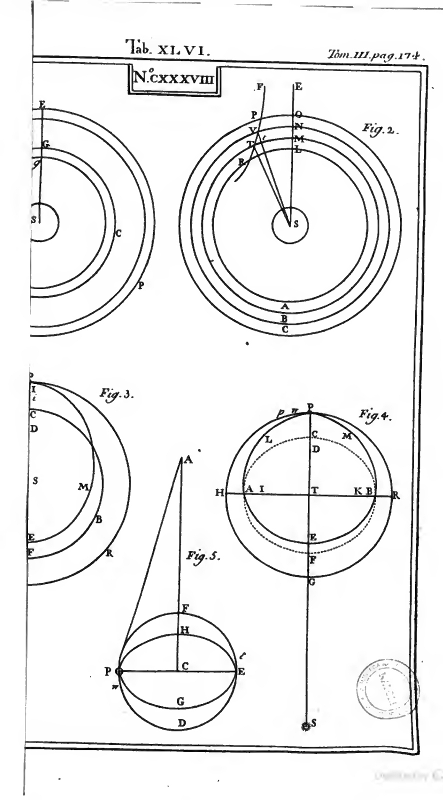
DEFINITION II.

J'appelle aussi *Fonctions semblables transcendantes*, celles des précédentes qui seroient multipliées par dx & dX, & qui seroient suposées intégrées par le signe $\int$. Ainsi par exemple, $\int(adx : \sqrt{(aa - xx)})$, & $\int(AdX : \sqrt{(AA - XX)})$ sont des fonctions semblables transcendantes, & ainsi des autres.

DEFINITION III.

Les fonctions semblables, soit algébriques, soit transcendantes, sont estimées être d'une telle ou telle dimension, dont l'exposant est le nombre qui reste, quand on retranche l'exposant des termes du dénominateur de l'exposant des termes du numerateur, en comptant dx ou dX pour une dimension; & s'il y a des signes radicaux, en divisant d'abord l'exposant des termes par l'exposant du signe. Ainsi $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ est reputé de deux dimensions; $(a + x) : (axx + f\sqrt{(a^6 + x^6)})$ aura pour dimension $1 - 3 = - 2$; $\int(adx : \sqrt{(aa - xx)})$ est d'une dimension, parce que adx est de deux dimensions,

&



N.° CXXXVIII
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

& $\sqrt{(aa - xx)}$ d'une ; ainsi cette fonction $\int(adx : \sqrt{(aa - xx)})$ a pour exposant $2 - 1 = 1$; de même $(a^3 + f axx) : (gaxx + hx^3)$ & $\int(axdx : (fa^3 + gx^3))$, n'ont aucune dimension, parce que $3 - 3 = 0$.

THEOREME.

Toutes les fonctions semblables, soit transcendantes soit algebriques, sont entr'elles comme leurs quantités semblables a *&* A, *ou* x *&* X, *élevées au même exposant que ces fonctions.* Ainsi par exemple, $aa : AA = [xx : XX] = \frac{a^3 + faxx}{gx} : \frac{A^3 + fAXX}{gX} = \int dx = (aa + xx) : \int dX \sqrt{(AA + XX)} \sqrt{\int \frac{x^3 dx}{aa + xx}} : \int \frac{X^3 dX}{AA + XX}$. De même $\frac{1}{a} : \frac{1}{A} = [\frac{1}{x} : \frac{1}{X} =] \frac{1}{\sqrt{(aa - xx)}} : \frac{1}{\sqrt{(AA - XX)}} = \int \frac{adx}{\sqrt{(a^6 - x^6)}} : \int \frac{AdX}{\sqrt{(A^6 - X^6)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a^6 - x^6)}} : \int \frac{dX}{\sqrt[3]{(A^6 - X^6)}}$ & ainsi des autres.

COROLLAIRE.

L'on voit par-là que toutes les fonctions semblables, qui n'ont aucune dimension, sont égales entr'elles : car elles sont comme a^0 a A^0, ou co mme x^0 à X^0. Mais $a^0 = 1 = A^0$ & $x^0 = 1 = X^0$. Ainsi par exemple $\int \frac{adx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = \int \frac{AdX}{\sqrt{(A^4 - X^4)}}$; $\int \frac{aadx + xxdx}{a^3 + fx^3} = \int \frac{AAdX + XXdX}{A^3 + fX^3}$; $\frac{a + \sqrt{(aa - xx)}}{f\sqrt[3]{axx}} = \frac{A + \sqrt{(AA - XX)}}{f\sqrt[3]{AXX}}$; $\frac{a + fx}{a - gx} + \frac{aa + hax}{aa - gxx} = \frac{A + fX}{A - gX} + \frac{AA + hAX}{AA - gXX}$; & ainsi des autres.

SCHOLIE.

J'ai déja traitté ce même sujet autrefois, dans un Mémoire que donna feu mon Fils *Nicolas*, inseré dans le VIIe. Tome des *Suppl.* des *Actes de Leipsic* pag. 322 *. La démonstration se

* N°. CXVI. pag. 453. *Tom. II.*

ſe préſente d'elle-même, pour peu qu'on y faſſe attention, & eſt plus facile à concevoir qu'à expliquer. Cette conſidération eſt le ſeul moyen de ſe bien conduire dans la recherche des Tautochrones; & des autres Courbes, où l'on eſt obligé de conſiderer les fonctions ſemblables, comme l'on verra dans la ſuite.

I.

PROBLEME 1er. ET PRINCIPAL.

Décrire la Courbe, par laquelle un corps, deſcendant par ſa peſanteur, dans un milieu d'une denſité uniforme, de quelque point de la Courbe qu'il commence à deſcendre, parvienne toujours dans un tems égal au point le plus bas; & de là remonte dans le même temps par l'autre branche de la Courbe juſqu'où il pourra remonter; en ſupoſant la réſiſtance comme le quarré des viteſſes.

SOLUTION.

J'appelle *l'Arc total deſcendu*, celui qui eſt compris entre le point le plus élevé d'où le corps commence à deſcendre, & le point le plus bas; *l'Arc total remonté*, celui qui eſt compris entre le point le plus bas que je prends pour le *ſommet* de la Courbe, & le point juſqu'où il peut remonter avec ſa viteſſe acquiſe, juſqu'à ce qu'il ait perdu toute ſa viteſſe; *l'Arc partial*, ſoit deſcendu, ſoit remonté, eſt une partie quelconque indéterminée d'un Arc total quelconque, priſe depuis le ſommet juſqu'au lieu de la Courbe où ſe trouve le Corps, ſoit en deſcendant, ſoit en montant.

II.

Soit maintenant la gravité qui anime les corps $= g$, la viteſſe dans un point quelconque de l'Arc total $= v$, l'Arc partial $= r$ [je l'appelle plutôt r que s, parce que la lettre s ſe confondroit facilement avec le nombre 5] l'Abſciſſe priſe ſur l'axe

l'axe élevé verticalement depuis le ſommet de la Courbe, correſpondante à l'Arc partial, $=x$, l'Appliquée correſpondante au même Arc, $=y$, la réſiſtance qu'on ſupoſe proportionnelle au quarré de la viteſſe, $=vv:n$, où j'entends par $1:n$ l'intenſité de cette réſiſtance, n étant conſtant pour un arc total quelconque.

III.

Par la décompoſition de la force de la peſanteur en tangentielle & normale, l'on a la force tangentielle $=gdx:dr$, de laquelle ôtant, lorſque le corps deſcend, ou à laquelle ajoutant, lorſque le corps remonte, la force de la réſiſtance $vv:n$, l'on a pour la force accéleratrice ou retardatrice $gdx:dr\mp vv:n$. [NB. le ſigne ſupérieur ayant lieu lorſque le corps deſcend, & l'inférieur lorſqu'il remonte, ce qu'il faudra auſſi toujours obſerver dans la ſuite]. L'on aura donc $(gdx:dr\mp vv:n)\times dr:v = -dv$; d'où l'on tire cette équation $gdx\mp vvdr:n=-vdv$ à laquelle il faut ſatisfaire. En faiſant $dr=dz:z$ il vient $ngzdx\mp vvdz=-nzvdv$, ou $-2gzdx=\mp\frac{2}{n}vvdz + 2zvdv$; diviſant par $z^{\pm 2:n+1}$, l'on aura $-2gz^{\mp 2:n} dx=[\mp\frac{2}{n}vvdz+2zvdv]z^{\mp 2:n-1}$. Pour intégrer cette Equation, il ne ſuffit pas d'écrire $-2g\int z^{\mp 2:n}dx=vvz^{\mp 2:n}$ [car cette valeur de $vvz^{\mp 2:n}$, exprimée par $-2g\int z^{\mp 2:n}dx$, eſt incomplette, n'apartenant à aucun arc total] mais $2gA - 2g\int z^{\mp 2:n}dx=vvz^{\mp 2:n}$; où je prends A pour quelque choſe de conſtant, à quoi $\int z^{\mp 2:n}dx$ devient égal, lorſque x devient l'abſciſſe correſpondante à quelque arc total, de maniere que A ſoit conſtant pour cet arc total entier, mais different pour un arc total different.

I V.

L'on a donc $vv = 2gAz^{\pm 2:n} - 2gz^{\pm 2:n}\int z^{\mp 2:n}dx =$ [à cause de $z = c^r$; j'entends par c le nombre dont le logarithme est l'unité] $2gAc^{\pm 2r:n} - 2gc^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx$. Et ainsi dt, ou le petit tems par l'élement d'un arc total quelconque sera $= dr : \sqrt{(2gAc^{\pm 2r:n} - 2gc^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx)}$, ou pour abréger, en multipliant par la constante $\sqrt{2g}$, l'on aura $dt\sqrt{2g} = dr : \sqrt{(Ac^{\pm 2r:n} - c^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx)}$. Afin donc que le tems, que le corps employe à descendre ou à remonter par un arc total quelconque, soit toûjours le même ; il faut faire ensorte que la valeur de $\int(dt : 2g)$ qu'on vient de trouver, soit égale à quelque fonction semblable de dimension nulle, comme par exemple $\int(mdP : \sqrt{(AA - PP)})$; où j'entends par m un nombre arbitraire constant, & dans laquelle le changement de la lettre A ne change point la valeur de la fonction ; car $\int(mdP : \sqrt{(AA - PP)})$ donne toûjours un angle droit pris autant de fois que m contient d'unités, de quelque grandeur qu'on prenne A, lorsque PP devient $= AA$.

V.

Pour faire donc ensorte que la valeur du tems qu'on vient de trouver $\int(dr : \sqrt{(Ac^{\pm 2r:n} - c^{\pm 2r:n}\int c^{\mp 2r:n}dx)})$ soit semblable à la somme qu'on a choisie $\int(mdP : \sqrt{(AA - PP)})$ j'écris dans l'expression du tems AA pour A, & je divise l'un & l'autre terme par $c^{\pm r:n}$, & j'ai $\int(c^{\mp r:n}dr : \sqrt{(AA - \int c^{\mp 2r:n}dx)})$ que je supose $= \int(mdP : \sqrt{(AA - PP)})$. La question se réduit donc à faire ensorte que $c^{\mp r:n}dr = mdP$, & que de plus $\int c^{\mp r:n}dx = PP$; car on tirera de là la rélation entre r & x dans laquelle A n'entrera point, ce que je fais ainsi.

VI.

V I.

Par la premiere Equation, l'on a $\frac{1}{m} c^{\mp r:n} dr = dP$; je l'intégre en obſervant la correction néceſſaire, afin que r & P s'évanouïſſant, la valeur de P s'évanouïſſe auſſi, & l'on aura $\mp \frac{n}{m} c^{\mp r:n} \pm \frac{n}{m} = P$; en quarrant, l'on a $\frac{1}{mm}(\mp nc^{\mp r:n} \pm n)^2 = PP$, qui doit être $= \int c^{\mp r:n} dx$; en differentiant le premier & le dernier, l'on aura $\frac{2}{mm} c^{\mp r:n} dr (\mp nc^{\mp r:n} \pm n) = c^{\mp 2r:n} dx$; d'où l'on tire tout d'un coup $dx = \frac{2}{mm} c^{\pm r:n} dr (\mp nc^{\mp r:n} \pm n) = \mp \frac{2n}{mm} dr \pm \frac{2n}{mm} c^{\pm r:n} dr$, ou $mmdx = \mp 2ndr \pm 2nc^{\pm r:n} dr$; en intégrant, & faiſant encore la correction néceſſaire, afin que x s'évanouïſſant, r s'évanouïſſe auſſi, l'on aura $mmx = -2nn \mp 2nr + 2nnc^{\pm r:n}$; qui eſt l'Equation exponentielle en termes finis, qui détermine la Tautochrone que l'on cherche. Si l'on veut avoir une Equation differentielle, ſans quantités exponentielles ; on le pourra de la maniere ſuivante : Par l'Equation qu'on vient de trouver, l'on a $2nnc^{\pm r:n} = mmx + 2nn \pm 2nr$; mais par l'Equation differentielle qu'on avoit trouvée auparavant, l'on a auſſi $2nnc^{\pm r:n} = \pm mmndx : dr + 2nn$; donc $mmx + 2nn \pm 2nr = \pm mmndx : dr + 2nn$; qui réduite, donne $mmxdr \pm 2nrdr = \pm mmndx$, ou $\pm mmxdr + 2nrdr = mmndx$.

V I I.

COROLL. I. Lorſque $n = \infty$, c'eſt-à-dire, lorſque $vv : n$, ou la réſiſtance eſt nulle ; l'on aura $2rdr = mmdx$, & $rr = mmx$; d'où l'on voit que les abſciſſes ſont proportionnelles aux quarrés des arcs correſpondans, & qu'ainſi la courbe eſt la Cycloïde ;

cloïde; comme il doit arriver: car dans le Vuide, ou dans un Milieu qui ne réſiſte point, il n'y a que la Cycloïde qui puiſſe être Tautochrone.

VIII.

Coroll. II. Mais ſi n demeurant finie, l'on prend $m = \infty$, l'on trouve $\mp x dr = n dx$, qui eſt l'Equation de la *Tractoire* de M. Huigens, dont la tangente eſt par tout $= n$; en ſorte que cette Tractoire eſt une des Tautochrones dans un milieu réſiſtant comme les quarrés des viteſſes: mais comme ici le point le plus bas eſt à une diſtance infinie; car c'eſt le point où la tangente ſe confond avec l'aſymptote horizontale, l'on voit que les tems de chaque deſcente, de quelque point de la courbe qu'on commence à les compter, ſont infinis, mais cependant égaux; car dans certains cas les infinis ont entr'eux une raiſon déterminée; paradoxe qui n'a rien de nouveau pour ceux qui ſont verſés dans le Calcul infinitéſimal.

IX.

Conſtruction de la Tautochrone.

Voici comme on peut conſtruire la Tautochrone, que nous venons de trouver: Puiſque $dx = \mp 2ndr : mm \pm 2nc^{\mp r:n} dr : mm$, l'on aura dy ou $\sqrt{(dr^2 - dx^2)} = dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm r:n} - 4nnc^{\pm 2r:n})} : nm$; & ainſi $y = \int dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm r:n} - 4nnc^{\pm 2r:n})} : mm$. Et comme l'on a de plus $x = (-2nn \mp 2nr + 2nnc^{\pm r:n}) : mm$, l'on aura les deux valeurs de x & y, en ſupoſant les quadratures & les logarithmes, pour une indéterminée r qu'on prendra.

Ayant donc décrit ſur l'axe commun AF les deux courbes AB & CD, telles que prenant l'abſciſſe $AE = r$, l'on ait l'appliquée

pliquée BE $= (\pm n \mp 2nc^{\pm r:n}) : mm$, & l'autre ED $=$ TAB. XLVII. N°. CXXXIX. *Fig. 1.*
$\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{\pm r:n} - 4nnc^{\pm 2r:n})} : mm$; les aires ABE & ACDE divisées par une ligne arbitraire L, donneront les coordonnées de la Courbe que l'on cherche; favoir ABE: $L = x$, & ACDE: $L = y$.

X.

SCHOLIE. m marquant un multiplie quelconque arbitraire de l'angle droit, notre solution donnera toujours une infinité de Tautochrones particulières, selon la diversité infinie de m: ce qu'on voit assez, puisque dans le cas même, où $m = \infty$, l'on trouve encore une Tautochrone, qui est la Tractoire de M. HUIGENS [§. 8.] Au reste, l'on tire de nôtre Solution generale plusieurs autres Problèmes utiles & curieux, comme ceux-ci.

X I.

PROBLEME II.

La longueur d'un Arc total quelconque descendu, dans l'hypothése que nous avons prise d'une résistance proportionnelle au quarré de la vitesse, étant donnée; trouver la longueur de l'arc total remonté qui le suit immédiatement.

SOLUTION.

Puisque nous avons trouvé pour la descente [§. 4.] $vv = 2gAc^{2r:n} - 2gc^{2r:n}\int c^{-2r:n}dx$, & $\int c^{-2r:n}dx =$ [§.6.] $\frac{1}{mm}(-nc^{-r:n}+n)^2 = \frac{nn}{mm}(c^{-2r:n} - 2c^{-r:n} + 1)$; l'on aura $vv = 2gAc^{2r:n} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+r:n} + c^{+2r:n})$. Suposant maintenant l'Arc total descendu $= a$, il faut qu'au commencement de la descente, vv soit $= 0$; c'est pourquoi il

il faut faire $2gAc^{2r:n} = \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{+r:n} + c^{2r:n})$; d'où l'on tire $A = \frac{nn}{mm}(c^{-2r:n} - 2c^{-r:n} + 1) =$ [lorsque r devient $= a$] $\frac{nn}{mm}(c^{-2a:n} - 2c^{-a:n} + 1) = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-a:n})^2$. Et puisqu'au point le plus bas de la descente, lorsque $r = 0$, $\int c^{-2r:n} dx$ s'évanouït, l'on aura vv, ou le quarré de la vitesse finale du mobile descendant $= 2gAc^{2r:n} =$ [à cause de $r = 0$] $2gA =$ [à cause de $A = \frac{nn}{mm}(1 - c^{-a:n})^2$] $\frac{2nng}{mm}(1 - c^{-a:n})^2$. Je trouve par un raisonnement semblable, en prenant les signes inférieurs, & nommant l'arc total remonté b, le quarré de la vitesse initiale du mobile remontant $= \frac{2nng}{mm}(c^{b:n} - 1)^2$. Mais la vitesse finale du mobile descendant est la même que la vitesse initiale du mobile remontant ; d'où il suit que $1 - c^{-a:n} = c^{b:n} - 1$, & $c^{b:n} = 2 - c^{-a:n} = 2 - 1 : c^{a:n} = (2c^{a:n} - 1) : c^{a:n}$; prenant les logarithmes du premier & du dernier, l'on a $b : n = l(2c^{a:n} - 1) - a : n$; d'où enfin l'on a $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$.

XII.

SCHOLIE. La valeur de b qu'on vient de trouver, a toujours lieu pour quelque valeur de n que ce soit ; mais si $n = \infty$, c'est-à-dire, si la résistance est infiniment petite ou nulle, l'on devroit trouver $b = a$, parce que le mobile dans le vuide remonte aussi haut qu'il étoit descendu, & l'arc total remonté dans la Cycloïde [qui est la Tautochrone dans le vuide,] doit être égal à l'Arc total descendu précédent. Cependant nôtre expression ne paroit pas donner $b = a$, car

$nl(2c$

$nl(2c^{a:n}-1)-a$ devient $\infty\, l(2c^{a:\infty}-1)-a=$ $\infty\, l(2c^{0}-1)-a=\infty\, l(2-1)-a=\infty\, l(1)-a=$ $\infty\times 0-a$, ce qui ne fait rien connoitre de déterminé; puisque $\infty\times 0$, ou le produit de l'infini par un infiniment petit, peut exprimer une quantité quelconque. Pour résoudre cette difficulté, j'ai deux moyens, l'un indirect, l'autre direct, de faire voir que $nl(2c^{a:n}-1)-a$ devient effectivement $=a$, lorsque $n=\infty$. En me servant du premier moyen, je supposerai $b=a$, & chercherai ensuite ce qu'il faut prendre pour n, afin que la valeur de b, $nl(2c^{a:n}-1)-a$, devienne $=a$: pour cela je fais $a=nl(2c^{a:n}-1)-a$; d'où l'on a $2a=nl(2c^{a:n}-1)$; & passant des logarith. aux nombres, j'ai $c^{2a}=(2c^{a:n}-1)^{n}$ ou $c^{2a:n}=2c^{a:n}-1$, qui est une équation quarrée, dont la racine extraite à l'ordinaire, donne $c^{a:n}=1\pm\sqrt{(1-1)}=1\pm 0$,& prenant les logarithmes, l'on a $a:n=l\,1=0$, donc $n=\infty$: d'où il suit que dans le cas où $n=\infty$, l'on aura b ou $nl(2c^{a:n}-1)-a=a$.

XIII.

Par le moyen direct, voici ce que je fais; de la quantité $nl(2c^{a:n}-1)$ je fais cette fraction $l(2c^{a:n}-1):(1:n)$ qui lorsque $n=\infty$ devient $\frac{0}{0}$: c'est une fraction dont les deux termes s'evanouïssent; il faut donc chercher sa valeur par la régle donnée dans *l'Anal. des Infin. petits*, art. 163 *, en considerant n comme variable, & divisant la differentielle du numerateur par la differentielle du dénominateur; ce qui étant fait, l'on aura $dl(2c^{a:n}-1)$ divisé par $d(1:n)$, c'est-à-dire $-2c^{a:n}dn.a:(2nnc^{a:n}-nn)$ divisé par $-dn:nn$; d'où il vient $2c^{a:n}a:(2c^{a:n}-1)=$[en substituant ∞ pour n]

* N°. L X X I. pag. 401. *Tom. I.*

n], $2a$: $(2 - 1) = 2a$; d'où je conclus que lorsque $n = \infty$ l'on aura $nl(2c^{a:n} - 1) = 2a$, & qu'ainsi $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a = 2a - a = a$.

X I V.

PROBLEME III.

Trouver le lieu de la plus grande viteſſe dans un Arc total quelconque de deſcente.

SOLUTION.

Puiſque [§. 11] $vv = 2gAc^{2r:n} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{r:n} + c^{2r:n}) =$ [ibid.] $\frac{2nng}{mm}(1 - c^{-a:n})^2 c^{2r:n} - \frac{2nng}{mm}(1 - 2c^{r:n} + c^{2r:n})$; qui étant diviſé par la quantité conſtante $2nng : mm$, donnera $c^{2r:n}(1 - c^{-a:n})^2 - (1 - c^{r:n} + c^{2r:n})$, qui doit être un *Maximum*, il faut donc faire ſa differentielle $= 0$, & l'on aura $\frac{2}{n} c^{2r:n} dr(1 - c^{-a:n})^2 + \frac{2}{n} c^{r:n} dr - \frac{2}{n} c^{2r:n} dr = 0$, ou diviſant par $\frac{2}{n} c^{r:n} dr$, l'on aura $c^{r:n}(1 - c^{-a:n})^2 + 1 - c^{r:n} = 0$, d'où l'on tirera par la réduction & le ſecours des logarithmes, $r = 2a - nl(2c^{a:n} - 1)$. Si donc d'un arc total $= a$, l'on retranche depuis le point le plus bas, une partie $= 2a - nl(2c^{a:n} - 1)$; l'on aura le point de la plus grande viteſſe.

X V.

COROLL. I. L'Arc intercepté entre le commencement de la deſcente & le point de la plus grande viteſſe, $= a - 2a + nl$

$+nl(2c^{a:n}-1)=nl(2c^{a:n}-1)-a$. D'où l'on voit [§. 11.] que cet arc, depuis le commencement de la descente jusqu'au lieu de la plus grande vitesse, est égal à l'arc remonté suivant.

XVI.

COROLL. II. Ajoutant l'arc commun compris entre le point le plus bas & le lieu de la plus grande vitesse, l'on aura l'arc total descendu, égal à l'arc compris entre le point de la plus grande vitesse, & le point où le mobile cesse de remonter: c'est-à-dire, que le mobile, après qu'il est parvenu à sa plus grande vitesse en descendant, a encore à parcourir jusqu'à-ce qu'il cesse de remonter, un chemin égal à celui qu'il a parcouru depuis le commencement de sa descente jusqu'au point le plus bas.

XVII.

COROLL. III. Puisque [§. 11] l'arc total remonté, ou $b=nl(2c^{a:n}-1)-a$; l'on aura la somme de l'arc total descendu & de l'arc total remonté, ou $a+b=nl(2c^{a:n}-1)$ & sa moitié $(a+b):2=\frac{1}{2}nl(2c^{a:n}-1)$; on voit de là que le point qui partage en deux également l'arc entier descendu & remonté, est éloigné du point le plus bas, d'un arc $=a-\frac{1}{2}nl(2c^{a:n}-1)$. Mais puisque l'arc descendu depuis le commencement jusqu'au point de la plus grande vitesse est $=nl(2c^{a:n}-1)-a$, la distance de ce point au point le plus bas sera $=a-nl(2c^{a:n}-1)+a=2a-nl(2c^{a:n}-1)$: d'où il suit que le point de la plus grande vitesse est deux fois plus éloigné du point le plus bas, que ne l'est de ce même point, le point qui partage en deux également l'arc composé de l'arc descendu & de l'arc remonté.

XVIII.

CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DES DEUX PROBLEMES PRECEDENS

TAB. XLVII. N°. CXXXIX Fig. 2. Entre deux aſymptotes AB, AC, perpendiculaires l'une à l'autre, ſoit décrite l'Hyperbole équilatére GDH, telle qu'ayant pris $AO = n$, l'apliquée OD ſoit $= 1$. Soient priſes de l'un & de l'autre côté de O, les parties égales OE, OF, & par les points E & F ſoient tirées les apliquées EG, FH, paralleles à l'autre aſymptote AC. Je dis que les Aires ODGE & ODHF ſont proportionnelles aux Arcs entiers deſcendus & remontés, c'eſt-à-dire, ſi l'on fait $ODGE = a \times OD$, l'aire ODHF ſera $= b \times OD$.

DEMONSTRATION.

D'un point quelconque K, ſoit menée l'apliquée KL, & ſoit apellée OK, z, l'on aura par la nature de l'hyperbole, $KL = n : (n - z)$, & partant l'aire $OKLD = \int (ndz : (n - z)) = nl(n : (n - z))$, & l'aire entiere $OEGD = nl(n : (n - OE))$. L'on trouve de même $OFHD = nl((n + OF) : n)$ Prenant donc l'aire $OEGD = a \times OD = a \times 1 = a$, l'on aura $nl(n : (n - OE)) = a$. De là repaſſant aux nombres, l'on aura $(n : (n - OE))^n = c^a$, ou $n : (n - OE) = c^{a:n}$; d'où l'on tire OE, ou $OF = n - nc^{-a:n}$, qui étant ſubſtitué pour OF dans $nl((n + OF) : n)$; l'on a l'aire $OFHD = nl((2n - nc^{-a:n}) : n) = nl(2 - c^{-a:n}) = nl((2c^{a:n} - 1) : c^{a:n}) = nl(2c^{a:n} - 1) - a$. Or nous avons montré dans l'analyſe précédente [§. 11] que cette expreſſion étoit celle de b; donc l'aire $OFHD = b = b \times 1 = b \times OD$.

XIX.

XIX.

LEMME,

Qui ſert à déterminer la plus grande viteſſe.

Si du centre O, *& d'un rayon quelconque* OE, *moindre que* OA, *l'on décrit un demi-cercle* ERF, *à la circonférence duquel l'on prolonge l'ordonnée* LK, *le rectangle* LK × KR *ſera proprotionnel à la viteſſe qu'aura le mobile, après qu'il ſera deſcendu depuis le commencement d'un arc total exprimé par l'aire* EGLK.

DEMONSTRATION.

Car ayant pris, comme nous avons fait ci-deſſus, l'aire OEGD, où l'arc total $= a$, l'on a trouvé OE $= n - nc^{-a:n}$ Si donc l'on fait, de la même maniere, l'aire OKLD, ou l'arc qui reſte a parcourir, $= r$, l'on aura OK $= n - nc^{-r:n}$. Et ainſi KL = AO × OD: AK $= c^{r:n}$, & KR $= \sqrt{(OE^2 - OK^2)} = n\sqrt{(2c^{-r:n} - 2c^{-a:n} - c^{-2r:n} + c^{-2a:n})}$. Si l'on multiplie KL par KR, l'on aura LK × KR $= nc^{r:n} \sqrt{(2c^{-r:n} - 2c^{-a:n} - c^{-2r:n} + c^{-2a:n})}$, dont le quarré $= 2nnc^{r:n} - 2nnc^{(2r-a):n} - nn + nnc^{(2r-2a):n}$, diviſé par nn, donne $2c^{r:n} - 2c^{(2r-2a):n} - 1 + c^{(2r-2a):n}$. Mais il eſt facile de voir que cette quantité eſt $= c^{2r:n}(1 - c^{-a:n})^2 - (1 - 2c^{r:n} + c^{2r:n})$, ce que nous avons fait voir dans la ſolution précédente [§. 14] être proportionnel à vv ou au quarré de la viteſſe. Donc LK × KR eſt proportionnel à la ſimple viteſſe.

X X.

L'on voit par-là que pour déterminer le lieu de la plus grande viteſſe, il n'eſt queſtion que de tirer entre l'hyperbole & le cercle, la ligne LKR, enſorte que LK × KR ſoit le plus grand de tous les rectangles pareils: ce qui étant fait, l'arc total deſcendu ſera à l'arc compris entre le point le plus bas & le point de la plus grande viteſſe, comme l'aire EGDO à l'aire KLDO. Or il eſt évident que le plus grand de tous les rectangles LK × KR eſt celui qui ſe fait lorſque la ſoutangente de l'hyperbole pour L & la ſoutangente du cercle pour R ſont égales. Mais la ſoutangente de l'hyperbole eſt égale à l'abſciſſe AK, par la nature de l'hyperbole: Donc la même AK doit être auſſi la ſoutangente du cercle pour le point R. On tire de-là une conſtruction facile & élégante. Du centre de l'Hyperbole A, ſoit tirée AR tangente au cercle, & du point d'attouchement R ſoit abaiſſée la perpendiculaire RKL; elle partagera l'aire EGDO, qui repréſente l'arc total, en deux aires GEKL & LKOD, en même raiſon que le point de la plus grande viteſſe partage l'arc total.

X X I.

Coroll. I. On voit de-là tout d'un coup, ſans aucun calcul, pourquoi, lorſque $n = \infty$, b devient $= a$; c'eſt-à-dire, pourquoi, dans un milieu qui ne réſiſteroit point, l'arc total remonté doit être égal à l'arc total deſcendu. Car n, ou AO, étant infini, l'arc hyperbolique GDH peut paſſer pour une droite parallèle à l'Aſymptote AB, & l'aire ODHF $=$ EGDO; c'eſt-à-dire, $b = a$. L'on voit auſſi que la tangente AR, tirée d'une diſtance infinie, peut paſſer pour parallèle au diamétre du Cercle EF, & que partant RL paſſera par le centre O, & ſe confondra avec OD. D'où l'on voit que, dans ce cas, le lieu de la plus grande viteſſe eſt le point

point le plus bas, comme il doit arriver dans la Cycloïde, qui eſt la Tautochrone dans le vuide.

XXII.

Coroll. II. Puiſque nous avons trouvé ci-deſſus [§. 15] que l'arc deſcendu, pris depuis le commencement juſqu'au point de la plus grande viteſſe, eſt égal à l'arc total remonté; il ſuit de là que l'aire EGLK eſt égale à l'aire DOFH; & qu'ainſi AE : AK = AO : AF. Ce qu'on voit d'ailleurs; puiſque la tangente AR eſt moyenne proportionnelle tant entre AE & AF, qu'entre AK & AO; comme il eſt clair par la nature du cercle.

XXIII.

SCHOLIE. Voici quelque choſe d'utile & de digne de remarque ſur notre Courbe tautochrone: c'eſt de déterminer juſqu'à quelle hauteur elle peut s'élever, ou quel peut être le plus grand arc total deſcendu; car il eſt certain que cette Courbe, à prendre ſon commencement au point le plus bas, loin de s'élever à une diſtance infinie, doit au contraire ſe terminer, & redeſcendre enſuite par une eſpèce de pointe ou point de rebrouſſement, comme on ſait qu'il arrive à la Cycloïde elle même, qui eſt la Tautochrone dans le cas d'une réſiſtance nulle ou infiniment petite. En effet ſi quelque Tautochrone s'étendoit à l'infini, l'on voit aſſez que le tems de la deſcente par un arc infiniment long ne pourroit pas être fini & déterminé, contre l'hypothèſe; car une viteſſe toujours finie dans un tems fini, ne ſauroit faire parcourir un eſpace infini. Afin donc que nous trouvions juſqu'où nôtre Tautochrone doit s'élever, & que nous déterminions le point où commence le plus grand arc poſſible de deſcente, ou le point de rebrouſſement; voici comme je raiſonne: Puiſque l'on a trouvé ci-deſſus [§. 9] $dy = dr \surd (m^4 - 4nn + 8nnc^{r:n}$

 —

$-4nnc^{2r:n}):mm$, l'on voit d'abord qu'au point le plus bas, lorſque $r=0$, $dy=dr$: ce qui fait voir que l'axe eſt perpendiculaire à la Courbe, comme il doit arriver; autrement ce ne ſeroit pas le point le plus bas: mais enſuite en s'éloignant de ce point, la raiſon de dy à dr décroit juſqu'à ce qu'elle devienne nulle, ce qui arrive lorſque la Courbe eſt perpendiculaire à l'apliquée. Je dis maintenant que la Courbe ne s'étend pas au de-là de ce point, & qu'ainſi c'eſt le point le plus élevé, car ſi la Courbe s'élevoit d'avantage, $4nn - 8nnc^{r:n} + 4nnc^{2r:n}$ ſeroit plus grand que m^4, & partant dy ou $dr\sqrt{(m^4 - 4nn + 8nnc^{r:n} - 4nnc^{2r:n})}$ ſeroit imaginaire ou impoſſible; donc afin que dy ſoit $=0$, ce qui termine le plus grand arc, il faut que m^4 ſoit $= 4nn - 8nnc^{r:n} + 4nnc^{2r:n}$; ou extrayant la racine, il faut que mm ſoit $= 2nc^{r:n} - 2n$; d'où l'on tire $(mm+2n):2n = c^{r:n}$, & prenant les logarithmes, $l((mm+2n):2n) = r:n$; c'eſt-à-dire, $r = nl((mm+2n):2n) =$ au plus grand Arc poſſible de deſcente qui termine la Courbe.

X X I V.

Coroll. I. Nous avons trouvé en general [§. 6] pour la deſcente, $mmxdr + 2nrdr = mmndx$: donc pour le plus grand arc total, lorſque $dy=0$, & qu'ainſi $dx=dr$, l'on aura $mmx + 2nr = mnn$, d'où l'on tire $x = (mmn - 2nr):mm =$ [ſubſtituant pour r ſa valeur] $n - \frac{2nn}{mm} l(\frac{mm-2n}{2n}) =$ la plus grande abſciſſe poſſible.

X X V.

Coroll. II. Si $m=\infty$, mais que n ſoit fini, l'on aura r ou $nl((mm+2n):2n) = \infty$; mais $\frac{2nn}{mm} l(\frac{mm+2n}{2n}) = 0$: Donc

x

x ou la plus grande abſciſſe $= n$, ce qui convient à la Tractoire.

XXVI.

COROLL. III. Si au contraire m eſt fini, mais n infini ; ce qui eſt le cas de la Tautochrone ordinaire dans le vuide; l'on aura $r = \infty\, l\, 1 = \infty \times 0$; ce qui ne donne rien de déterminé : il faut donc encore ſe ſervir ici de la Règle *de l'Anal. des infin. petits*, art 163, en conſidérant $nl((mm+2n):2n)$ ſous la forme de cette fraction $l(\frac{mm+2n}{2n}) : \frac{1}{n}$, dont la differentielle du numerateur, diviſée par la differentielle du dénominateur, donne cette autre fraction $mmn : (mm+2n) =$ [lorſque $n = \infty$] $\frac{1}{2}mm$.

XXVII.

COROLL. IV. Dans ce même cas la plus grande abſciſſe $n - \frac{2nn}{mm} l(\frac{mm+2n}{2n})$ devient $\infty - \frac{2\infty^2}{mm} l\, 1 = \infty - \frac{2\infty^2}{mm} \times 0$; ce qui encore ne détermine rien : il faut donc, afin d'y pouvoir apliquer la règle dont on s'eſt déja ſervi, l'exprimer ſous la forme de cette fraction $(\frac{1}{n} - \frac{2}{mm} l(\frac{mm+2n}{2n}) : (\frac{1}{nn})$, & l'on trouve, en operant bien, $x = \frac{1}{4}mm$; enſorte que le plus grand arc eſt double de la plus grande abſciſſe, comme il arrive dans la Cycloïde, où le plus grand arc, depuis le point le plus bas, eſt double du diamétre du Cercle generateur. Ce qui confirme merveilleuſement nôtre Méthode.

XXVIII.

PROBLE'ME IV.

La longueur d'un Arc remonté quelconque étant donnée, trouver la longueur de l'Arc total deſcendu qui l'a precedé.

SO-

SOLUTION.

On peut ſe ſervir ici de la Méthode que nous avons employée dans la ſolut. du *Probl.* 2. [§. 11] en prenant les ſignes inférieurs dans l'expreſſion du quarré de la viteſſe vv, & operant enſuite, comme l'on a fait, avec les changemens néceſſaires. Mais on parviendra plus facilement au but, ſi l'on fait à l'équation que l'on a trouvée pour la longueur de l'arc remonté [§. 11] $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$, les changemens néceſſaires, afin d'avoir la valeur de a exprimée par b; ce que je fais ainſi. Puiſque $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$, l'on aura $a + b = nl(2c^{a:n} - 1)$ ou $(a+b):n = l(c^{a:n} - 1)$, & paſſant des logarith. aux nomb. l'on a $c^{(a+b):n} = 2c^{a:n} - 1$; diviſant maintenant par $c^{a:n}$, il vient $c^{b:n} = 2 - c^{-a:n}$ & repaſſant aux logarithmes, l'on aura $b:n = l(2 - c^{-a:n})$ d'où l'on tire $b = nl(2 - c^{-a:n})$, & ainſi l'on trouve b autrement & plus ſimplement que l'on n'a fait [§. 11]. Mais comme c'eſt ici a que l'on cherche, je tranſpoſe $c^{b:n}$ & $c^{a:n}$ en changeant les ſignes, & j'aurai $c^{-a:n} = 2 - c^{b:n}$, & prenant les logarithmes $-a:n = l(2 - c^{b:n})$ d'où l'on tire $a = -nl(2 - c^{b:n})$ ou, ce qui revient au même, $a = nl(1:(2 - c^{b:n}))$.

XXIX.

Puiſque $a = nl(1:(2 - c^{b:n}))$ & $b = nl(2 - c^{-a:n})$; l'on aura $a + b = nl((2 - c^{-a:n}):(2 - c^{b:n}))$; mais par §. 11, l'on a auſſi $a + b = nl(2c^{a:n} - 1)$; donc $2c^{a:n} - 1 = (2 - c^{-a:n}):(2 - c^{b:n})$; & l'on a, en réduiſant, $4c^{a:n} - 2c^{(a+b):n} + c^{b:n} + c^{-a:n} = 4$. L'on peut donc trou-

trouver, en rétrogradant, par cette Equation exponentielle, quoique fort composée, a par b, & réciproquement b par a, ce qui seroit peut-être fort difficile à trouver à priori.

X X X.

Scholie. Par ce que nous avons démontré [§. 23] l'on pourra encore déterminer le plus grand arc possible remonté, comme aussi la plus grande abscisse qui lui convient. Cela se peut par le moyen de l'équation trouvée [§. 11] $b = nl(2c^{a:n} - 1) - a$; ou de cette autre équivalente dont nous venons de parler, $b = nl(2 - c^{-a:n})$, substituant dans l'une ou dans l'autre pour a ce qu'on a trouvé ci-dessus [§. 23] $nl((mm + 2n) : 2n)$ pour le plus grand arc descendu; car l'on aura b, ou le plus grand arc remonté [en se servant de la derniére formule] $= nl(2 - c^{-l((mm+2n):2n)})$. Mais cette expression étant embarassée & peu élegante, à cause de l'exposant logarithmique contenu sous un autre signe logarithmique; voici une maniere particuliére de la réduire à une expression logarithmique simple & ordinaire. Je fais ... $2 - c^{-l((mm+2n):2n)} = z$, partant $c^{-l((mm+2n):2n)} = 2 - z$, & leurs logarith. $-l((mm + 2n) : 2n) = l(2 - z)$ d'où repassant aux nombres, à la maniere ordinaire, l'on aura $2n : (mm + 2n) = 2 - z$; donc $z = (2mm + 2n) : (mm + 2n)$ & $2 - c^{-l((mm+2n):2n)} = (2mm + 2n) : (mm + 2n)$, & $nl(2 - c^{-l((mm+2n):2n)}) = nl(\frac{2mm+2n}{mm+2n}) =$ au plus grand arc total remonté.

X X X I.

Coroll. L'on peut par-là trouver la plus grande longueur de toute la Tautochrone, c'est-à-dire, celle que le mobile peut parcourir pendant une oscillation entiere, en descen-

dant & remontant enſuite. Car le plus grand arc total deſcendu étant $= nl((mm + 2n) : 2n)$, & le plus grand arc total remonté immédiatement aprés, étant $= nl((2mm + 2n) : (mm + 2n))$, leur ſomme $nl((mm + 2n) : 2n) + nl((2mm + 2n) : (mm + 2n))$, qui étant reduite, donne $nl((mm + n) : n)$ ſera égale à la plus grande longueur de la Tautochrone, qui puiſſe être parcourue par le mobile en deſcendant & remontant conſécutivement.

XXXII.

Quant à la plus grande abſciſſe x, qui répond au plus grand arc remonté; il faut remarquer qu'il n'eſt plus permis de ſuppoſer $dx = dr$, comme nous avons fait pour la deſcente [§. 24]: car le plus grand arc remonté n'eſt point abſolument le plus grand, mais ſeulement rélativement au plus grand arc deſcendu, par lequel le mobile parvenant au point le plus bas, remonte enſuite auſſi haut que le lui permet la viteſſe qu'il avoit acquiſe au point le plus bas; mais ce n'eſt pas à dire pour cela que quelque force externe, indépendamment de la force de la chute, imprimant au mobile une plus grande viteſſe que celle qu'il acquiert en deſcendant librement par le plus grand arc de deſcente, ne pût le faire remonter plus haut, & partant ne pût lui faire décrire un arc plus long. Il faut donc diſtinguer le cas où le mobile remonte librement par la ſeule force qu'il a acquiſe en deſcendant, & celui où le mobile remonte pouſſé par quelque force étrangére, qui agiroit ſur lui au point le plus bas de la Tautochrone, quand même il ne ſeroit point deſcendu. Ici donc nous entendons le plus grand arc remonté librement, dont nous cherchons l'abſciſſe x, ou la plus grande hauteur verticale à laquelle le mobile puiſſe s'élever, après être deſcendu par le plus grand arc. Pour cela je prends l'Equation trouvée [§. 6] avec les ſignes inférieurs, $mmx = 2nn + 2nr + 2nnc^{-r:n}$, dans laquelle, à la place de r, j'écris le plus grand arc

arc total remonté librement, qui [§. 30] est $= nl((2mm + 2n) : (mm + 2n))$ & j'aurai $mmx = - 2nn + 2nn\,l((2mm + 2n) : (mm + 2n)) + 2nnc^{-l((2mm + 2n):(mm+2n))}$ = [parce que comme nous avons vû §. 30. $c^{-l((2mm+2n):(mm+2n))} = (mm+2n) : (2mm + 2n)$] $= - 2nn + 2nn\,l((2mm + 2n) : (mm + 2n)) + (mmnn + 2n^3) : (mm + n)$ = [après la réduction] $2nn\,l((2mm + 2n) : (mm + 2n)) - mmnn : (mm + n)$: donc $x = \frac{2nn}{mm} l((2mm + 2n) : (mm + 2n)) - nn : (mm + n)$.

XXXIII.

Puisque pour la descente, la plus grande abscisse [§. 24] $= n - \frac{2nn}{mm} l((mm + 2n) : 2n)$; si l'on en retranche la plus grande abscisse pour l'ascension libre, le reste sera la quantité, dont la hauteur de laquelle est descendu le corps, surpasse la hauteur à laquelle il est remonté; & cette différence sera $= (mmn + 2nn) : (mm + n) - \frac{2nn}{mm} l((mm + n) : n)$; qui s'évanouït, lorsque $n = \infty$, comme on le trouve par la régle tirée de l'*Anal. des Infin. petits*; & cela doit être ainsi dans la Tautochrone ordinaire pour le vuide, où le mobile descend & remonte à la même hauteur.

XXXIV.

Il nous reste à déterminer aussi le plus grand arc remonté par une force imprimée au mobile au point le plus bas, c'est-à-dire, jusqu'où la Tautochrone s'étend du côté de l'arc remonté avant que de parvenir au point de rebroussement, si elle en a un, où la Courbe se termine & change sa courbure, comme font les Courbes rebroussantes. Pour cela, il nous faut recourir à l'Equation [§. 9] pour l'arc remonté, qui est celle-

ci, $dy = dr\sqrt{}(m^4 - 4nn + 8nnc^{-r:n} - 4nnc^{-2r:n}):mm$. Afin donc d'avoir le plus grand arc total remonté par une force étrangére, il faut faire $dy = 0$, & par conséquent $m^4 = 4nn - 8nnc^{-r:n} + 4nnc^{-2r:n} = (2n - 2nc^{-r:n})^2$; & extrayant la racine, $mm = 2n - 2nc^{-r:n}$; d'où l'on tire $c^{-r:n} = (2n - mm):2n$; & prenant les logarithmes $-r:n = l((2n - mm):2n)$; ce qui donne $r = -nl((2n - mm):2n)$ où, ce qui est la même chose, $r = nl(2n:(2n - mm))$ = au plus grand arc total remonté par une force étrangére, au-delà duquel la Courbe ne s'étend plus.

XXXV.

Coroll. I. Si l'on prend $mm = 2n$, l'on aura $r = nl(2n:0) = \infty$: dans ce cas dont l'arc remonté devient infiniment long, d'où l'on voit encore que les Tautochrones se varient, selon la valeur du nombre arbitraire mm.

XXXVI.

Coroll. II. Le plus grand arc remonté par une force étrangére est toûjours plus grand que le plus grand arc remonté librement, quel que soit le nombre mm, ce que je démontre ainsi; $2n \times (mm + 2n) = 2mmn + 4nn > 2mmn + 4nn - 2m^4 = (2n - mm) \times (2mm + 2n)$; donc $2n:(2n - mm) > (2mm + 2n):(mm + 2n)$; & partant aussi $nl(2n:(2n - mm))$ ou le plus grand arc remonté par une force étrangére, est plus grand que $nl((2mm + 2n):(mm + 2n))$ c'est-à-dire, plus grand que le plus grand arc remonté librement. [§. 30].

XXXVII.

Enfin il faut trouver la plus grande abscisse pour l'arc remonté par une force étrangére, c'est-à-dire, celle qui répond au

au point de rebrouſſement de l'arc remonté. Pour cela je me ſers de l'Equation [§. 61], dont je me ſuis déja ſervi [§. 32] pour trouver le plus grand arc remonté librement; ſavoir $mmx = -2nn + 2nr + 2nnc^{-r:n}$, & maintenant j'y ſubſtitue pour r le plus grand arc total remonté par une force étrangére, qui eſt [§. 33] $= nl(2n:(2n - mm))$; ce qui me donnera $mmx = -2nn + 2nnl(2n:(2n - mm)) + 2nnc^{-l(2n:(2n - mm))} = [c^{-l(2n:(2n - mm))}$ étant $= (2n - mm):2n] - 2nn + 2nnl(2n:(2n - mm)) + 2nn - mmn = 2nl(2n:(2n - mm) - mmn)$, d'où l'on tire $x = \frac{2nn}{mm} l(2n:(2n - mm)) - n =$ à la plus grande abſciſſe pour l'arc remonté par une force étrangére.

XXXVIII.

Si $mm = 2n$, l'on aura $x = nl(2n:0) - n = \infty$; d'où il ſuit que le point de rebrouſſement de l'arc remonté, dans le cas $mm = 2n$, eſt infiniment éloigné de l'horizontale tirée par le point le plus bas, c'eſt-à-dire, que l'abſciſſe devient infiniment longue. Et afin que le mobile puiſſe remonter dans la Courbe à cette hauteur infinie, il faut qu'il ait au point le plus bas une viteſſe initiale infinie, c'eſt-à-dire, plus grande qu'aucune viteſſe donnée.





N°. CXL.

JOHANNIS BERNOULLI MEDITATIONES DE CHORDIS VIBRANTIBUS,

cum pondusculis æquali intervallo a se invicem dissitis,

Ubi nimirum ex principio virium vivarum quæritur numerus vibrationum chordæ pro una oscillatione Penduli datæ longitudinis D *.

Comment. Acad. Petrop. Tom. III. pag. 13. TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 1.

CHorda vibrans ACDEF &c. cui ad distantias æquales affixa sunt ponduscula æqualia, C, D, E, F, &c. in eam se componere debet figuram, ut singula pondusula simul perveniant in situm rectilineum AB: unde sequitur, singulorum velocitates, adeoque & vires acceleratrices, proportionales esse debere longitudinibus percurrendis Cc, Dd, Ee, &c. Sed per principia statica, tensio chordæ est ad vim qua pondusculum quodvis, exempli gratia, E, urgetur versus e, ut sinus anguli DEe ad sinum anguli DEF, vel IEF, id est, [ob figuram chordæ fere rectam, & pondusculorum intervalla æqualia] ut sinus totus ad FI. Ergo, *ex æquo*, distantiæ Cc, Dd, Ee, &c. proportionales sunt ipsis DG, EH, FI, &c. respective. Jam $DG = Gd - Dd = 2Cc - Dd = 2a - x$; $HE = He - Ee = 2Dd - Cc - Ee = 2x - a - y$; $FI = If - Ff = 2Ee - Dd - Ff = 2y - x - z$; &c. unde $2a - x : a = 2x - a - y : x = 2y - x - z : y = 2z - y - t : z =$ &c. Hinc sequentia fluunt Lemmata.

* Confer Num. CXXXVII. pag. 125, 126.

I. Si

I. Si duo ſint ponduſcula, erit $x = a$, $y = 0$, reliqua non conſideranrur. *Fig. 3.*

II. Si tria ſint ponduſcula, erit $y = a$, $z = 0$, reliquis non conſideratis; adeoque $2a - x : a = 2x - 2a : x$, unde $2ax - xx = 2ax - 2aa$ & $x = a\sqrt{2}$. *Fig. 4.*

III. Si quatuor ſint ponduſcula, erit $y = x$, $z = a$, & $t = 0$, non conſideratis reliquis; adeoque $2a - x : a = x - a : x$; unde $2ax - xx = ax - aa$ & $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. *Fig. 5.*

IV. Si quinque ſint ponduſcula, erit $z = x$, $t = a$, $u = 0$; reliquis neglectis; adeoque $2a - x : a = 2x - a - y : x = 2y - 2x : y$; hinc duæ æquationes habentur, $xx = aa + ay$, & $yx = 2ax$. Ex priori æquatione eſt $y = (xx - aa) : a$; ex poſteriori, $y = 2a$; unde $x = a\sqrt{3}$.

V. Si ſex ſinr ponduſcula, erit $z = y$, $t = x$, $u = a$, $s = 0$, reliquis neglectis; adeoque $2a - x : a = 2x - a - y : x = y - x : y$. Hinc duæ æquariones, $xx = aa + ay$, & $ay - yx = -ax$. Ex poſteriori æquarione $y = ax : (-a + x)$; ex alrera $y = (xx - aa) : a$; unde $aax = x^3 - axx - aax + a^3$, ſeu $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$.

VI. Si ſeptem ſint ponduſcula, erit $t = y$, $u = x$, $s = a$, $w = 0$, non attento ad reliqua. Adeoque $2a - x : a = 2x - a - y : x = 2y - x - z : y = 2z - 2y : z$; & ira tres habentur æquationes $xx = aa + ay$, $xy = ax + az$ & $xz = 2ay$. Ex æquatione ſecunda $z = (xy - ax) : a$, ex tertia $z = 2ay : x$; unde $y = axx : (xx - 2a^2)$, & $z = 2a^2x : (x^2 - 2a^2)$ Eſt vero ex æquatione prima $y = (x^2 - a^2) : a$; igitur $(x^2 - a^2) : a = ax^2 : (x^2 - 2a^2)$ unde $aaxx = x^4 - 3aaxx + 2a^4$; ſeu $x^4 - 4aaxx + 2a^4 = 0$; adeoque $xx = 2aa + aa\sqrt{2}$, & $x = a\sqrt{(2 \pm \sqrt{2})}$; $y = a \pm a\sqrt{2}$; $z = (2a \pm 2a\sqrt{2}) : \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})} = \pm a\sqrt{(4 \pm 2\sqrt{2})}$. Ubi notandum ſigna inferiora huc non quadrare.

PROBLEMA I.

Sit nunc chorda vel filum ALB omnis craſſitici expers; one-

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 2. oneratum in medio pondusculo L; sitque filum tensum a pondere P; quæritur tempus semivibrationis per LC. Esto $LC = a$, AL vel $AC = b$, erit $AL - AC = (AL^2 - AC^2) : (AL + AC) = LC^2 : 2AC = a^2 : 2b$, & $ALB - AB = a^2 : b =$ descensui ponderis P filum tendentis. Sit $z =$ altitudini verticali per quam grave libere descendens acquirit velocitatem æqualem illi quam habet punctum L quando pervenit in C, quæ velocitas adeo erit $= \sqrt{z}$. Erit vis viva pondiusculi $L = Lz =$ vi vivæ ponderis tendentis $= (a^2 : b) \times P$; unde $z = a^2 \times P : b \times L$. Quia vero vis trahens punctum L versus C semper est proportionalis distantiæ LC; erit, supponendo diametrum circuli ad ejus circumferentiam ut 1 ad p, & v velocitatem puncti L in C, tempus per LC seu tempus semivibrationis $= ap : 2v = ap : 2\sqrt{z} = p\sqrt{b.L : 2}\sqrt{P}$ & tempus unius semioscillationis penduli datæ longitudinis D, $= p\sqrt{\frac{1}{2}D}$. Ergo $p\sqrt{\frac{1}{2}D}$ divisum per $p\sqrt{b.L : 2}\sqrt{P}$, hoc est, $\sqrt{2P.D} : \sqrt{b.L}$, dabit numerum vibrationum fili durante una oscillatione penduli $D = \sqrt{4D.P} : \sqrt{AB.L} = 2\sqrt{(D.P : AB.L)}$.

PROBLEMA II.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 3. Sit nunc filum AFGB tensum a pondere P, & oneratum duobus pondusculis æqualibus, quorum unumquodque $= \frac{1}{2}L$, & quæ dividant filum in tres partes æquales, AF, FG, GB. Sit iterum $FC = GE = a$, & $AC = CE = EB = b$, erit $AF - AC = BG - BE = a^2 : 2b$; adeoque $AFGB - AB = a^2 : b =$ descensui ponderis P. Sit iterum $\sqrt{z} =$ velocitati puncti F in C, vel puncti G in E; erunt vires vivæ pondusculorum F & G simul $= Lz =$ vi vivæ ponderis tendentis $P = (aa : b) \times P$, unde $z = a^2.P : b.L$. Reliqua ergo inveniuntur ut prius, nisi quod jam ponendum sit pro numero vibrationum $\sqrt{(2D.P : b.L)} = \sqrt{(2D.P : \frac{1}{3}AB.L)} = \sqrt{(6D.P : AB.L)}$.

PRO-

PROBLEMA III.

Sint jam tria pondufcula fingula $= \frac{1}{3}L$, erit rurfus $AF - AC = BH - BI = aa : 2b$. Sed $FG - CE = HG - IE =$ [ex Lemm. 2.] $(3aa - 2aa\sqrt{2}) : 2b$. Hinc $AFGHB - AB = (4aa - 2aa\sqrt{2}) : b =$ defcenfui ponderis P filum tendentis. Erit nunc, vocata $\sqrt{z}$ velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in $E = \sqrt{2z}$; unde quantitas virium vivarum omnium pondufculorum fimul $= \frac{4}{3}z \times L =$ vivæ ponderis tendentis $= (4aa - 2aa\sqrt{2})P : b$, adeoque $z = (6aa - 3aa\sqrt{2})P : 2bL = (12aa - 6aa\sqrt{2})P : AB \times L$, & fic $\sqrt{z}$, vel $v = \sqrt{((12aa - 6aa\sqrt{2})P : AB \times L)}$ & tempus per FC, feu $ap : 2v = p\sqrt{AB \times L} : 2\sqrt{(12 - 6\sqrt{2})P}$. Igitur $P\sqrt{\frac{1}{2}D}$ divifum per $ap : 2v$, hoc eft, $2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})P \times D} : \sqrt{AB \times L}$, dabit numerum vibrationum fili in una ofcillatione penduli dati D. TAB. XLVII. Nº. CXL. *Fig.* 4.

PROBLEMA IV.

Sint pondufcula quatuor, fingula $= \frac{1}{4}L$. Supponendo tantifper $GE = HI = x$, reliquis ut prius manentibus, erit iterum $AF - AC = BK - BM = aa : 2b$; $FG - CE = KH - MI = (xx - 2ax + aa) : 2b$; unde $AFGHKB - AB = (xx - 2ax + 2aa) : b =$ defcenfui ponderis P. Vocetur velocitas puncti F in $C = \sqrt{z}$, erit velocitas puncti G in $E = \frac{x}{a}\sqrt{z}$; ac proinde fumma virium vivarum omnium pondufculorum $= \frac{aa + xx}{2aa} \times z \times L =$ vi vivæ ponderis $P = (xx - 2ax + 2aa)P : b$; igitur $z = (2aaxx - 4a^3x + 4a^4)P : (aa + xx)bL$. Quare $\sqrt{z}$ vel $v = a\sqrt{(2xx - 4ax + 4aa)P} : \sqrt{(aa + xx)bL}$; atque tempus per $FC = ap : 2v = p\sqrt{(aa + xx)bL} : 2\sqrt{(2xx - 4ax + 4aa)P}$. Ideoque $p\sqrt{\frac{1}{2}D}$ divifum per $ap : 2v$, hoc eft, $\sqrt{(4xx - 8ax + 8aa)D \times P} : \sqrt{(aa + xx)bI} =$ [quia per Lemma III, $x = \frac{1}{2}a + a\sqrt{\frac{5}{4}}$] TAB. XLVII. Nº. CXL. *Fig.* 5.

$2\sqrt{(5-\sqrt{5})}\,D\times P : \sqrt{(5+\sqrt{5})}\,bL = 2\sqrt{(25-5\sqrt{5})}$ $D\times P : \sqrt{(5+\sqrt{5})}\,AB\times L$, dabit numerum vibrationum fili semel oscillante pendulo D.

PROBLEMA V.

Sint jam quinque pondufcula, quorum unumquodque $=\frac{1}{5}L$. Supponendo iterum $GE = KM = x$, reliquis femper manentibus, erit HI feu y [per Lemma IV] $= 2a$ & $x = a\sqrt{3}$, & $AF - AC = BN - BO = aa : 2b$, $FG - CE = NK - OM = (xx - 2ax + aa) : 2b = (4aa - 2aa\sqrt{3}) : 2b$; $GH - EI = KH - MI = (yy - 2yx + xx) : 2b = (7aa - 4aa\sqrt{3}) : 2b$; quocirca $AFGHKNB - AB = (12aa - 6aa\sqrt{3}) : b =$ defcenfui ponderis P. Eft autem, fumta $\sqrt{z}$ pro velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in $E = \sqrt{3z}$, & velocitas puncti H in $I = 2\sqrt{z}$. Per confequens aggregatum virium vivarum omnium pondufculorum $= \frac{12}{5}z\times L =$ vi vivæ ponderis tendentis $P = (12aa - 6a^2\sqrt{3})P : b$; proinde $z = (10aa - 5a^2\sqrt{3})P : 2b\times L = (30a^2 - 15aa\sqrt{3})P : AB\times L$; & ita $\sqrt{z}$ vel $v = a\sqrt{(30 - 15\sqrt{3})}\,P : \sqrt{AB\times L}$, unde tempus per FC feu $ap : 2v = p\sqrt{AB\times L} : 2\sqrt{(30 - 15\sqrt{3})P}$. Ideoque $p\sqrt{\frac{1}{2}}\,D$ divifum per $ap : 2v$, hoc eft $\sqrt{(60 - 30\sqrt{3})}\,D\times P : \sqrt{AB\times L}$, dabit numerum vibrationum fili durante una ofcillatione penduli D.

PROBLEMA VI.

Sunto pondufcula fex, quorum fingula $=\frac{1}{6}L$. Pofitis nunc $GE = NO = x$, $HI = KM = y$; erit $AF - AC = BR - BS = a^2 : 2b$; $FG - CE = RN - OM = (xx - 2ax + aa) : 2b$; $GH - EI = NK - OM = (yy - 2xy + xx) : 2b$; propterea $AFGHKNRB - AB = (2xx - 2ax + 2aa + yy - 2yx) : b =$ defcenfui ponderis P. Eft vero fumta $\sqrt{z}$ pro velocitate puncti F in C, velocitas puncti G in $E = x\sqrt{z} : a$, & velocitas puncti H in $I = y\sqrt{z} : a$; unde fumma virium vivarum omnium pondufculorum $= (aa + xx + yy)z\times L : 3aa =$ vi

vi vivæ ponderis tendentis $P = (2xx - 2ax + 2aa + yy - 2yx) P : b$, & ideo $\sqrt{z} = \sqrt{(6aaxx - 6a^3x + 6a^4 - 3aayy - 6aayx) P : \sqrt{(aa + xx + yy)} bL} = v$. Hinc tempus per $FC = ap : 2v = ap\sqrt{(aa + xx + yy)} bL : 2\sqrt{(6aaxx - 6a^3x + 6a^4 - 3aayy - 6aayx)} P$. Idcirco $p\sqrt{\frac{1}{2}} D$ divisum per $ap : 2v$, hoc est $\sqrt{(12aaxx - 12a^3x + 12a^4 + 6aayy - 12aayx) D \times P : a\sqrt{(aa + xx + yy)} bL} =$ [ob Lemma V, ubi $y = ax : (-a + x)$ & $y = (xx - aa) : a$; indeque $yy = xx + ax$] $\sqrt{(18aaxx + 6a^3x + 12a^4 - 12ax^3) D \times P : a\sqrt{(aa + 2xx + ax)} bL} = \sqrt{(126axx + 42aax + 84a^3 - 84x^3) D \times P : a\sqrt{(a^3 + 2axx + aax)} AB \times L} =$ [ob Lemma V, $x^3 = axx + 2aax - a^3$] $\sqrt{(42axx - 126aax + 168a^3) D \times P : \sqrt{(a^3 + 2axx + aax)} AB \times L} = \sqrt{(42xx - 126ax + 168aa) D \times P : \sqrt{(2xx + ax + aa)} AB \times L}$ dabit numerum vibrationum fili oscillante semel pendulo dato D, posteaquam pro x substitutus fuerit ejus valor, qui est radix hujus æquationis $x^3 - axx - 2aax + a^3 = 0$.

Solutiones eorundem Problematum ex principiis Staticis.

LEMMA I.

Sit vis gravitatis naturalis g, qua corpora naturaliter animantur, hoc est, ad descensum urgentur. Sit x altitudo per quam descendit, v velocitas in fine descensus, t tempus descensus, M massa ponderis P; erit $M \times g = P$; $gdx : v = dv$, adeoque $\sqrt{2gx} = v$.

LEMMA II.

$dx : v = dt = dx : \sqrt{2gx}$; adeoque $t = \sqrt{2x} : \sqrt{g}$.

LEMMA III.

Quia alibi demonstratum, tempus descensus naturalis per diametrum alicujus circuli ad tempus semioscillationis in cycloï-

 de

de æque altæ cum circulo ut $1 : \frac{1}{2} p = 2 : p$; erit tempus semi-oscillationis penduli datæ longitudinis $D, p \sqrt{D} : 2 \sqrt{g}$; est enim per Lemma præcedens, tempus descensus per diametrum $= \sqrt{D} : \sqrt{g}$.

LEMMA IV.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 6.

Tendat punctum F ad C, viribus quæ sunt proportionales distantiis FC; demonstratum est, undecunque punctum F incipiat moveri, æqualibus semper temporibus percurrere distantiam FC. Sit itaque vis qua in qualibet distantia urgetur $= f \times FC$ [per f intelligo parametrum illius vis, ut vis absolute sumta augeri & minui possit]: His positis, sit distantia FC a puncto quietis sumta $= a$, pars qualibet FO $= x$, erit $f \times (a - x) dx : v = dv$; adeoque $v = \sqrt{f.} (2ax - xx)$ hinc $dt = dx : \sqrt{f} (2ax - xx)$, atque $t = \frac{1}{\sqrt{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ Ergo tempus per totam FC, $= p : 2 \sqrt{f}$.

PROBLEMA I.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 2.

Producatur AF in secunda figura & sequentibus. Vis ponderis P est ad vim qua punctum F versus C urgetur, ut sinus anguli AFC ad sinum ang. VFB = sin. ang. AFC: sin. dupli ang. FAC = [quia FAC pro infinite parvo habetur] AC: 2FC $= b : 2a$, adeoque vis qua punctum F versus C urgetur $= (2a : b) P = 2aMg : b$ [intelligo per M massam ponderis P.] Quia vero pondusculum L, a cujus gravitate nunc abstrahitur, considerando tantum ejus massulam, urgeri debet ad C, vi quæ exprimitur per faL, erit $2aMg : b = faL$, unde $f = 2gM : bL$ adeoque per Lemma IV hujus, erit tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{bL} : 2\sqrt{2gM} =$ tempusculo semivibrationis fili: dividendo itaque tempus semioscillationis penduli dati D, quod [per Lemma III] $= p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$, per tempusculum semivibrationis fili $p\sqrt{bL} : 2\sqrt{2gM}$; quod provenit $\sqrt{(2D. M : b. L)} =$ [substituendo pro massis ponde-

pondera] $2\sqrt{}(D \times P : AB \times L)$ dabit numerum quæſitum vibrationum fili, prorſus ut in ſolutione præcedente per vires vivas eruta.

PROBLEMA II.

TAB. XLVII. *Fig.* 3.

Nunc eſt P ad vim puncti F verſus C ut ſinus AFC ad ſinum VFG ſeu ſin. FAC $= b : a$; unde vis puncti F ad C $= aMg : b = fa \times \frac{1}{2} L$, adeoque $f = 2gM : bL$, & tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = P\sqrt{bL} : 2\sqrt{2gM}$ = tempuſculo ſemivibrationis fili. Diviſum itaque $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per $p\sqrt{bL} : 2\sqrt{2gM}$, dabit $\sqrt{(2D \times M : b \times L)} = \sqrt{(6D \times P : AB \times L)}$ pro numero vibrationum quæſito, ut ſupra.

PROBLEMA III.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 4.

Vocetur hic & in ſequentibus φ vis puncti F verſus C; erit jam $P : \varphi :: ſAFC . ſVFG$; [per ſ intelligo ſinum anguli]. Et vero ex Lemmate ſecundo priori methodo præmiſſo, ſVFG [quia infinite parvus] $= 2a - a\sqrt{2}$, ſumto b pro radio: hinc $\varphi = (2a - a\sqrt{2})P : b = (2a - a\sqrt{2})Mg : b = fa \times \frac{1}{3} L$, unde $f = (6 - 3\sqrt{2})Mg : bL$, tempuſque per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{bL} : 2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})Mg}$ = tempuſculo ſemivibrationis fili; adeoque dividendo $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per $p\sqrt{bL} : 2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})Mg}$, quod orietur $\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})DM} : \sqrt{bL} = 2\sqrt{(6 - 3\sqrt{2})} D \times P : \sqrt{AB \times L}$, dabit quæſitum numerum, ut ante.

PROBLEMA IV.

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 5.

Hic iterum $P : \Phi = ſAFC : ſVFG$. Eſt autem, ex Lemmate III pro ſuperiori methodo, ſVFG [quia infinite parvus] $= \frac{3}{2} a - \sqrt{\frac{4}{5} aa} = (3a - a\sqrt{5}) : 2$, ſumto b pro ſinu toto: unde $\Phi = (3a - a\sqrt{5})P : 2b = (3a - a\sqrt{5})Mg : 2b = fa \times \frac{1}{4} L$, ex quo $f = (6 - 2\sqrt{5})Mg : bL$; ac tempus per FC $[p : 2\sqrt{f}] = p\sqrt{bL} : 2\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})Mg}$ = tempuſculo ſemivibrationis fili. Hinc dividendo $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$

Cc 3 per.

per $p\sqrt{bL}: 2\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})Mg}$ acquiritur $\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})}$ $DM: \sqrt{bL} = \sqrt{(30 - 10\sqrt{5})} D \times P: \sqrt{AB \times L}$, quod dabit numerum vibrationum conformem superiori, nam $\sqrt{(30 - 10\sqrt{5})}$ $D \times P: \sqrt{AB \times L} = 2\sqrt{(25 - 5\sqrt{5})} D \times P: \sqrt{(5 + \sqrt{5}) AB \times L}$.

PROBLEMA V.

Figura in mente concipienda est. Hic habemus ex Lemmate IV præliminari, $fVFG$ infinite parvum $= 2a - a\sqrt{3}$; adeoque $\phi = (2a - a\sqrt{3}) P: b = (2a - a\sqrt{3}) Mg: b = fa \times \frac{1}{3} L$; unde $f = (10 - 5\sqrt{3}) Mg: bL$, & tempus per FC $[p: 2\sqrt{f}] = p\sqrt{bL}: 2\sqrt{(10 - 5\sqrt{3}) Mg}$ = tempusculo semivibrationis fili: quare dividendo $p\sqrt{D}: 2\sqrt{g}$ per hoc, prodit $\sqrt{(10 - 5\sqrt{3})} DM: \sqrt{bL} = \sqrt{(60 - 30\sqrt{3})} D \times P: \sqrt{AB \times L}$, pro numero vibrationum quæsito; ut supra.

PROBLEMA VI.

Ex Lemmate V præliminari hic erit $fVFG$ [ob infinite parvum] $= 2a - x$, ubi x est radix hujus æquationis $x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0$, eritque $\phi = (2a - x) P: b = (2a - x) Mg: b = fa \times \frac{1}{6} L$; unde $f = (12a - 6x) Mg: ab L$, & tempus per FC $[p: 2\sqrt{f}] = p\sqrt{ab L}: 2\sqrt{(12a - 6x) Mg}$ = tempusculo semivibrationis fili. Dividendo itaque $p\sqrt{D}: 2\sqrt{g}$ per hoc, oritur $\sqrt{(12a - 6x)} DM: \sqrt{ab L} = \sqrt{(84a - 42x)} D \times P: \sqrt{a \times AB \times L} = \sqrt{(42xx - 126ax + 168aa)}$ $D \times P: \sqrt{(2xx + ax + aa) AB \times L}$, ut multiplicanti per crucem patebit.

SCHOLIUM.

Res generaliter tractari potest pro quocunque numero ponduseulorum: sit enim numerus ponduseulorum n, & habebitur $\phi = (2a - x) Mg: b = f \times \frac{1}{n} L$, unde $f = (2na - nx)$ $Mg: abL$, & tempus per FC $[p: 2\sqrt{f}] = p\sqrt{abL}:$ $2\sqrt{(2na - nx) Mg}$ = tempusculo semivibrationis fili. Ergo diviso

divifo $p \surd D : 2 \surd g$ per hoc, prodibit $\surd((2na - nx) DM : \surd ab L] = \surd((n+1)(2aa - nx) D \times P) : \surd(a \times AB \times L) =$ numero qui quæritur vibrationum fili ofcillanre femel pendulo dato D. In qua expreffione pro x fubftituendus eft ejus valor, qui quæri debet per methodum in Lemmatibus prælimimaribus adhibitam. Sic, exempli gratia, fi feptem fint ponduscula, in quo cafu $n = 7$, & x [per Lemma præliminare VI] $= a(\surd 2 + \surd 2)$, erit $\surd((n+1)(2na + nx) D \times P : (a \times AB \times L) = 2\surd(28a - 14x) D \times P : \surd a \times AB \times L = 2\surd(28 - 14\surd(2 + \surd 2)) D \times P : \surd AB \times L =$ numero quæfito vibrationum, qui quam proxime accedit ad $2\surd 2 D \times P : \surd AB \times L$ jufto minorem.

PROBLEMA VII.

Efto nunc chorda mufica AB uniformiter craffa, cujus quantitas materiæ $= L$, eaque tenfa a pondere $P = Mg$; quæritur numerus vibrationum in una ofcillatione penduli dati D.

SOLUTIO.

Induat chorda, extra fitum rectilineum AB figuram curvilineam AEB, quæ ea effe debet, ut quodlibet ejus punctum K eodem tempufculo perveniat ad punctum correfpondens H in fitu rectilineo, quo punctum medium E pervenit ad C: id quod facit, ut vis acceleratrix, qua punctum K verfus H urgetur, ubique fit proportionalis diftantiæ KH. Ductis ergo duabus tangentibus proximis KG, GF; & ex K & S applicatis, KH, SI: erit ex principio ftatico pondus P feu Mg, ad vim qua particula chordæ KS verfus H urgetur, ut finus anguli KSO, qui pro recto habetur, ad finum ang. GKF, hoc eft, ut 1 ad FG : KG; poteft enim KF confiderari tanquam perpendicularis ad axem CF; erit itaque vis illa in $K = FG \times Mg : KG = f \times KH \times dL$, & inde vis ipfa acceleratrix feu $f \times KH = FG \times Mg : KG \times dL$. Ut autem deter-

TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig. 7.*

determinetur FG: KG, notandum eſt, curvam AEB eſſe trochoidis ſociam elongatam, hoc eſt, ejus naturæ, ut deſcripto quadrante circuli EMN, & ducta KR parallela baſi AC, ſit AC: KR = EMN: EM, cujus demonſtrationem infra adjiciemus. Sit nunc $EC = a$, $ER = x$, $EM = s$, $EMN = \frac{1}{2} pa$ [intelligo ſemper 1 ad p ut diametrum ad circumferentiam]; ſit etiam $AC : EMN = n : 1$, erit $KR = ns$, & reperietur ſubtangens $RG = s\sqrt{(2ax - xx)} : a$, $CG = a - x + s\sqrt{(2ax - xx)} : a$, ejuſque differentialis $FG = - dx + (asdx - sxdx) : a\sqrt{(2ax - xx)} + dx = (asdx - sxdx) : a\sqrt{(2ax - xx)}$ adeoque FG: KG, vel quod idem eſt $FG : KR = (adx - xdx) : na\sqrt{(2ax - xx)}$; ipſum vero elementum KS, quod cenſetur æquale ipſi KO, $= nds = nadx : \sqrt{(2ax - xx)}$. Eſt autem AB: HI [KO] $= L : dL$, unde $dL = KO \times L : AB \times = nadx \times L : AB\sqrt{(2ax - xx)}$; quibus ergo ſubſtitutis in vi acceleratrice habetur $FG \times Mg : KG \times dL = AB \times (a - x) \times Mg : n^2 a^2 L$ [quia $npa = AB$] $pp(a - x) Mg : AB \times L = pp \times KH \times Mg : AB \times L = f \times KH$; adeoque $f = pp \times Mg : AB \times L$, & tempus per KH $[p : 2\sqrt{f}] = \sqrt{AB \times L} : 2\sqrt{Mg}$ = tempuſculo ſemivibrationis chordæ muſicæ; diviſo itaque $p\sqrt{D} : 2\sqrt{g}$ per $\sqrt{AB \times L} : 2\sqrt{Mg}$ acquiritur $p\sqrt{DM} : \sqrt{AB \times L}. = p\sqrt{D \times P} : \sqrt{AB \times L}$; numerus vibrationum chordæ durante una oſcillatione penduli datæ longitudinis D; quemadmodum invenit TAYLORUS. Vid. *Meth. Increm.* p. 93. Et ſicuti ego quoque inveni ex principio virium vivarum, ut ſequitur:

Sit $DN = x$; $NG = y = n\int(adx : \sqrt{(2ax - xx)})$; DG
TAB. XLVII. N°. CXL. *Fig.* 8. $= s$; $DC = a$. Eſt $ds - dy = (ds^2 - dy^2) : (ds + dy) = dx^2 : 2dy = [\text{ob } y = n\int(adx : \sqrt{(2ax - xx)}]\ dx^2 : \frac{2nadx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = dx\sqrt{(2ax - xx)} : 2na$; adeoque $DA - CA = \int(dx^2 : 2dy) = \int(dx\sqrt{(2ax - xx)} : 2na) = \frac{1}{2} CD \times DEF : 2n\,CD = \frac{1}{4} DEF : n = DEF : 4n = AC^2 : 4n^2 = AB : 8n^2$; hinc $2DA - 2CA = ADB - AB = AB : 4n^2$ = differentiæ inter arcum & chordam. Radius oſculi in G, poſito elemento Gg vel

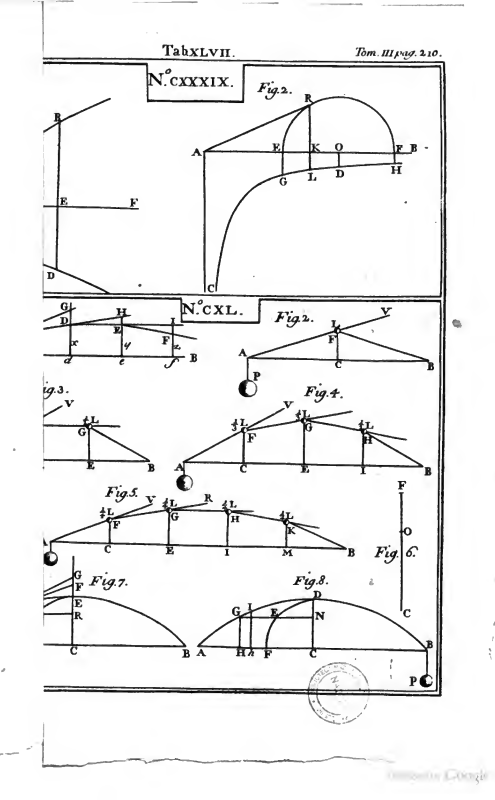
vel ds constante, est generaliter $dsdy : ddx =$ [in curvis maxime elongatis ubi $dy = ds$] $dy^2 : ddx$. Ergo in hoc casu Trochoïdis sociæ maxime elongatæ, ubi $dy = ds = nadx : \sqrt{(2ax - xx)} =$ constanti, erit $naddx \sqrt{(2ax - xx)} - (na^2 dx^2 - naxdx^2) : \sqrt{(2ax - xx)} = 0$, unde $ddx = (a - x) dx^2 : (2ax - xx)$; adeoque radius osculi $dy^2 : ddx = \frac{nnaadx^2}{2ax - xx} : \frac{(a-x)dx^2}{(2ax - xx)} = \frac{nnaa}{a - x}$, hoc est, radii osculi sunt reciproce ut GH. Sit nunc pondus tendens chordam, P; pondus chordæ ipsius AB, L; velocitas puncti D cum vibrando venerit in $C = \sqrt{S}$ [intelligendo per S spatium per quod grave libere descendens acquirit velocitatem puncti D in C]: erit puncti cujuslibet G in H velocitas $= GH \sqrt{S} : DC = (a - x) \sqrt{S} : a$, adeoque $\frac{(a-x)^2}{aa} S \times \frac{Hh}{AB} \times L = \frac{(a-x)^2}{aa} \times S \times \frac{dy.L}{AB} = \frac{(a-x)^2}{a} \times S \times \frac{ndx.L}{AB.\sqrt{(2ax - xx)}} =$ vi vivæ particulæ chordæ Gg vel Hh in H $= \frac{nS.L}{a.AB} \times \frac{(a-x)^2.dx}{\sqrt{2ax - xx}}$; id quod integrando habetur $\frac{nS \times L}{a.AB} \times ((a - x) \sqrt{(2ax - xx)} + \int dx \sqrt{(2ax - xx)}) =$ [pro tota chorda] $\frac{2nS.L}{a.AB} \times \frac{1}{4} a \times DEF = \frac{nS.L.DEF}{AB} = \frac{1}{2} L \times S =$ quantitati virium vivarum totius chordæ. Hæc autem est æqualis vi vivæ ponderis P descendentis per $AB : 4n^2 = P.AB : 4n^2$. Ergo $S = P.AB : 2n^2 \times L = 2P.DEF^2 : L \times AB$, & $\sqrt{S} = DEF \times \sqrt{(2P : L.AB)}$. Hinc invenitur tempus per $DC = \sqrt{(L.AB : 2P)}$. Est autem tempus semioscillationis penduli simplicis cujus longitudo sit $C = DEF \times \sqrt{2C} : DC$; ut igitur hæc duo tempora sint æqualia, faciendum est $\sqrt{(L.AB : 2P)} = DEF \times \sqrt{2C} : DC$; unde $C = DC^2.AB.L : 4DEF^2.P$. Ergo numerus vibrationum chordæ in tempore unius vibrationis penduli datæ longitudinis $D = 2DEF \times \sqrt{(D \times P)} : DC \times \sqrt{(AB.L)}$, $=$ [supposito $2DEF : DC = p$] $p \sqrt{(D.P : AB.L)}$ ut habet TAYLORUS, cui L & N sunt quod mihi AB & L.

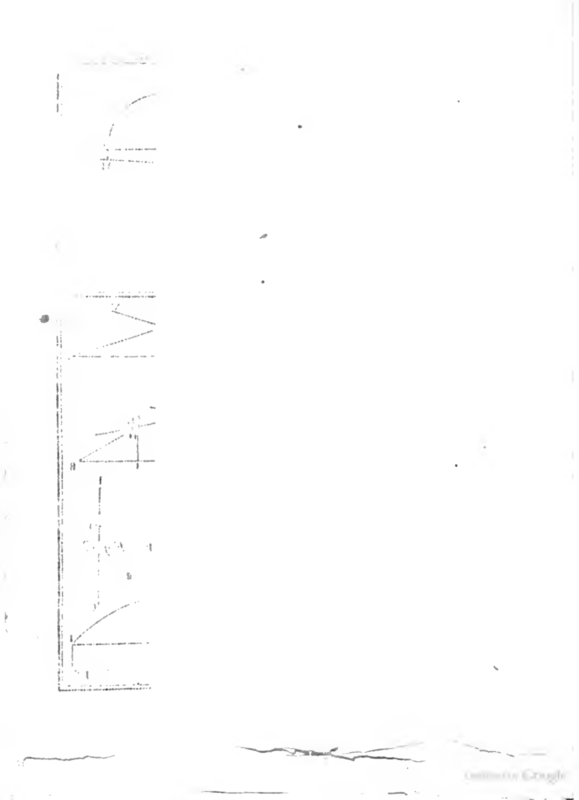
Sequitur demonstratio ejus, quod supra asseritur, chordam vibrantem ADB [vid. fig. præced.] induere figuram sociæ Trochoidis elongatæ.

Ostensum est in superioribus, sinum anguli contactus in puncto chordæ quocunque G proportionalem esse longitudini percurrendæ GH. Jam retentis iisdem symbolis, quibus supra usi sumus, erit sinus anguli contactus $= ddx : ds =$ [ob figuram maxime elongatam & consequenter $ds = dy$] $ddx : dy$, positis nimirum dy constantibus: longitudo autem percurrenda $GH = a - x$. Ergo $ddx : dy$ ad $a - x$ in ratione constante. Sit illa ratio ut dy ad $nnaa$; eritque $nnaaddx : dy = ady - xdy$, [seu divid. per dy] $nnaaddx : dy^2 = a - x$. Multiplicetur utrumque membrum per dx, & habebitur $nnaadxddx : dy^2 = adx - xdx$; sumtisque integralibus $nnaadx^2 : 2dy^2 = ax - \frac{1}{2}xx$, seu $nnaadx^2 = (2ax - xx)\,dy^2$ unde $nadx : \sqrt{(2ax - xx)} = dy$, & $n\int(adx : \sqrt{(2ax - xx)}) = y$. Est itaque y [NG] $: \int(adx : \sqrt{2ax - xx})$ [arc. DE] $= n : 1$; id est, applicata NG ad arcum DE in ratione constante, eaque valde magna. Est enim ratio AC ad CD valde magna [per hyp.] Ergo etiam ratio AC ad quadrantem DEF valde magna erit. Sed AC : DEF $= n : 1$. [*per demonstr.*] Quare constat propositum.



DE


N.° CXXXIX.
Fig. 2.
N.° CXL.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.



N°. CXLI.

DE EPICYCLOÏDIBUS

In superficie sphærica descriptis.

Autore Jacobo HERMANNO.

TRiginta quatuor jam effluxere anni, ex quo Ænigma geometricum de miro opificio Testudinis quadrabilis hemisphæricæ, Autore *D. Pio Lisci Posillo Geometra* Florentiæ exiit in publicum. Sub hoc nomine, quod per anagramma significat *Postremo* GALILÆI *Discipulo*, *Vincentius* VIVIANUS Magni Ducis Hetruriæ Mathematicus latere voluit. Is enim impresso Programmate ænigma suum peritioribus Analystis examinandum commendavit his verbis: „ Cujus [ænigmatis] divinatio a secretis artibus „ illustrium Analystarum vigentis ævi expectatur, quod in Geometriæ „ pura historia versatus, ad tam recondita videatur invalidus. *Comment. Acad. Petrop. Tom. I. pag. 210.*

Ipsum vero ænigma ita habebat: „ Inter venerabilia olim Græciæ mo- „ numenta extat adhuc, perpetuo quidem duraturum, Templum augus- „ tissimum ichnographia circulari ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod „ Testudine intus perfecte hemisphærica operitur: sed in hac fenestrarum „ quatuor æquales areæ [circum ac supra basin hemisphæræ ipsius dispositarum] tali configuratione, amplitudine, tantaque industria, ac ingenii „ acumine sunt exstructæ, ut his detractis, superstes curva Testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, Tetragonismi vere geometrici „ sit capax.

„ Præsentis ænigmatis enodatio, quod spectat ad hujus admirabilis for- „ nicis tum constructionem expeditissimam, tum quadraturam, *Sereniss.* „ FERDINANDO *Magno Principi Etruriæ*, scientiarum & nobiliorum ar- „ tium Cultori ac Patrono Generosissimo, ab eodem ænigmatista oblata „ jam est; qui quidem simul non dubitat, quin hoc ipsum ænigma a sin- „ gulis litterario in Orbe degentibus hodie præclarissimis Analystis sit sta- „ tim divinandum, proprias quadrationes impertiendo singularis Testudi- „ nis hujus tetragonismicæ ab hemisphæra dissectæ, & ipsorum peracutas „ indagines, multiplicesque industrias ad hoc unum idemque collimantes „ impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam „ jacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament: „ Oh! unica verorum scitabilium scientia a Divina in hominum mente

„ infusa, ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemptis, æter-„ na ista, quæ semper & unicuique sunt eadem, tantum appetat, nihil-„ que aliud unquam magis innocuum scire perquirat." Hucusque VIVIANUS.

Ex hoc proponendi modo, & ex eo quod ad celeberrimos ævi sui Geometras Programma suum mitti curavit, facile quis in opinionem venerit, hoc ænigma arduum & difficile solutu Autori suo visum fuisse: verumtamen cum non dubitarit quin recentioribus Analystis statim sit solvendum, forte non tam a difficultate quam elegantia Problema hoc suum tanti fecit, & credibile quoque est, hoc ænigma præclarissimo Viro in Veterum Geometria innutrito & magna diligentia cuncta excutere solito, plus negotii dedisse quam aliis Analystis, qui methodos infinitesimales magis in promptu habebant. Illustris enim LEIBNITIUS eodem die, quo notitiam Problematis nactus est, ejus solutionem invenit, quam peculiari scheda descriptam, & *Magno Etruriæ Principi* inscriptam proximo cursore Florentiam miserat; & paulo post totidem verbis in *Acta Eruditorum* 1692 transtulit. Occurrunt quoque quinque solutiones diversæ, quas *Jacob.* BERNOULLI in eodem *Actorum* anno Mens. Augusto exhibuit. Dedit quoque WALLISIUS aliquot solutiones in Cap. 192 suæ *Algebræ*. Sed omnium fere elegantissimæ videntur esse constructiones, quas VIVIANUS ipse in peculiari opusculo Italico sermone, anno 1692, Florentiæ edito, sed sine demonstrationibus, publico impertivit. Vid. *Act. Erudit.* 1694, pag. 207. Demonstrationes a VIVIANO suppressas ex propria penu deinceps deprompsit & dedit P. Abbas *Guido* GRANDUS in singulari opere, quod *Problemata Viviana* inscripsit. Totius ænigmatis solutio eo redit, ut Testudo iis fenestris aperiatur, quibus de superficie tota hemisphærii detractis, residua maneat superficies geometrice quadrabilis; quod infinitis diversis modis fieri potest. Jam olim PAPPUS *Alexandrinus* Collectionum Libr. IV. Prop. 32 ostendit, portionem sphæricæ superficiei quadam spirali interceptam, dati cujusdam trianguli octuplam esse; & facile fuit posteris alias in sphæræ superficie portiones invenire, quæ datis planis rectilineis æquales essent.

Sed difficilius videri poterat Problema, si loco spatiorum in superficie sphærica quadrabilium, quærerentur lineæ geometrice rectificabiles. Ita saltem sentit *Carol. Ernestus* OFFENBURGIUS, qui in *Actis Erudit.* 1718, pag. 175, hoc Problema proposuit: *Testudinem hemisphæricam fenestris ovalibus perforare, quarum unaquæque peripheriam absolute rectificabilem habeat.* Utrum hic Autor Problema suum solverit nec ne, de eo mihi nihil constat: hoc saltem novi, Problema non esse tantæ difficultatis, quantæ illud esse Autori videtur: solutio enim facilis manat a consideratione Epicycloïdum sphæricarum. Quid vero per has Epicycloïdes intellectum velim, explicatur in definitione sequenti,

DEFINI-

DEFINITIO.

Epicyclois sphærica est curva in superficie sphærica descripta a puncto in peripheria basis alicujus coni recti assumto, dum coni hujus perimeter basis volvitur in circumferentia alicujus circuli immoti, vertice coni in centro sphæræ [cujus radius æquat latus coni] immoto manente.

Basis coni dicatur itidem *Circulus generator*, & circulus, super quo circulus generator volvitur, ita ut singulæ partes peripheriæ generatoris singulis partibus peripheriæ hujus successive applicentur, dicatur *Circulus immobilis.* Hoc motu, planum circuli generatoris constanter dato angulo ad planum circuli immobilis inclinatum est.

Si conus rectus A B C, [*Fig.* 1] cujus basis est circulus A H B revolvatur circa verticem suum C, ut circumferentia basis B A H moveatur in circumferentia B D E alterius circuli B E centro C & radio C B descripti; erit circulus A H B *generator*, & circulus B D E is, qui *immobilis* vocatur, & punctum L in perimetro circuli generatoris revolutione hujus circuli super peripheria L D E, describet in superficie sphærica curvam L F E, quam *Epicycloïdem sphæricam* appello. TAB. XLVIII. *Fig.* 1.

Radius sphæræ in cujus superficie Epicyclois sphærica describitur, est ubique æqualis lateri coni C B.

Non autem necesse est ut circulus immobilis sit circulus in sphæra maximus ut *fig.* 1. Potest etiam esse circulus minor, ut *fig.* 2, circulus ex diametro B S, nam si in circumferentia hujus circuli, circulus ex diametro A B qui est basis coni recti B A C dicto modo volvatur, ut singulæ partes hujus singulis partibus peripheriæ circuli immobilis successive applicentur, punctum describens etiamnunc incedet in Epicycloide in superficie sphæræ B A S descripta, sive circulus generator extet supra planum circuli immobilis B S, sive subter idem planum depressus sit. TAB. XLVIII. *Fig.* 2.

In omni casu planum circuli generatoris ad planum circuli immobilis dato angulo inclinatum est, in *fig. prima* angulo A B C, in *secunda* vero angulo A B R, si circulus A B sit super plano B S, vel supplemento anguli A B R, si sit subter plano B R. In omni ex hisce casibus longitudo Epicycloïdis est ad diametrum circuli generatoris in ratione data. Ad id ostendendum sequentibus Lemmatibus opus habemus.

LEMMA I.

Datis lateribus trianguli obliquanguli $be\beta$, [*Fig.* 3.] nempe βe & be, & angulo intercepto $be\beta$, invenire tertium latus $b\beta$. TAB. XLVIII. *Fig.* 3.

Dicantur $e\beta = p$, $eb = q$, sinus anguli $be\beta = g$, sinus complementi $= h$, ad radium $= 1$, eritque latus quæsitum $b\beta = \sqrt{(pp - 2hpq + qq)}$.

L E M M A II.

TAB. XLVIII. *Fig.* 4. Si arcus B O L [*Fig.* 4] ſemi-circuli B L A, in ſua elementa Lm diſtributus intelligatur, erit ſumma omnium B L $\times$ Lm, quam ſummam jam uſitato more, per $\int$B L. Lm deſignabo, erit, inquam, $\int$B L. Lm = AB $\times$ B P; facta nempe A P = A L.

Nam triangula ſimilia A B L & mLn, præbent A B : B L = Lm : Ln; ergo B L $\times$ Lm = A B $\times$ Ln; ergo $\int$B L $\times$ Lm = $\int$A B $\times$ Ln. Atqui $\int$A B $\times$ Ln = A B in omnes Ln; omnes vero Ln ſunt = A B — A L [conſtr. = A B — A P] = B P, ergo $\int$B L $\times$ Lm = AB $\times$ B P. *Quod erat demonſtrandum.*

T H E O R E M A.

TAB. XLVIII. *Fig.* 5. Pars Epicycloïdis ſphæricæ E L [*Fig.* 5] deſcripta a puncto deſcribente L provolutione circuli generatoris A L B ſuper immobili E B ex E ad B, eſt ad 2 B P, facta A P = A L, ut $\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ ad a; ſi nempe radius circuli B E, hoc eſt B C, ſit = a, radius B G circuli ALB = b, ac coſinus inclinationis circuli hujus ad circulum immobilem = h, ad radium = 1.

Per B ducatur tangens B V circuli immobilis B E, & hæc tanget etiam circulum generatorem A L B in eodem puncto B. Intelligantur in circulo generatore & in circulo immobili duo arculi infinite parvi & æquales Bβ & Bb; ductaque ex b in B V normali be, jungatur βe; eritque angulus $\beta e b$ menſura inclinationis plani H L ad planum B E C circuli immobilis. His poſitis,

Si circulus generator H L promoveatur, lineola Bβ rotabitur circa punctum B, uſque dum cadat ſuper Bb: interea vero deſcribet BL ſectorem L B l ſimilem ſectori Bβb, in quo ſectore arculus Ll eſt elementum Epicycloïdis hoc motu genitum; habemus ideo B L : Ll = Bβ : $b\beta$; vel Ll $\times$ Bβ = B L $\times$ $b\beta$.

Jam dicendo radium circuli immobilis B E, qui eſt B C = a, radium circuli generatoris B G = b, arculum Bb = Be = Bβ = ds; erunt $eb = ds^2 : a$; $e\beta = ds^2 : b$, & coſinus anguli $\beta e b = h$; ſurrogatis ergo in Lemm. I. $ds^2 : b$, $ds^2 : a$, pro p & q, invenietur $b\beta = ds^2 \sqrt{(aa - 2hab + bb)} : ab$, & æquatio L$l$ $\times$ Bβ = B L $\times$ $b\beta$ mutabitur in $ab \times$ Ll = $ds \times$ B L $\times \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$, hoc eſt = B L $\times$ Lm $\times \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$; ergo $ab \times \int$Ll, hoc eſt $ab \times$ EL = $\sqrt{(aa - 2hab + bb)} \times \int$BL $\times$ Lm, id eſt [per Lemm. II.] = AB $\times$ BP $\times \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ = $2b \times$ B P $\times \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$, & dividendo per b, habetur $a \times$ E L = 2BP$\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$. Quare E L : 2BP = $\sqrt{(aa - 2hab + bb)} : a$ *Q. E. D.*

C O R O L L.

COROLL. I.

Ergo tota Epicyclois eſt ad duplam diametrum A B circuli generatoris ut $\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ ad a.

COROLL. II.

Si $b = 1$, ſeu ſinui toti, quod contingit, cum ambo plana circuli generatoris & immobilis coincidunt, tunc erit Epicyclois ad duplum diametri generatoris, ut $a - b$ ad a, id eſt ut differentia radiorum circuli immobilis & generatoris, ad radium immobilis.

PROBLEMA.

Invenire in plano ſphæræ Ichnographo quotcunque puncta ichnographica Epicycloïdis.

Sit A L B [*Fig. 6*] circulus generator ſeorſim deſcriptus; ad terminum A diametri A B erecta normaliter indefinita A Q, capiantur in eadem partes A O, A Q, quæ ſint ad diametrum A B ut ſinus rectus & ſinus complementi ad radium, & ducantur O B, Q B. Poſtea accepto quolibet arcu B L, ductoque ejus ſinu L Z, protendatur hic ſinus uſque ad occurſum X cum recta B Q. Quibus factis, in plano ſphæræ ichnographico ad radium C E fiat angulus E C B qui ſit ad angulum B G L ut radius G B ad C E; capiatur in radio B C portio B t = X Z, & perpendicularis $t u$ = L Z ad radium B C: dico punctum u eſſe punctum optatum Ichnographiæ Epicycloïdis, id eſt, erecta in u ad planum C B E perpendicularis per punctum Epicycloidis tranſibit; diſtantia vero hujus puncti a puncto u, æquat ubique reſpectivam TZ. Hoc pacto tot puncta Ichnographiæ Epicycloïdis invenientur quot quis voluerit: & OFFENBURGI Problema in tota ſua latitudine ſolvitur, deſcribendo ſupra & infra circulum immobilem R S [*Fig.* 2] Epicycloïdes: nam binæ oppoſitæ formabunt feneſtram ovalem, & conſtructio geometrica fiet, ſi in Fig. 6, B G ad B C fuerit ut numerus ad numerum. *Q. E. F.* TAB. XLVIII. *Fig. 6.*



PROBLE-

N°. CXLII.

PROBLÊME

Sur les Epicycloïdes Sphériques,

Par M. BERNOULLI, Professeur de Mathématiques à *Bâle*.

Mémoires de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris 1732. pag. 237. Ed. de Paris, pag. 316, Ed. d'Amst.

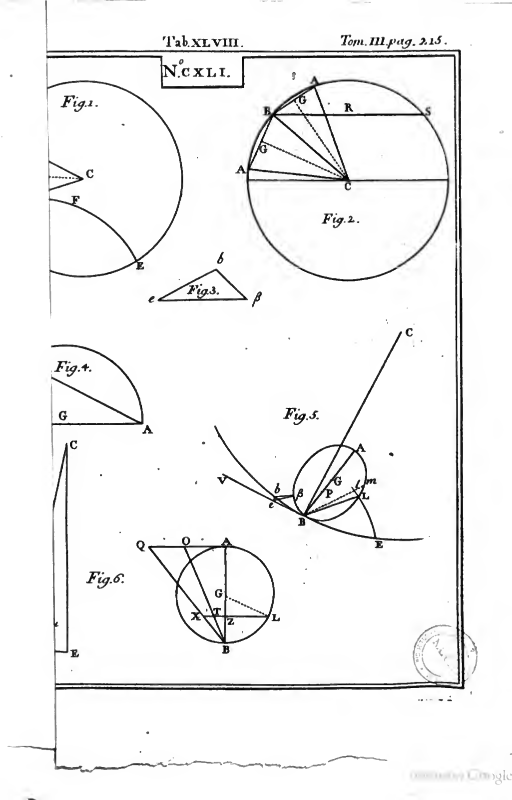
SOit le Cercle immobile $HBED$, [Fig. 1] dont le centre est C, & le rayon CB. Soit sur ce cercle un autre cercle mobile BLA, qui tourne de E par B vers H, dont le rayon est GB, & qui conserve, en tournant, la même inclinaison sur le plan du cercle immobile. Soit le commencement de la rotation en E, d'où un point L, dans la circonférence du cercle mobile, commence à décrire l'Epicycloïde ELl, qui sera sur quelque superficie sphérique. On demande la rectification de l'Epicycloïde ELl; la maniere de la déterminer; &c.

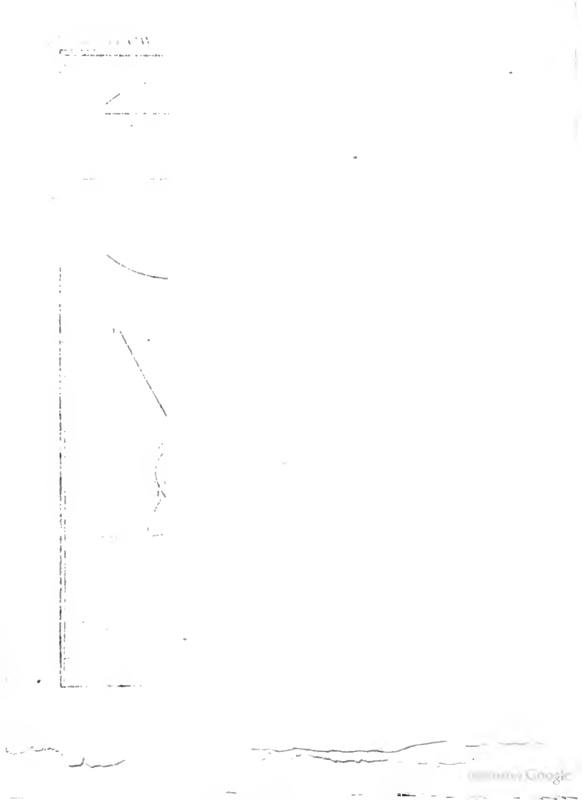
TAB. XLIX. N°. CXLII. *Fig.* 1.

Préparation pour la Solution.

Considerons le Cercle mobile dans une situation quelconque touchant en B le cercle immobile, & prêt à parvenir en b, infiniment proche de B; pendant que le point décrivant L, pris sur la circonférence du cercle mobile, passe en l; & l'on aura Ll pour l'élément de l'Epicycloïde ELl.

Soit donc conçu le point du contact B être venu en b, & l'arc du cercle mobile BL, transporté en bl, qui sera augmenté de la particule Bb, élément commun aux deux cercles dans lequel ils se touchent. On aura donc, par la nature de la rotation, $Bb =$ la différence de l'arc BL, & partant $=$ l'arc bl $-$ l'arc BL. Des points B & b soient tirées les tangentes BS, bs, commu-


N.° CXLI.
Fig. 1.
C
F
E
Fig. 2.
A
G
B
R
S
G
A
C
Fig. 3.
b
e
β
Fig. 4.
G
A
C
E
Fig. 5.
C
A
G
P
m
L
V
b
β
e
B
E
Fig. 6.
Q
O
A
G
X
T
Z
L
B



communes aux deux cercles : BS sera la commune intersection des plans du cercle mobile, & de l'immobile pour le point de contact B; mais bs sera l'intersection commune des mêmes plans pour le point de contact passé en b. D'où l'on voit que BS est perpendiculaire aux deux rayons CB & GB, & que l'angle CBG est la mesure de l'inclinaison mutuelle des plans, qui est donnée.

Du point décrivant L, soit tirée la perpendiculaire LS sur la tangente BS, & la perpendiculaire LR sur le rayon BG du cercle mobile. Soit de même, du point l, tirée la perpendiculaire ls sur la tangente bs, & la perpendiculaire lr sur le rayon bg, dans la situation prochaine. Si maintenant des mêmes points S & s, on tire dans le plan immobile les droites SO & sO perpendiculaires aux tangentes BS & bs, & qu'on abaisse des points L & l du cercle mobile, dans l'une & dans l'autre situation, les lignes LN & ln perpendiculaires au plan immobile, le point N sera dans la droite SO, & le point n dans sO; & la courbe ENn qui passe par tous ces points sera la projection ichnographique de l'Épicycloïde ELl. Car comme BS est perpendiculaire au plan qui passe par les droites BC & BG, de même BS est perpendiculaire au plan qui passe par les droites SN & SL: il faut entendre la même chose des deux autres plans qui passent par bC, bg, & par sn, sl, auxquels plans bs est perpendiculaire; & l'on aura ainsi les angles OSL, CBG, Cbg; Osl égaux entr'eux, & chacun égal à l'inclinaison constante des plans du cercle mobile & de l'immobile. Soit mis t au point où sO coupe BS, & l'on aura le triangle SOt semblable au triangle BCb, comme on le voit facilement. Enfin, soit conçue NP dans le plan immobile parallele à St.

SOLUTION.

Cette préparation faite; soient le rayon du cercle immobile CB ou $Cb = a$, le rayon du cercle mobile GB, ou

$gb = b$, le ſinus droit de l'inclinaiſon des deux plans $= g$; en prenant l'unité pour le ſinus total. ſon coſinus $= \sqrt{(1 - gg)} = h$; l'abſciſſe dans le cercle mobile $BR = x$, ce qui donne RL ou $BS = \sqrt{(2bx - xx)}$, & partant $d(ER) = dx$, & $d(RL)$ ou $d(BS) = (b - x)\,dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; d(arc BL) $= bdx : \sqrt{(2ax - xx)}$.

I.

On trouvera le rayon de la ſphére ſur la ſuperficie de la quelle on décrit l'Epicycloïde, en prenant une quatriéme proportionnelle, au ſinus d'inclinaiſon des plans, au ſinus total, & à la diſtance CG des centres des deux cercles; or $CG = \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$; on aura donc le rayon de la ſphére $= \frac{1}{g}\sqrt{(aa - 2hab + bb)}$. La démonſtration en eſt ſi facile, qu'elle ne mérite pas que je la mette ici.

II.

Puiſque $d(BS)$ ou $(b - x)\,dx : \sqrt{(2bx - xx)} = bs - BS = bB - tS$; & que d(arc BL) ou $bdx : \sqrt{(2bx - xx)} =$ l'arc bl — l'arc BL = l'arc bE — l'arc $BE = bB$, on aura $tS = xdx : \sqrt{(2bx - xx)}$.

III.

A cauſe des triangles ſemblables CBb, OSt, on a $Bb\,[bdx : \sqrt{(2bx - xx)}] : St\,[xdx : \sqrt{(2bx - xx)}] = CB\,[a] : OS = ax : b$.

IV.

A cauſe des triangles ſemblables CBb, bst, on a $CB\,[a] : bs\,[\sqrt{(2bx - xx)}] = Bb\,[bdx : \sqrt{(2bx - xx)}] : ts = bdx : a$.

V.

V.

Maintenant, à cause de l'angle droit LNS & de $LSN = ABC =$ l'inclinaison des deux plans, on aura $1 : h = SL[x] : SN$; d'où l'on tire $SN = hx$; donc $d(SN) = hdx$. Or $d(SN) = sn - SN = sn - tP = st + Pn$: donc $st + Pn = hdx$, & ôtant de part & d'autre st ou $bdx : a$, reste $Pn = hdx - bdx : a = (ah - b)dx : a$.

VI.

On a $OS[ax : b$ par §. 3$] : ON[OS - SN$ ou $ax : b - hx] = St\ [xdx : \sqrt{(2bx - xx)}$ par §. 2$] : NP$, & ainsi $NP = (a - hb)xdx : a\sqrt{(2bx - xx)}$.

VII.

De plus $1 : g = SL$, ou BR, ou $x : LN$, qui est la hauteur du point L sur le plan immobile; on aura donc $LN = gx$, & $d(LN)$ ou $ln - LN = gdx$.

VIII.

Ayant ainsi trouvé les trois élemens $NP = (a - bh)xdx : a\sqrt{(2bx - xx)}$ [§. 6], $Pn = (ah - b)dx : a$ [§. 5] & $d(LN) = gdx$ [§. précéd.]; on aura premierement l'élement de la courbe de projection, ou $Nn = \sqrt{(NP^2 + Pn^2)} = dx \sqrt{((a - bh)^2 . x : (2aab - aax) + (ah - b)^2 : aa)}$, & ensuite l'élement Ll de l'Epicycloïde $= \sqrt{(Nn^2 + d(NL^2))} = dx \sqrt{((a - bh)^2 x : (2aab - aax) + (ah - b)^2 : aa + gg)} =$ [à cause de $hh + gg = 1$] $= \frac{1}{a} dx \sqrt{((a - bh)^2 x : (2b - x) + aa - 2hab + bb)}$, dont l'intégrale donne la longueur de l'arc de l'Epicycloïde FL. Mais $aa - 2hab + bb$ étant $> (a - bh)^2$, on verra avec une légére attention, que cette intégrale en general dépend de la quadrature de l'hyperbole. *C. Q. F. T.*

I X.

On voit par-là que Mr. Herman ſe trompe, lorſqu'il croit l'Epicycloïde ſphérique rectifiable algébriquement ; ſon paralogiſme ſe trouve dans la ligne pénult. p. 215 *, là où il dit, *interea verò* [*dum circulus generator rotatur*] *deſcribet* BL *ſectorem* LB*l* *ſimilem ſectori* Bβb. [Voyez ſa Figure 5.] Ce qui n'eſt pas vrai ; car la ligne B*b* n'eſt pas dans le même plan que le cercle generateur BLA, mais B*b* décline de ce plan de la quantité de l'angle de contact *b*B*e* ; d'où il eſt facile de voir que cette déclinaiſon dans la rotation empêche le ſecteur LB*l* d'être ſemblable au ſecteur Bβb.

TAB. XLVIII. *Fig.* 5.

X.

Corol. I. Si $h = 1$, & par conſéquent $g = 0$, on aura pour l'élement de la courbe cycloïdale $\frac{1}{a} dx \sqrt{((a-b)^2 x : (2b-x) + (a-b)^2)} = \frac{a-b}{a} dx \sqrt{(x:(2b-x)+1)} = \frac{a-b}{a} dx \sqrt{(2b:(2b-x))}$, dont l'intégrale (en lui faiſant la correction néceſſaire) donne $\frac{2a-2b}{a} \times (2b - \sqrt{(4bb-2bx)})$; dans laquelle ſi l'on prend $x = 2b$, on aura toute la demi-Epicycloïde $= (4ab-4bb) : a$. Or $\frac{4ab-4bb}{a} : 4b = a-b : a$; c'eſt-à-dire, toute la demi-Epicycloïde eſt au double du diamétre AB du cercle generateur, comme la différence des rayons de l'un & de l'autre cercle, eſt au rayon du cercle immobile. C'eſt ce que trouve Mr. Herman dans ſon ſecond *Corollaire* †, & cela ne doit pas ſurprendre, parce que ſon paralogiſme ceſſe dans ce cas, où la Cycloïde ceſſe d'être ſphérique, & devient plane ; car h étant $= 1 =$ ſinus total

* N°. précédent, pag. 214. lig. 25. † pag. 215. lig. 5.

total, l'inclinaison des plans s'évanouït, & ils s'apliquent l'un sur l'autre, de maniere que la petite ligne Bb se trouve dans le plan du cercle mobile, aussi-bien que dans l'autre; cas dans lequel on peut conclure avec vérité que le secteur LBl [dans la figure de M. HERMAN] sera semblable au secteur Bβb, ce qui n'est pas permis dans les Epicycloïdes sphériques, à cause de la non-coïncidence des plans.

XI.

Il y a encore un autre cas dans lequel la similitude de ces secteurs a lieu; c'est quand a, ou le rayon du cercle immobile est infini, & qu'ainsi sa circonférence dégénére en ligne droite coïncidente avec la tangente, & que par conséquent la ligne Bb se confond avec Be, qui est dans le même plan que le cercle mobile. Ainsi dans ce cas, il sera vrai que toute la demi-cycloïde sera au double du diamétre AB, comme $\surd(aa - 2hab + bb)$ à a, ou simplement comme a à a; car $\surd(aa - 2hab + bb)$ devient $= a$, à cause de a infini par raport à b & hb. On aura donc dans ce cas-là la demi-cycloïde ordinaire, égale au double du diamétre. Ce qu'on sait, il y a long-tems.

Mais nôtre formule $\frac{1}{a} dx \surd((a - bh)^2 x : (2b - x) + aa - 2hab + bb)$ le donne aussi, en effaçant les termes qui s'évanouissent devant a & aa; car elle se change en celle-ci, $dx \surd(2b : (2b - x))$ qui étant intégrée, donne $4b - 2\surd(4bb - 2bx)$ pour la longueur de l'arc de la Cycloïde EL; ainsi prenant $x =$ tout le diamétre $2b$, on a la demi-cycloïde $= 4b$, c'est-à-dire, égal au double du diamétre.

Mais ces deux cas dans lesquels la solution de M. HERMAN est bonne, par la raison que nous en avons donnée, ne peuvent pas, comme nous avons dit à l'égard du premier se raporter à la classe des Cycloïdes sphériques; car en effet ces Cycloïdes sont toutes deux planes. Ainsi il n'y a pas

 une

une seule Epicycloïde sphérique qui ait la longueur que prescrit la régle tirée de cette solution.

XII.

TAB. XLIX. N°. CXLII. Fig. 1.

Coroll. II. Soit maintenant $h = 0$, & par conséquent $g = 1$; ce qui est le cas où les plans des cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre; on aura l'élement de l'Epicycloïde $Ll = \frac{1}{a} dx \sqrt{(2ax : (2b - x) + aa + bb)} = \frac{1}{a} dx \sqrt{((2aab + 2b^3 - bbx) : (2b - x))}$ dont l'intégrale, comme on a déja observé en général [§. 8], dépend de la quadrature de l'hyperbole. Mais l'élement de la courbe de projection $Nn = \frac{1}{a} dx \sqrt{((2b^3 + aax - bbx) : (2b - x))}$ s'intégre par la quadrature du cercle si $a > b$, par la quadrature de l'hyperbole si $a < b$, mais algébriquement si $a = b$; car on a dans ce cas $\int \frac{b}{a} dx \sqrt{\frac{2b}{2b - x}} = 4bb : a - \frac{2b}{a} \sqrt{(4bb - 2bx)} = 4b - 2\sqrt{(4bb - 2bx)}$. Et ainsi la courbe de projection de toute la demi-épicycloïde $= 4bb : a = 4b$, c'est-à-dire, égal au double du diamétre du cercle generateur: ce qu'on peut aussi déduire d'ailleurs; car cette courbe de projection est une Epicycloide plane, produite par la rotation du cercle sur un cercle égal dans le même plan, le diamétre de ce cercle étant sous-double du diamétre du cercle mobile generateur de l'Epicycloïde sphérique, dont il est ici question, & dont la courbe de projection est aussi du genre des caustiques.

XIII.

On a la rectification de la courbe de projection dans le cas $a = b$, non seulement lorsque $h = 0$, mais quel que soit h; car alors l'élement Nn que nous avons trouvé en general [§. 8] $= \frac{1}{a} dx \sqrt{((a - bh)^2 x : (2b - x) + (ah - b)^2)}$

dans

dans ce cas, ou $a = b$, devient $= (1 - h)\, dx \sqrt{(2b : (2b - x))}$, dont l'intégrale eſt $(1 - h) \times (4b - 2\sqrt{(4bb - 2bx)}) =$ l'arc EN; & lorſque $x = 2b$, on aura la longueur de la demi-projettée, qui répond à la demi-épicycloïde $= 4b - 4hb$.

XIV.

Au reſte dans le cas $h = 0$, lorſque les deux cercles ſont perpendiculaires l'un à l'autre, on trouve le rayon de la ſphére, ſur la ſuperficie de laquelle l'Epicycloïde ELl eſt décrite $= \sqrt{(aa + bb)}$. D'où l'on voit qu'aucun des deux cercles ne ſauroit être un grand cercle de la ſphére; car l'un & l'autre de leurs rayons, tant a que b, eſt $< \sqrt{(aa + bb)}$.

XV.

Coroll. III. Pour trouver maintenant les cas de rectificabilité de l'Epicycloïde ſphérique; je vois d'abord que ſi dans la formule generale [§. 8] $Ll = \frac{1}{a} dx \sqrt{((a - bh)^2 : (2b - x) + aa - 2hab + bb)}$, on fait $a = bh$, elle ſe change en $Ll = \frac{1}{bb} dx \sqrt{(bb - hhbb)}$, qui à cauſe de $1 - hh = gg$, devient $g\, dx : h$; ainſi donc en intégrant ſimplement, on a la longueur de l'arc de l'Epicycloïde $= gx : h$; ce qui fait voir que chacun de ſes arcs EL, dans le cas $a = hb$, eſt à l'abſciſſe BR en raiſon donnée de g à h, c'eſt-à-dire, comme la tangente de l'inclinaiſon mutuelle du cercle mobile & de l'immobile, au ſinus total; propriété ſi ſinguliére, que je ne ſai pas ſi aucune autre courbe peut l'avoir, c'eſt-à-dire, s'il y a aucune autre courbe dont l'abſciſſe priſe indéfiniment ſoit en raiſon donnée à ſon arc correſpondant. On a donc dans ce même rapport de g à h toute la demi-épicycloïde, au diamétre du cercle mobile ou generateur; ou, ce qui revient au même, toute la demi-épicycloïde eſt au double du diamé-

diamètre, comme $\frac{1}{2}g$ eſt à h, ce qui s'éloigne beaucoup du raport que donne M. HERMAN dans ſon premier Corollaire *, où il dit, que toute l'Epicycloïde [il entend par-là ſeulement la demi-épicycloïde] eſt au double du diamétre, comme $\surd(aa + 2hab + bb)$ à a, c'eſt-à-dire, [dans le cas $a = hb$] comme g à h, raport deux fois plus grand que le nôtre de $\frac{1}{2}g$ à h.

XVI.

De plus, comme on a trouvé ci-deſſus [§. 8] l'élement de la projection $Nn = \frac{1}{a} dx \surd((a - bb)^2 x : (2b - x) + (ah - b)^2)$, il eſt clair que cette courbe ENn eſt auſſi algebriquement rectifiable, lorſque $a = hb$; car on a alors $Nn = \frac{1}{bb} dx \surd(hbb - b)^2$ ou [à cauſe de $hh - 1 = -gg$] $= \frac{1}{bb} dx \surd g^4 bb = ggdx : h$, dont l'intégrale donne la courbe $ENn = ggx : h$. D'où l'on voit que dans ce cas l'Epicycloïde eſt à la courbe de projection correſpondante, comme $gx : h$ à $ggx : h$, où comme 1 à g, c'eſt-à-dire, comme le ſinus total au ſinus d'inclinaiſon des cercles : & ces trois lignes, l'Epicycloïde, la Courbe de projection, & l'Abſciſſe correſpondante, ſont entr'elles comme ces trois termes pris dans le même ordre, g, gg, & h.

XVII.

SCHOLIE I.

Ce cas où $a = hb$, eſt le ſeul qui rend l'Épicycloïde ſphérique algébriquement rectifiable ; & ſi de plus les rayons des deux cercles ſont commenſurables entr'eux, c'eſt-à-dire, ſi a ou hb eſt à b, ou h à 1, ou le coſinus d'inclinaiſon des plans eſt au ſinus total comme nombre à nombre, l'Epicycloïde ſera algébrique. Mais c'eſt ici une choſe digne de remarque, qu'ayant pris à volonté pour le cercle immobile, quelqu'un

* N°. précéd. pag 215. lig. 1.

qu'un des petits cercles de la ſphére, le cercle mobile ſera toûjours un grand cercle de la même ſphére: car ces deux cercles en ſe touchant, ont l'inclinaiſon requiſe pour que $a = hb$, comme il eſt facile de voir: car il eſt clair qu'ayant tiré des rayons des deux centres au point commun d'attouchement, on a le rayon du petit cercle, au rayon du grand, comme le coſinus d'inclinaiſon, au ſinus total, c'eſt-à-dire, a à b comme h à 1, & par conſéquent $a = hb$: ce qu'on voit auſſi par le §. 1, où les rayons du cercle immobile & du mobile a & b étant donnés, & l'inclinaiſon de leurs plans, nous avons trouvé en general le rayon de la ſphére $= \frac{1}{g} \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$; car ſi pour a on ſubſtitue hb, on aura $\frac{1}{g} \sqrt{(aa - 2hab + bb)}$ $= \frac{1}{g} \sqrt{(bb - hhbb)} =$ [à cauſe de $1 - hh = gg$] $\frac{1}{g} \sqrt{(ggbb)} = b$.

SCHOLIE II.

XVIII.

On peut rendre ſenſible la maniere dont cette Epicycloïde ſphérique ſe décrit, par un exemple aſſés élégant. Concevons dans la Sphére céleſte l'Ecliptique, qui dans le point le plus bas touche le Tropique du Capricorne, faiſant avec ſon plan une inclinaiſon de 23 degrés & demi.

Maintenant on peut concevoir de deux manieres la generation de l'Epicycloïde: car, ou l'on peut ſupoſer que la Sphére & le Tropique demeurant immobiles, l'Ecliptique ſe meut en tournant ſur le Tropique, tandis que chacun de ſes points, par exemple, celui qui eſt au commencement du Capricorne, décrit l'Epicycloïde ſphérique qu'on demande: ou bien, ce qui fait le même effet, on peut ſupoſer que la Sphére entiere avec tous ſes cercles conſervant entr'eux la même ſituation, ſe meut d'un mouvement uniforme autour de l'axe du Monde d'Orient en Occident, pendant que quelque point

mobile partant du commencement du Capricorne, s'avance d'un mouvement propre & uniforme dans l'Ecliptique d'Occident en Orient, avec une vitesse uniforme & égale à celle d'un des points du Tropique. Car on voit que par ce moyen le point mobile dans l'Ecliptique décrira la même courbe qui avoit été décrite de la premiere maniere. Cette seconde maniere a une certaine analogie avec le mouvement du Soleil, composé du mouvement diurne ou commun, & du mouvement propre, selon le Systéme de Ptolemée ou de Tycho: car en effet si le Soleil se mouvoit dans l'Ecliptique avec une vitesse égale à celle qu'a le Tropique pour exécuter le mouvement diurne, & qu'ainsi le tems d'une révolution du Soleil dans l'Ecliptique fût au tems d'une révolution de la Sphére qui fait la longueur du jour naturel, dans le même rapport qu'a le rayon de l'Ecliptique ou le rayon de la Sphére au rayon du Tropique, ou comme le sinus total au cosinus de 23 degrés & demi, le centre du Soleil décriroit exactement une de nos Epicycloïdes sphériques algébriquement rectifiables. Mais comme le Soleil a son mouvement propre dans l'Ecliptique beaucoup plus lent qu'il ne faudroit pour cela, la ligne que le centre du Soleil décrit entre les deux Tropiques pendant l'espace d'une année, par le mouvement combiné du mouvement commun & du mouvement propre, sera du genre des Cycloïdes allongées comme les Géométres les appellent, plutôt que du genre des Spirales sous la forme desquelles TYCHO les a conçues.

SCHOLIE III.

XIX.

Après tout cela, on voit comme il faut satisfaire au Problême de Mr. OFFENBURG, dans lequel on demande de faire à une voûte hémisphérique des fenêtres ovales, dont le contour de chacune soit absolument rectifiable. Car quoique les Epicycloïdes sphériques, décrites selon la condition du Corol-

rollaire 3, n'ayent pas la forme d'ovales: cependant de deux ou plusieurs de leurs parties jointes & disposées comme il faut, on formera facilement une figure fermée & ovale, pourvu qu'on observe, dans la description de nôtre Epicycloïde, de choisir pour le cercle immobile quelqu'un des petits cercles de la sphére, dont le rayon soit au rayon de la sphére, comme nombre à nombre; ce qui fera qu'on aura la construction géométrique de l'Epicycloïde, & tout à la fois sa longueur absolument rectifiable. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE IV.

XX.

Quant à la description ichnographique de l'Epicycloïde sphérique, c'est-à-dire, la maniere de déterminer la courbe de projection dans un plan, en abaissant, de chaque point de l'Epicycloïde, des perpendiculaires sur le plan du cercle immobile, considéré comme la base; voici comment cela se fait. Soit décrit séparément [*Fig.* 2] un cercle $\alpha\lambda\beta$ égal au cercle mobile, & de quelque point fixe λ, qui répréfente le commencement de la rotation, soit pris un arc $\lambda\beta$ à volonté; par le point β soit tiré le diamétre $\beta\alpha$, auquel soit tirée la perpendiculaire $\lambda\tau$; ensuite du point E du cercle immobile, qui soit l'origine commune de l'Epicycloïde & de la courbe projettée qu'on veut construire, soit pris l'arc $EB =$ l'arc $\lambda\beta$, ce qui se peut toûjours faire algébriquement, puisque, comme on le supose, les rayons des cercles sont commensurables: ensuite du point B ayant mené la tangente $BS = \tau\lambda$, soit élevée au point S, dans le plan du cercle immobile, la perpendiculaire SN qui soit à $\beta\tau$, comme b à 1, c'est-à-dire, comme le sinus du complément d'inclinaison des deux cercles, au sinus total. Cela fait, le point N sera dans la Courbe ENn de projection qu'on cherche, & ainsi on aura tant de ses points qu'on voudra. La démonstration est claire d'elle-même.

TAB. XLIX. N°. CXLII. Fig. 1 & 2.

REMARQUE.

XXI.

Quoique, dans la Figure qui sert à ce Mémoire, on supose aigu l'angle *CBG* qui marque l'inclinaison des plans, & que le calcul ait été fait pour cette suposition; il faut cependant avertir, que tout ce qui en résulte se peut facilement accommoder à l'hypothèse de l'angle *CBG* obtus, en changeant par-tout le signe de la lettre *b* d'une seule dimension, puisque le cosinus de l'angle obtus devient négatif, si auparavant on avoit suposé dans l'analyse l'aigu positif. D'où l'on voit que de toutes ces Epicycloïdes sphériques, dans lesquelles l'angle d'inclinaison est obtus, il n'y en a aucune qui soit algébriquement ou absolument rectifiable; car on auroit $a = -bb$, c'est-à-dire, le rayon du cercle mobile seroit négatif, & par conséquent impossible: ce qui paroit aussi, parce que le cercle mobile qui doit être un grand cercle de la sphére [§. 17] fait toûjours nécessairement l'angle d'inclinaison aigu avec les petits, pourvû que ces deux cercles se touchent, comme font, par exemple, l'Ecliptique & les Tropiques.

XXII.

Il faut encore remarquer que la méthode que nous venons de donner, s'aplique aussi facilement aux Epicycloïdes sphériques allongées & raccourcies, c'est-à-dire, lorsque le point décrivant *L*, au lieu d'être pris sur la circonférence du cercle mobile, est pris au dedans ou au déhors; ou, ce qui revient au même, si l'on conçoit le cercle mobile *ALB* glisser au lieu de rouler, de maniere qu'un de ses points *B*, pris à l'extrémité du diamétre *AB*, rase continuellement la circonférence du cercle immobile *EBH*, pendant que quelque point *L* de la circonférence du cercle mobile, se meut d'un mouvement uniforme de *B* vers *A* passant par *L*, & avec une vitesse qui soit à la vitesse du point

point rasant B, qui s'avance de E vers H par B, comme 1 à n, ce qui fait que [prenant le point E pour l'origine commune de l'un & l'autre mouvement & de l'Epycicloïde qu'on décrit] l'arc BL est à l'arc EB dans le même raport de 1 à n. Car par ce mouvement composé, le point L décrira une Epicycloïde sphérique, allongée si n est plus grande que l'unité, & raccourcie si n est moindre ; & si n est égale à l'unité, ce sera l'Epicycloïde ordinaire, dont nous avons parlé jusqu'ici.

XXIII.

Je dis donc que, par des calculs semblables aux précédens, on trouvera l'élement Nn de la courbe de projection $= \frac{1}{a}dx \sqrt{((nab - ab + ax - nbhx)^2 : (2bx - xx) + (ah - nb)^2)}$ & l'élement de l'Epicycloïde $Ll = \frac{1}{a}dx\sqrt{((nab - ab + ax - nbhx)^2 : (2bx - xx) + aa - 2nhab + nnbb)}$. Je n'entre point dans le détail des cas particuliers, on voit seulement qu'il n'y a rien qui puisse faire conclure qu'aucune de ces Epicycloïdes, soit allongées, soit raccourcies, soit absolument ou algébriquement rectifiable. Pour leur construction, on l'a par la maniere même dont elles se décrivent.



Ff 3 SUR

N°. CXLIII.

SUR LES COURBES ALGE'BRIQUES ET RECTIFIABLES TRACE'ES SUR UNE SURFACE SPHERIQUE.

PROBLÊME.

Décrire sur une surface sphérique une Courbe algébrique qui soit rectifiable.

SOLUTION.

I.

TAB. XLIX. N°. CXLII. & III. *Fig.* 3 & 4.

SOIT RST [*Fig.* 3 & 4] un grand Cercle de la sphére suposé parallele à l'horison, pour aider l'imagination, dont le centre est C. De chaque point a, b, e, d, de la courbe cherchée, soient conçus abaissées sur le plan du cercle RST les perpendiculaires aA, bB, eE, dD, qui forment la courbe de projection $ABED$, dont il faut maintenant chercher la nature, & qu'il faut décrire, parce qu'on décrira ensuite facilement la courbe cherchée, en élevant perpendiculairement sur le plan du cercle de chaque point B les droites Bb qui rencontrent la superficie sphérique dans les points b. Pour cela, soit conçue la courbe de projection ABD étendue séparément en ligne droite $\alpha\beta\delta$, qui soit comme l'axe des apliquées αa, βb, ϵe, δd, égales respectivement aux droites Aa, Bb, Ee, Dd, prenant $\alpha\beta = AB$, $\alpha\epsilon = AE$, &c. D'où résulte une nouvelle courbe $abed$, dont les parties ab, ae, &c. seront respectivement égales aux arcs ab, ae, &c. de la courbe sur la superficie sphérique.

II.

I I.

Cela supposé, je change le Problême proposé en celui-ci: Transformer l'axe rectiligne $\alpha\beta\delta$ en un curviligne *ABD*, de maniere qu'ayant pris un arc quelconque *AB* égal à une abscisse quelconque $\alpha\beta$, la hauteur *Bb* du point *b* sur le point *B* de la projection, soit égale à l'apliquée d'une ligne donnée *abd*. Si donc *abd* est algébrique, & de plus algébriquement rectifiable, comme le sont les droites & une infinité de Paraboles; de plus, si parmi toutes les lignes *abd*, il s'en trouve quelqu'une qui admette un axe courbe *ABD* construsible algébriquement, l'on voit que cette courbe décrite sur la surface de la sphére, dont *ABD* est la projection, sera algébrique, & algébriquement rectifiable, comme ayant chacun de ses arcs égaux à chaque *ab*.

I I I.

Prenons donc la plus simple de toutes les lignes algébriques rectifiables *abd*, savoir la ligne droite [que je trouve très-propre à nôtre dessein, car une autre, comme la seconde Parabole cubicale, qui est aussi rectifiable, ne réussit pas]. Ayant tiré *df* parallele à l'axe $\delta\alpha$, soit la raison de *af* à *fd* comme 1 à *n*, & ainsi $fa : da = 1 : \sqrt{(nn + 1)}$, ou [faisant $nn + 1 = mm$] $af : da = 1 : m$. Maintenant, pour changer l'axe rectiligné $\alpha\beta\delta$ dans le curviligne *ABD*, ayant tiré du centre *C* les rayons infiniment proches *CS*, *CT*, qui coupent la courbe *ABD*, dans les points *B*, *E*, & prenant *R* pour le commencement des arcs variables *RS*, *RT*, &c. soit fait $RS = x$, $CB = y$, le rayon $CS = 1$, $ST = dx$, $FE = dy$; ayant décrit le petit arc concentrique *BF* qui sera $= ydx$, on aura $BE = \sqrt{(yydx^2 + dy^2)} = \beta\epsilon$, la hauteur du point *b* sur le plan du cercle, c'est-à-dire $bB = \sqrt{(1 - yy)}$, & sa différence $d(bB) = -ydy : \sqrt{(1 - yy)}$.

IV.

IV.

Puisque donc $d(bB) : BE = af : df = 1 : n$, l'on aura $\frac{-ydy}{\sqrt{(1-yy)}} : \sqrt{(yydx^2 + dy^2)} = 1 : n$; & $\sqrt{(yydx^2 + dy^2)} = -nydy : \sqrt{(1-yy)}$, ou $yydx^2 + dy^2 = nnyydy^2 : (1-yy)$. Donc $yydx^2 = nnyydy^2 : (1-yy) - dy^2 = ((nn+1)yydy^2 - dy^2) : (1-yy)$, & par là on aura $dx = dy\sqrt{((nn+1)yy-1)} : y\sqrt{(1-yy)} =$ [à cause de $nn+1 = mm$] $dy\sqrt{(mmyy-1)} : y\sqrt{(1-yy)} = (mmyydy - dy) : y\sqrt{((1-yy).(mmyy-1))} = mmydy : \sqrt{((1-yy).(mmyy-1))} - dy : y\sqrt{((1-yy).(mmyy-1))}$.

V.

La premiere partie s'intégre comme il suit. Soit fait $yy = 2z$, & l'on aura $mmydy : \sqrt{((1-yy).(mmyy-1))} = mmdz : \sqrt{((1-2z).(2mmz-1))} = mmdz . \sqrt{(-1 + (2mm+2)z - 4mmzz)} = mmdz : \sqrt{((mm-1)^2 : 4mm - (2mz - (mm+1) : 2m)^2)} = \frac{2m^3dz : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{4mm}{mm-1}z - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ [en substituant pour $2z$ sa valeur yy] $\frac{2m^3ydy : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}} = \frac{\frac{1}{2}m \times 4mmydy : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$: Donc $\int \frac{mmydy}{\sqrt{((1-yy)\times(mmyy-1))}} = \frac{1}{2}m \int - \frac{4mmydy : (mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ c'est-à-dire, $=$ à un arc de cercle pris $\frac{1}{2}m$ fois, dont le rayon $= 1$, & le sinus droit $= \frac{2mm}{mm-1}yy - \frac{mm+1}{mm-1}$: soit apellé cet arc A.

VI.

V I.

L'autre partie $-dy:y\sqrt{((1-yy)\times(mmyy-1))}$ s'intégre de cette maniere: soit divisé chaque terme par y^3, l'on a $\frac{-dy:y^3}{\sqrt{((1:yy-1)(mm-1:yy))}}=$ [faisant $1:yy=2z$] $dz:\sqrt{((2z-1)(mm-2z))}=dz:\sqrt{(-mm+(2mm+2)z-4zz)}=dz:\sqrt{(\frac{1}{4}(mm-1)^2-(2z-\frac{1}{2}(mm+1))^2)}$ $=\frac{2dz:(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{4}{mm-1}z-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ [en substituant pour $2z$ sa valeur qui est ici yy] $\frac{-2dy:y^3(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2}{(mm-1)yy}-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ $=\frac{\frac{1}{2}\cdot-4dy:y^3(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2}{(mm-1)yy}-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$. Donc $\int(-dy:y\sqrt{((1-yy)}$. $(mmyy-1)))=\frac{1}{2}\int\frac{-4dy:y^3(mm-1)}{\sqrt{(1-(\frac{2}{(mm-1)yy}-\frac{mm+1}{mm-1})^2)}}$ c'est-à-dire $=$ à la moitié d'un arc de cercle dont le rayon $=1$ & le sinus droit $=2:(mm-1)yy-(mm+1):(mm-1)$. Soit apellé cet arc B.

V I I.

Nous avons donc, par les §. 5 & 6, $\frac{1}{2}mA+\frac{1}{2}B=\int(mmydy:\sqrt{((1-yy)(mmyy-1))}-dy:y\sqrt{((1-yy)(mmyy-1))}$ $=$ [§. 4] $\int(dy\sqrt{((nn+1)yy-1)}:y\sqrt{(1-yy)})=\int dx$, ou $mA+B=2\int dx=2x$.

V I I I.

Pour la construction de cette Equation, voici comme il faut s'y prendre. Soit SLM [*Fig.* 5] encore un grand cercle de la sphére, dont le rayon $CL=1$; soit pris dedans le sinus MN =

TAB. XLIX. N°. CXLII. & CXLIII. *Fig.* 5.

$= (2mmyy - mm - 1) : (mm - 1)$, & encore l'autre finus $SR = (2 : yy - mm - 1) : (mm - 1)$, l'on aura l'arc $LM = A$ & l'arc $LS = B$. Si donc on prend l'arc LM, m fois, & qu'on lui ajoute l'arc LS, la moitié de la fomme des deux arcs donnera l'arc cherché x, ou [dans la *Fig.* 3] l'arc RS pour un y quelconque, ou CB.

I X.

Pour avoir une équation algébrique entre y & le finus de l'arc x qui détermine la nature de la courbe de projection ABD [*Fig.* 3] & la courbe algébriquement rectifiable fur la furface fphérique, il faut choifir pour m quelque nombre rationel [car on aura différentes courbes felon la diverfité du nombre m]. On fait que le finus d'un arc A étant donné, l'on a algébriquement le finus d'un arc mA multiple ou foûmultiple, & que les finus des arcs mA & B étant donnés, l'on a algébriquement le finus de la fomme des arcs $mA + B$, & le finus de la moitié de cette fomme. Car faifant le rayon, ou finus total $= 1$, le finus de l'arc $mA = S$, & le finus de l'arc $B = T$, l'on trouve le finus de la fomme $mA + B = T \times \surd(1 - SS) + S \surd(1 - TT)$.

Ainfi donc fi l'on apelle v le finus de l'arc indéterminé x; l'on aura le finus de l'arc double $2x = 2v \surd(1 - vv)$; puifque donc les arcs $mA + B$ & $2x$ doivent être égaux, il faut que leurs finus foient auffi égaux; d'où l'on tirera l'Equation algébrique entre les fonctions de y & v, qui déterminera la nature de la courbe de projection, & la courbe que l'on cherche fur la furface de la fphére, & qui fera celle-ci, $T \times \surd(1 - SS) + S \times \surd(1 - TT) = 2v \surd(1 - vv)$; S & T étant données par y. Donc, &c. *C. Q. F. T.*

X.

EXEMPLE. Soit pris le nombre $m = 2$, & par conféquent $n =$

$n = \sqrt{(mm - 1)} = \sqrt{3}$; l'on aura le finus de l'arc A, ou $(2mmyy - mm - 1) : (mm - 1) = (8yy - 5) : 3$; le finus de l'arc B, ou $(2 : yy - mm - 1) : (mm - 1) = (2 - 5yy) : 3yy$; le finus de l'arc mA, ou $2A = \frac{16yy - 10}{3} \sqrt{\frac{-16 + 80yy - 64y^4}{9}}$, & partant le finus de la fomme des arcs $2A + B = \frac{2 - 5yy}{3yy} \times \sqrt{(1 - \frac{(16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4)}{81})} + \frac{16yy - 10}{3} \times \sqrt{\frac{-16 + 80yy - 64y^4}{9}} \times \sqrt{(1 - \frac{(2 - 5yy)^2}{9y^4})} = 2v\sqrt{(1 - vv)}$, ou, parce que la derniére partie du premier membre a deux côtés commenfurables, on peut abréger l'équation de cette maniere $\frac{2 - 5yy}{27yy} \times \sqrt{(81 - (16yy - 10)^2 \times (-16 + 80yy - 64y^4))} + \frac{32yy - 20}{27yy} \sqrt{(-4 + 20yy - 16y^4)} = 2v\sqrt{(1 - vv)}$, & cette équation eft celle qui exprime la nature de la courbe de projection, de tous les points de laquelle fi l'on éléve les droites $= \sqrt{(1 - yy)}$ perpendiculaires au plan fur lequel elle eft décrite, ces perpendiculaires rencontreront la furperficie de la fphére dans les points de la courbe qu'on cherche, qui fera algébriquement rectifiable, auffi-bien que fa projettée; car la différence de la hauteur de deux perpendiculaires, dont chacune eft exprimée par fon $\sqrt{(1 - yy)}$, eft à l'arc de la courbe de projection intercepté entre ces deux hauteurs, comme 1 à n, c'eft-à-dire, [à caufe de $n = \sqrt{(mm - 1)}$] comme 1 à $\sqrt{3}$; & cette même différence de hauteurs eft à l'arc de la courbe décrite fur la fuperficie fphérique, intercepté entr'elles, comme 1 à $\sqrt{(1 + nn)}$, c'eft-à-dire, dans cet exemple, comme 1 à 2. Ainfi chaque arc de la projettée eft à fon arc correfpondant fur la fuperficie fphérique, comme $\sqrt{3}$ à 2, ou comme la hauteur du triangle équilateral à fon côté. L'on aura donc entre l'arc fur la fuperficie fphérique, l'arc correfpondant de la projection, & la différence des hauteurs perpendiculaires, les raports qui font entre 2, $\sqrt{3}$, & 1.

Scholie. L'on voit par-là que les courbes que nous venons de trouver par la méthode analytique, sont les mêmes que les Epicycloïdes sphériques, décrites par un grand cercle de la sphére qui tourne sur un petit; car j'ai fait voir dans le §. 16 *, des Epicycloïdes sphériques, que ces sortes d'Epicycloïdes ont chacun de leurs arcs aux arcs correspondans de la courbe de projection en raison donnée de 1 à g, ou comme le sinus total est au sinus de l'inclinaison du cercle mobile sur l'immobile. Si donc nous voulons construire sur la superficie de la sphére une courbe dont la longueur ait une raison donnée à la longueur de sa projettée, par exemple, de 2 à $\sqrt{3}$, il faut seulement pour le cercle immobile, prendre celui qui fait avec un grand cercle mobile, un angle d'inclinaison, tel que 1 à g soit dans le raport de 2 à $\sqrt{3}$, ou de 1 à $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Or c'est l'angle que forment deux côtés d'un triangle équilateral, savoir, $\frac{2}{3}$ d'un angle droit, ou l'angle de 60 degrés. Concevons donc, dans la Sphére, un Tropique éloigné de l'Equateur de 60 degrés, & faisant tourner sur lui l'Ecliptique, un point pris dans sa circonférence décrira la courbe qu'on cherche, qui satisfait à cette prolixe équation que nous avons trouvée ci dessus, $\frac{2-5yy}{27yy}\sqrt{(81-(16yy-10)^2 \&c)}+\frac{32yy-20}{27yy}\sqrt{(-4+\&c)}=2v\sqrt{(1-vv)}$. Et il paroit presque incroyable qu'on puisse construire une équation si composée par un mouvement si simple.

Au reste, l'on voit que dans cette supposition, l'Ecliptique sera double du Tropique, & que par conséquent il devra le parcourir deux fois, avant que le point décrivant revienne au point d'où il est parti; & la longueur de la demi-Epicycloïde sera double de la plus grande hauteur ou de la distance entre les Tropiques, & par conséquent la longueur de l'Epicycloïde entiere sera égale à quatre fois cette distance. Cette courbe [comme il est facile de le voir par la maniere dont elle se produit] a quatre parties semblables & égales, terminées aux quatre points qu'on apelle Cardinaux; la 1e. compri-

* N°. préced. pag. 224.

comprise entre le point du Solstice d'Hiver [si l'on supose que la rotation de l'Ecliptique se fait d'Orient en Occident] & le point équinoxial d'Automne; la 2e. entre ce point & le Solstice d'Eté; la 3e. entre le Solstice d'Eté & l'Equinoxe du Printems; la 4e. enfin entre l'Equinoxe du Printems & le Solstice d'Hiver: & ainsi la longueur de chacune de ces parties est égale à l'intervalle entre les Tropiques; c'est-à-dire, à la corde de 120 degrés; en suposant toûjours, comme nous avons fait dans cet exemple, le Tropique éloigné de l'Equateur de 60 degrés.

Cet Exemple, qui paroit le moins compliqué de tous, me fait tellement craindre les autres, qui sans doute demanderoient un travail immense, pour trouver l'équation algébrique des courbes de projection, que j'aime mieux les laisser chercher à d'autres: Il me suffit d'avoir trouvé la méthode, & de l'avoir indiquée.

No. CXLIV.

EXCERPTUM

E X

THEORIA GENERALI MOTUUM,

Auctore *Jac.* HERMANNO.

EX similibus principiis varia alia Problemata facilem solutionem admittunt. Ut *si corpus B in curva quacunque CB gravitate sua descendat, post se tamen trahens alterum minus corpus A filo ACB super trochleam C mobile annexum, quodque ascendere cogatur in altera curva AC, & quærantur celeritates horum corporum ubivis acquisitæ*: analysis institui potest ut sequetur, postquam lineis & lineolis ad rem facientibus nomina dederimus. Sint ergo CB $= x$, EB $= y$, elem. curvæ Bb $= ds$, Bn $= dx$, & BO $= dy$, celeritas in curvæ puncto B $= u$, celeritas corporis A in directione AC $= v$; item am $= dp = dx$; al $= dq$ & Aa $= dr$.

Comment. Acad. Petrop. Tom. II. pag. 168. § 31. TAB. XLIX. No. CXLV. *Fig.* 3.

 Sunt

Sunt vero A m & b n arculi centro C descripti, & A l ac b o lineolæ horizontali D E parallelæ. His positis, ita argumentor.

1. Inquiro in potentiam qua corpus B propter gravitatem urgetur secundum directionem bB: ad id, dico ut B b [ds] ad Bo [dy], ita pondus B ad $Bdy : ds$, & hæc est potentia qua gravitas corpus B urget secundum b B : sed nondum est tota vis accelerans; nam corpus A gravitate sua ipsi resistit.

2. Propter similem rationem $Ady : dr$ est potentia quæ corpus A propter gravitatem suam urget juxta A a, & si fiat A a [dr]: m a [dp] $=$ ($Adq : dr$): ($Adpdq : dr^2$), hoc exponet potentiam qua filum Ca vel BC trahitur ex B in C. Dicatur præterea Bb [ds] : B n [dx] $= (Adpdq : dr^2)$: ($Adqdpdx : dr^2 ds$), & hæc ultima fractio exponit resistentiam, quam descendens corpus B ab altero A in directione bB subit. Hanc ob causam potentia mobile B accelerans reperitur $= Bdy : ds - Adpdqdx : dr^2 ds$.

3. Incrementum celeritatis in A C vel C D est $= dv$, adeoque incrementum celeritatis corpori A competentis in directione b B $= dxdv : ds = vdv : u$, quia $u : v = ds : dx$; ergo quantitas motus in utroque corpore geniti $= Bdu + Avdv : u$.

4. Cum potentia accelerans ducta in tempusculum $ds : u$, producat motus quantitatem $Bdu + Avdv : u$, habebimus $Bdy : u - Adpdqdx : udr^2 = Bdu + Avdv : u$, atque adeo $Bdy - Adpdqdx : dr^2 = Budu + Avdv$, & sumtis integralibus $By - \int (Adpdqdx : dr^2) = \frac{1}{2} Buu + \frac{1}{2} Avv$ [vel propter $v = udx : ds$] $= \frac{1}{2} Buu + \frac{1}{2} Auudx^2 : ds^2$. Atque hinc elicitur $uu = (2By - 2\int (Adp^2 dq : dr^2)) ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$. Quare si fiat T V $= (By - \int (Adp^2 dq : dr^2)) ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$, & grave libere cadat ex hac altitudine T V, in V acquiret tantam celeritatem, quantam corpus B acquisivit in curva CB.

Si curva C A fiat linea recta verticalis parallela ipsi E B, singulæ dp, dq, & dr fient $= dx$, & habebimus hoc casu T V $= (By - Ax) ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$.

Hoc unum est ex Theorematis illis, qua Vir Celeb. *Joh.* BERNOULLI literis XI Octob. 1727 datis, sine demonstratione misit *, & ex conservatione virium vivarum ipse deduxit.

* Supra N°. CXXXVII. pag. 125.

D E



N°. CXLV.

DE
VERA NOTIONE VIRIUM VIVARUM
EARUMQUE USU IN DYNAMICIS,

Ostenso per exemplum, propositum in Comment. Petropolit. *Tomi II.* pag. 200.

DISSERTATIO;

Autore *Joh.* BERNOULLI.

I.

POstquam Geometræ vidissent Diatriben meam *de Motu*, A. 1726 Gallice editam *, in eaque explicationem claram naturæ virium vivarum, non defuerunt, qui, præjudiciis depositis, statim transirent ad nostra castra. Vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in *facultate agendi* : subsistit enim, etiamsi non agat, neque habeat, in quod agat. Sic, exempli gratiâ, Elastrum tensum, vel etiam corpus in motu constitutum, habet in se agendi facultatem, etiamsi extra se nihil inveniat, in quod suam facultatem exercere possit, &, quamdiu nihil adest cum quo illam communicet, retinet utique totam, tamdiu subsistens, & non efficiens quod efficere posset, si agendi occasionem haberet.

Acta Erud. Lips. 1735. Maj. pag. 210.

II.

Elastrum quippe tensum, quamdiu tensum est, vel corpus in motu æquabili positum, quamdiu nulli alii externo occurrit;

* Supra N°. CXXXV. pag. 1.

rit, non possunt dici agere; nam nihil aliud faciunt, quam perseverare in suo præsenti statu: jam vero omnis actio supponit mutationem status in agente, & perseverare in statu suo non est mutari. Adeoque elastrum tensum, quamvis continuum habeat nisum se se expandendi, nihil tamen agit, quia irritus redditur conatus; donec demum vinculo soluto effectus subsequatur, per amolitionem corporis quod, se se dilatando, in motum concitat. Ita quoque corpus vicissim, data velocitate motum, nondum agit, quia in eo nulla fit mutatio status, atque in se retinet omnem suam agendi facultatem, seu omnem suam vim vivam; donec vel in elastrum tendendum incurrat, vel habeat occasionem, occursu in alia corpora, mutandi illam suam vim; quod fit vel transferendo in hæc alia corpora, seu totam, seu partem; vel accipiendo ab his majorem, quam habuerat, pro diversitate circumstantiarum.

I I I.

Hinc patet, *vim vivam* [quæ aptius vocaretur *facultas agendi*, Gallice le *pouvoir*] esse aliquid reale & substantiale, quod per se subsistit, &, quantum in se est, non dependet ab alio. Unde concludimus, quamlibet vim vivam habere suam determinatam quantitatem, de qua nihil perire potest, quod non in effectu edito reperiatur. Hinc sponte fluit, vim vivam semper conservari; adeo ut quæ ante actionem residebat in uno pluribusve corporibus, nunc post actionem reperiatur necessario in alio, vel aliis pluribus corporibus, nisi quid in prioribus remanserit. Atque hoc est, quod vocamus *conservationem virium vivarum.*

I V.

Vis mortua nihil aliud est, quam solicitatio, qua corpus ad motus accelerationem vel retardationem urgetur; sicuti gravitas, quæ incitat corpora ad descensum & descendentia accelerat, ascendentibus vero resistit eorumque motum retardat.

In

In genere vis mortua vocari poteſt *preſſio.* Differunt autem toto genere vis viva & vis mortua. Illa, ceu vidimus, exiſtit & ſubſiſtit independenter ab omni alio corpore, ita ut nihil requirat extra ſe ad exiſtentiæ ſuæ continuationem, vel perſeverantiam. Eſt igitur vis viva aliquid abſolutum & ſine correlato. Altera vero, nempe vis mortua, ſeu preſſio, eſt relativum quid, quod ſupponit duo a ſe invicem diverſa, ſcilicet cauſam prementem, undecunque illa veniat, & deinde corpus quod premitur. Ceſſante cauſa premente, ceſſat & ipſa preſſio; perit enim effectus cum cauſa, niſi quatenus corpus cedit prementi, & ſucceſſive in motum concitatur, quo ipſo generatur vis viva in corpore aliquandiu preſſo, quæ ſemel generata fit ſubſtantialis, ac perire vel diminui nequit, quin tantundem, quantum periiſſe viſum eſt, in aliud vel alia corpora tranſierit.

V.

Confundunt Adverſarii ambo genera virium; quia vident ex libera actione vis mortuæ generari in corpore [actionem iſtam in ſe recipiente] vim vivam, dum ex quiete in motum perducitur majorem vel minorem, prout cauſa premens fortius & diutius, vel debilius & brevius in illud agit. Sed perinde faciunt ac ſi vellent confundere lineam cum ſuperficie, ideo quia per motum lineæ deſcribitur ſuperficies. Vis mortua libere agere dicitur, quando corpus, quod ab ea premitur, preſſioni obſequitur, & præter inertiam ſuam prementi nihil opponit.

VI.

Corpus continuo preſſum, & a quiete ad motum accelerando perductum ope elaſtri, donec hoc per ſui dilatationem omnem ſuam vim exhauſerit, atque gradatim in corpus propulſum tranſtulerit, merito dicitur corpus in tali vel tali motu uniformi finaliter acquiſito conſtitutum, quod ab initio quieverat, poſſidere ſolum omnem vim vivam, quam ab elaſtro

[cui nihil amplius remanet virium,] accepit. Dictat hoc clarus conceptus, quem habemus de perfecta æqualitate inter causam efficientem atque effectum plenum & adæquatum. Extrinsecus enim nihil aliud datur, ut supponimus, præter corpus, quod partem aliquam virium elastri in se recipiendo insumat.

V I I.

Hæc ipsa perfecta æqualitas inter causam & effectum porro confirmatur, si attendimus, quid fiat, si, jam mutato effectu in causam, corpus cum acquisita sua velocitate in directionem contrariam vertatur, ita ut in elastrum laxatum recurrat. An non vel solo rationis lumine percipimus, elastrum in pristinum tensionis statum restitutum iri, postquam omnis motus in corpore ab elastri resistentia absumtus fuerit? atque ita alternatim accipere possunt reddereque vicissim.

V I I I.

Quod si elastrum aliquod per sui dilatationem duo plurave corpora in motum dederit, quocunque id fiat modo, sive simul, sive unum post alterum; dicendum est omnino, omnium istorum corporum vires vivas junctim sumtas æquivalere vi toti, quæ in elastro residebat, adeoque & ei vi corporis unici, in quo solo movendo elastrum suam vim totam exhausisset. Hoc verum esse suadet axioma de æqualitate inter totum & partes omnes simul sumtas. Distribuit enim pluribus, quod uni soli dare potuisset.

I X.

Potest motus in quolibet corpore considerari tanquam productus ab actione alicujus elaterii, quod vim suam in movendo corpore consumsit. Quare, si corpora perfecte elastica & in motu constituta sibi mutuo quomodocunque occurrant, corum

eorum velocitates post occursum ita mutabuntur, ut vires vivæ omnium simul sumtæ fiant æquales illis aliis simul sumtis, quas eadem corpora ante occursum habebant, atque in hoc consistit conservatio virium vivarum. Si corpora non sunt perfecte elastica, aliqua pars virium vivarum, quæ periisse videtur, consumitur in compressione corporum, quando perfecte se non restituunt; a quo autem nunc abstrahimus, concipientes, compressionem illam esse similem compressioni elastri, quod post tensionem factam impediretur ab aliquo retinaculo, quo minus se rursus dilatare posset, & sic non redderet, sed in se retineret vim vivam, quam a corpore incurrente accepisset; unde nihil virium periret, etsi periisse videretur.

X.

Qui ex non intellecta vera natura virium vivarum earundem theoriam rejiciunt, hoc unico nituntur fundamento, quod in æstimatione earum virium nulla habeatur ratio temporis ab illis, qui per effectus homogeneos de quantitate virium judicandum esse contendunt. Sed ineptum est, aliter judicare de quantitate alicujus rei per se actu existentis, quam per determinatam mensuram, quæ aliquoties sumta totum exhaurit; neque attinet, quo tempore durante illa mensuratio perficiatur, neque qualis adhibeatur mensura, major an minor; sufficit ex partibus notis simul sumtis colligi posse totum ignotum.

XI.

Finge, ut aptissimo simili utar, agi de investiganda capacitate crateris aqua pleni: diceres sane, & recte quidem, metiendam esse quantitatem aquæ in cratere contentæ per datam quandam mensuram. Quid si autem alius tibi diceret, cognosci prius debere, quanto tempore canalis aquam suppeditans impleverit craterem, aut quantæ sit amplitudinis epistomium, per quod, obturato jam canali, aqua emitti debeat, aut si

aliam ejusmodi circumstantiam, quæ ad rem nihil facit, urgeret, rideres profecto objectionem risu dignissimam. Jam enim non agitur de modo, quo crater fuerit impletus, utrum citius hoc factum per canalem ampliorem, an tardius per angustiorem, neque an prompte emittatur aqua per largiorem effluxum, an lentius per epistomium angustius effluendo. Obstrue modo canalem, & adest præsens aquæ copia in cratere; hanc ergo metire, prompte an tarde, nihil interest; invenies semper eandem aquæ quantitatem. Modus impletionis repræsentat modum generationis vis vivæ in corpore; modus vero depletionis, metiendi gratia institutæ, haud male refert modum qualemcunque transferendi vim vivam ex uno corpore in alia æqualia inter se, & æquali celeritate donanda, tanquam ad mensuras æquales, ex quarum numero judicare possis de quantitate totius.

X I I.

Dubitasne unum eundemque effectum, plenum & adæquatum, variis modis produci posse, sive respexeris ad tempus, sive ad alias circumstantias modales? Idem sane manebit effectus ratione quantitatis, si nimirum ab eadem vel æquali causa fuerit productus, hæcque in producendo se totam exhauserit. Etenim tum demum dici potest, jam esse in effectu quicquid fuerat in causa. Ex partium quarumdam mensura nondum judicari potest de quantitate totius, sed tum demum, quando certum est, omnes haberi partes, & nullam de toto remansisse, quæ non subierit mensuram. De hoc si constat, nihil amplius pro vera exigitur mensura. De modo & tempore mensurationis, non est cur sis sollicitus; hoc quippe in eventu nec auget nec minuit quantum ipsum. De opulentia hominis male judicares ab ejus expensis quotidianis; prodigus quippe largiori manu expendit, quam alius multo opulentior, qui parsimoniæ studet. De eorum ergo opulentia ut recte judices, oportet nosse & in numerato habere utriusque facultatum summas totales.

XIII.

XIII.

Claram ideam habebimus de viribus vivis æſtimandis, ſi commodum aliquod exemplum eligamus. Concipe igitur quatuor elaſtra perfecte æqualia, & æqualiter tenſa; haud utique negabis, ſingula ſeorſim præſtare poſſe quartam partem ejus, quod poſſunt omnia junctim ſumta. Unum quodque enim tantundem contribuit ad totalem effectum, quantum quodlibet ex reliquis, nempe ſuam ſymbolam, quæ eſt quarta pars totius; poſito ſcilicet, unumquodque id unicum agere, ut vim ſuam exhauriat in promovendo aliquo corpore. Hoc corpus proinde ab initio ſine motu exiſtens, nunc motum habens ab elaſtris, habebit vim, quæ viva dicitur, conſiſtens in facultate reddendi elaſtris id quod ab iis accepit, nimirum vim, qua rediguntur ad priſtinum tenſionis gradum. Fateberis ergo mecum, ſingula elaſtra participare pro quarta parte effectus totius, quem omnia junctim produxerunt: quid clarius? Si hoc negas, contra diem loqueris.

XIV.

Videamus autem, quam diverſis modis, quamque diverſo tempore, hic idem effectus produci poſſit. Sint primo quatuor illa elaſtra ordine collocata in una recta linea, unum ante alterum, [Fig. 1. n°. 1.] ita ut extremitas ſiniſtra fulciatur in obice fixo L, dextra vero ad corpus quieſcens A, mox movendum ab actione elaſtrorum. Deinde ſint illa quatuor elaſtra poſita, ut videre eſt n°. 2. ubi nimirum duo tantum in recta linea unum ante alterum, ſed duo hujuſmodi paria juxta ſe invicem, a ſiniſtro extremo in obicem firmum M, a dextro in corpus B æquale ipſi A, nituntur. Denique quatuor noſtra elaſtra n°. 3 diſponantur ſingulatim juxta ſe mutuo, habeantque crura ſiniſtra ſuffulta ab obice immobili N, dextra antea ſimul omnia innixa corpori C æquali ipſi B vel A.

TAB. XLIX. N°. CXLV. *Fig.* 1.

X V.

His ita positis, concipe porro, solvi elastra, ita ut eorum pressiones continuo exerantur, sive mediate, sive immediate, in corpora A, B, C; hæcque proinde moveri incipiant, & accelerando pergant; donec, peracta omnimoda dilatatione elastrorum, corpora accelerari cessent, ac, maxima acquisita velocitate, in motu suo uniformi continuent. Quid nunc censes de quantitate virium vivarum in ista corpora translatarum? erunt utique in singulis tribus casibus æquales; & quidni essent? quandoquidem unumquodque corporum A, B, C, in se recipit effectum quatuor elastrorum, quorum unum nec plus nec minus potest quam alterum, & singula vim suam integram transmiserunt ad movenda sua respective corpora: nihil enim, præter corpora, adest, cui aliquid impertiri possit. Abstrahimus scilicet a materia ipsa elastrorum, quæ quidem etiam movenda est, sed quam tanquam nullam vel admodum parvam supponimus, ita ut nihil in illis præter eorum virtutem elasticam consideremus. Elastra itaque æqualia, & ad æqualem gradum tensa, sumi possunt pro mensura communi virium vivarum in corporibus generatarum, vel adhuc generandarum.

X V I.

Quod nunc attinet ad velocitates corporum in triplici nostro casu exposito, illæ profecto non possunt non esse æquales, ob æqualitatem, tam corporum, quam virium ab æquali numero elastrorum impressarum. Interim tempora, in quibus illæ vires sunt productæ, sunt valde inæqualia; habent enim rationem inter se, ut 4, 2, 1, hoc est, corpus A acquirit suam vim & maximam velocitatem tempore duplo longiori quam corpus B, & hoc duplo longiori quam C. Cujus veritas demonstrari potest per vulgaria principia dynamica, ab ipsis quoque Adversariis recepta.

XVII.

XVII.

Sunt etiam pressiones inæquales, quibus corpora A, B, C, continuo urgentur. Sunt namque, quod manifestum est, in singulis dilatationibus similibus elastrorum reciproce, ut 1, 2, 4. Corpus enim A in casu primo haud aliter premitur, quam n°. 4. corpus D premeretur ab unico elastro, a quo unico reciperet vim vivam, quæ tantum quartam partem constitueret ejus, quam recipit A a quatuor elastris; id quod ex dictis satis superque patet. TAB. XLIX. N°.CXLV. *Fig.* 1.

XVIII.

Igitur, non obstante diversitate cum temporum, tum pressionum, corpora nostra A, B, C, æqualia eandem vim vivam, eandemque proin velocitatem acquirunt; adeo ut vi viva semel transfusa in corpus, verbi gratia, A, amplius non quæri debeat quomodo, vel quanto tempore fuerit generata; an primo, an secundo, an tertio modo:

Unde habeat, quærat nemo; sed oportet habere.

Id duntaxat considerari debet, quot requirantur elastra datæ tensionis ad hunc vel illum motum excitandum in dato corpore; nec refert, quo ordine, qua arte, qua lege, elastra disponantur, modo agant tantum in corpus promovendum, eique unico vires suas largiantur, & nihil aliorsum prodigant. Vis elastri tensi est aliquid reale, quod subsistit, quod permanet, quamdiu vinculo coercetur; modus vero elastra applicandi, & tempus, quod in agendo insumitur, dependent ab arbitrio applicantis, & sunt mere accidentalia, quæ ad rem ipsam non pertinent, & quæ post peractam motus generationem pereunt, nullaque sui vestigia relinquunt. Verumenim vero, quod essentiale est, nempe vis viva in corpore genita, non perit, sed permanet, donec transeat in aliud, vel tota, ut nihil sibi relinquatur, vel in tantum, si nimirum pars solummodo transit; hæc cum reliqua, quæ superest in priori, semper conficiet totum.

X I X.

Hinc in communicatione motus corporum in ſe invicem impingentium, vel etiam in varia modificatione motus partium unius ejuſdemque corporis à vi propria pendente, ubi nihil perire poteſt ſine æquali effectu, pro fundamento & principio univerſali poni debet *conſervatio virium vivarum*, hoc eſt, illius facultatis agendi, quæ ſola eſt interna, realis, & perſeverans in exiſtentia ſua, ac quæ habet determinatam ſuam quantitatem vel menſuram independentem ab omni modificatione externa, ut ſunt tempora & preſſiones: ſicuti vidimus, æqualem vim datam eſſe tribus corporibus A, B, C, ideo tantum, quia æqualis cauſa illam in ſingulis produxit, nempe vis quatuor elaſtrorum, licet id factum ſit tribus diverſis modis, ratione tam temporis quam preſſionis. Quod ſi præterea aliud quæris, næ! idem facis, ac ſi ad æſtimandam aquæ quantitatem in cratere contentam, præter actualem menſuram, attendere velles ad amplitudinem canalis, qui craterem implevit, vel ad tempus quod in implendo fuit inſumptum. Deſine igitur quærere nodum in ſcirpo.

X X.

Reſtat tandem, ut explicemus, quantam habeant vim vivam corpora, quæ diverſâ velocitate moventur. Nam ea, quæ habent velocitates æquales, palam eſt & extra controverſiam gaudere viribus vivis in ratione maſſarum; ſed ſi velocitates ſunt inæquales, erit in quolibet corpore vis viva, ſeu, quæ in illo eſt, facultas agendi, [quamvis actu ipſo non agat,] in ratione compoſita maſſæ & quadrati velocitatis, non ſimplicis velocitatis, ut contendunt Adverſarii, qui non intelligunt, vel qui, neſcio quo contradicendi pruritu, intelligere nolunt diſcrimen inter vires vivas & mortuas.

X X I.

XXI.

Propositionem autem istam de viribus vivis, quæ in corporibus æqualibus se habent in duplicata ratione celeritatum, multis adeo demonstrationibus invictis munivi in Dissertatione mea *De Motu* supra allegata, ut actum agerem, si eas omnes hic repeterem. Lubet tamen unam referre, quæ præ cæteris brevis est & non minus clara, eoque lubentius, quod, quæ in præcedentibus disserui, mirifice conspirant ad ejus dilucidationem & confirmationem. Sint duo corpora inæqualia A & B, [*Fig.* 2] quibus quiescentibus, interposita concipiatur series elastrorum æqualium & æqualiter tensorum. Finge jam relaxari elastra, ut hinc inde corpora ab illis pressa gradatim in motum concitentur, unum dextrorsum, alterum sinistrorsum; donec, omnimoda dilatatione peracta, utrumque eam velocitatem acquisiverit, quæ moli suæ convenit, & qua postea uniformiter moveri perget. Ubi sequentia sunt notanda, 1°. Corpus majus A, & corpus minus B, quolibet momento pressiones patiuntur sibi mutuo æquales. Hinc 2°. incrementa velocitatis corporis A erunt ad incrementa velocitatis corporis B, reciproce ut massa corporis B ad massam corporis A, per receptum ubique principium dynamicum. 3°. Erunt ergo in eadem quoque ratione velocitates totales, seu ultimæ post peractam dilatationem acquisitæ, hoc est, dicendo velocitatem corporis $A = a$, & velocitatem corporis $B = b$, erit $A : B = b : a$. Quare 4°. erit $aA = bB$, quod monstrat, quantitatem motus utrobique esse æqualem, in qua æqualitate falso putarunt antagonistæ, ut mox patebit, consistere æqualitatem virium vivarum. Tempus 5°. quo utrumque corpus ad ultimam suam celeritatem pervenit, est utrobique æquale, quod sane nulla probatione indiget; pressio enim in utroque corpore simul incipit, & simul desinit. Denique 6°. quod summam meretur attentionem, ex eo quod tam accelerationes corporum, quam eorum celeritates ultimæ, sunt massis reciproce proportionales, clarissime sequitur, commune centrum

TAB. XLIX. N°. CXLV. *Fig.* 2.

gravitatis C constanter quiescere; interea dum corpora a se invicem recedunt; ac proin, totam seriem elastrorum ita divididi in puncto C, ut pars una eorum inter C & A, sit ad alteram inter C & B, ut massa B ad massam A, seu ut velocitas a ad velocitatem b.

XXII.

Hoc igitur centrum C erit instar obicis immobilis, cui hinc inde elastra innituntur, atque se se in utramque partem expandendo, transfundunt vires suas in corpora A & B. Ea proin vis viva, quam accipit corpus A ab elastris inter C & A contentis, erit ad alteram, quam sortitur B ab elastris inter C & B, pariter ut a ad b. Dicantur itaque f & ϕ vires illæ duæ; illæ, inquam, facultates reales, quas nunc corpora possident, & in quibus unice generandis elastra utrinque suas vires penitus impenderunt; dicatur nempe vis viva corporis $A = f$, & altera corporis $B = \phi$; habebimus $f : \phi = a : b$, modo autem demonstratum est $aA = bB$; adeoque multiplicando analogiæ terminos a & b per hos alteros æquales aA & bB; erit sane $f : \phi = a \times aA : b \times bB = aaA : bbB$; hoc est, in composita ratione massarum, & duplicata velocitatum. Quod erat demonstrandum.

XXIII.

Non capio, quid pertinacissimus adversarius, si vel scepticus esset, huic evidentissimæ demonstrationi opponere queat; negaveritne, ex numero elastrorum, vires suas in corpore movendo prorsus exhaurientium, determinandam esse vim totalem in eodem productam? annon, quantum potest unum ex elastris, tantundem potest alterum quodlibet? Video clarissime, si, exempli gratia, corpus A fuerit duplo majus corpore B, fore vice versa duplo plura elastra corpus B pellentia, quam sunt quæ pellunt corpus A: accepit igitur corpus B, licet duplo minus, tamen duplo majorem vim quam corpus A. Quod nunc Adversariii tantopere urgent, habendam esse rationem

nem temporis, quo durante motus fuerit productus, eo facilius admittere debent, quod motus in utroque corpore, adeoque etiam eorum vires, eodem tempore, non diversis temporibus, generatæ sunt. Vis viva igitur in corpore, cujus massa ut 1 & celeritas ut 2, cum sit dupla alterius vis in corpore, cujus massa ut 2 & celeritas ut 1; si posterioris massæ sumamus dimidium, habemus massam prioris ut 1 cum celeritate ut 2, vim vivam habentis quadruplo majorem, quam habet corpus æquale cum celeritate ut 1.

XXIV.

Postquam ita directe demonstratum est, corporum in motu constitutorum vires vivas, seu facultates agendi, esse in ratione duplicata velocitatum, si corpora sint æqualia, & in composita ex ratione illa duplicata velocitatum & simplici massarum, si corpora sunt inæqualia; jam nulla superest difficultas circa veritatem Principii *Leibnitiani*, de corporum viribus æstimandis per altitudines, ad quas adscendendo suas velocitates amittunt, vel, per quas descendendo ex quiete easdem acquirunt. Etenim, cum constet, ex *Galilæanis*, altitudines illas esse in duplicata ratione celeritatum, quam convenire probavimus rationi virium; quidni ergo adscensus vel descensus gravium rectissime pro virium mensura sumerentur?

XXV.

Hinc intelligis, quamlibet corporis gravis particulam elementarem, cum descendit vel ascendit per datam altitudinem, tantam acquirere vel amittere vim vivam ab actione gravitatis, quantam acquireret vel amitteret ab actione seriei elastrorum, datæ altitudini æqualis; posito, scilicet, elastra vi eadem premere qua urget gravitas; sive id fiat deorsum trudendo particulam elementarem, per modum accelerationis gravium descendentium, dum elastra se dilatant, sive eidem particulæ elementari resistendo, per modum retardationis gravium

adſcendentium, dum claſtra ab occurſu particulæ comprimuntur.* Quare corpus grave cujuſcunque figuræ, vel integrum Syſtema plurium corporum, ſi a ſolo gravitatis effectu quomodocunque deſcenderit, eam vim vivam in omnibus partibus collectim ſumtam acquiſiviſſe cenſendum eſt, cujus menſura habetur capiendo aggregatum productorum partium ſingularum per ſuas cujuſque deſcenſus altitudines. Ex Staticis autem patet, aggregatum illud eſſe æquale unico producto totius Syſtematis maſſæ per altitudinem deſcenſus communis centri gravitatis. Hinc colligitur, ex conſervatione virium vivarum, commune centrum gravitatis, ſi acquiſita ſua velocitate ſurſum dirigatur, ad priſtinam altitudinem, unde deſcenderat, eſſe adſcenſurum; idque ſive integrum ſyſtema indiſſolutum aſcendat, ſive, ſolutis vinculis quibus partes inter ſe cohærebant, ſingulæ ſeorſim ſuis acquiſitis velocitatibus adſcendant: utroque quippe modo conſervari debet eadem quantitas virium, utpote effectus unius ejuſdemque cauſæ, nempe dilatationis & ſubſequentis compreſſionis determinati numeri claſtrorum. Rem fuſius expoſui in Opuſculo *De motu*.

XXVI.

HUGENIUS uſum hujus Theoriæ eleganter primus applicuit ad inveſtigandum centrum oſcillationis in pendulis compoſitis. Neſcius tamen eo tempore naturæ & conſervationis virium vivarum, principium illud ſuum, de æquali deſcenſu & adſcenſu communis centri gravitatis, haud aliter quam pro Axiomate aſſumſit, veram ejus rationem nondum perſpiciens. Quare a multis tanquam poſtulatum nimis temerarium fuit impugnatum, donec rei veritas, primo per experientiam confirmata, dein etiam ex intervallo per principia ordinaria ab omnibus admiſſa directe demonſtraretur, qualem demonſtrationem ego dedi univerſaliſſimam in *Actis Lipſ.* A. 1714 *, omni ſane exceptione majorem. Nunc vero ipſius quoque Axiomatis *Hugeniani* ſoliditatem ex theoria virium vivarum demonſtrative

* N°. XCVI. pag. 168. *Tom.* II.

ve probatam & corroboratam arbitror, ut in posterum inter propositiones dynamicas æque recipi mereatur, quam quæ sunt certissimæ.

XXVII.

Fortassis invita rationum allatarum evidentia, ne nunc quidem obtineri potest, ut, qui Theoriam virium vivarum huc usque pertinaciter repudiarunt, posthac se illi favorabiliores præbeant. Certe in nostra potestate non est, aliquem eo adigere, ut fateatur diescere, quando videt Solem horizontem ascendere, tametsi se sentiat agnoscere veritatem rite demonstratam; sed possunt etiam internam suam convictionem & agnitionem dissimulare, mutare; præsertim si sibi probro ducant eam tamdiu ignorasse, aut quod primæ inventionis gloria non sibi, suisve, sed exteræ nationi debeatur. Quis scit, si magnus NEWTONUS hanc Theoriam eruisset, an non universa Magna Britannia, ut probabile est, ei jamdudum applausisset?

XXVIII.

Si NEWTONUS perspectam habuisset veram virium vivarum naturam; sane non statuisset duo diversa principia, unum ad movenda corpora, alterum ad motum eorum conservandum. Unum idemque enim principium, quo motus communicatur, facit etiam ut conservetur, non in quantitate motus, sed in quantitate virium vivarum, quo ipso luculenter patet, motum in rerum natura nunquam perire posse, ut NEWTONUS, vano terriculamento perterritus, metuisse videtur. Vide ejus *Optices* Edit. secundam Lat. A. 1719, *Londini* impressam, pag. 404, ubi sequentem in modum [ridiculum dicerem, si a tanto Viro non scripta essent,] ratiocinatur. „ Alio „ aliquo, *inquit*, principio [præter vim inertiæ] omnino opus „ erat ad movenda corpora; & jam, cum moventur, alio „ itidem principio opus est, ad motum ipsorum conservandum. „ Nam ex variis binorum motuum compositionibus, manifestum „ est, non semper eandem esse in mundo quantitatem motus.

„ Etenim, si duo globi, virgula tenui conjuncti, motu uni-
„ formi circa commune suum gravitatis centrum revolvantur,
„ interea dum centrum illud motu uniformi feratur in linea recta,
„ ducta in plano motus ipsorum circularis, utique summa motuum
„ binorum illorum globorum, quoties illi erunt in linea recta a
„ communi suo gravitatis centro descripta, major erit, quam
„ summa motuum ipsorum, tum cum erunt illi in linea, quæ sit
„ ad lineam illam rectam perpendicularis. Quo quidem exem-
„ plo apparet, motum nasci posse & perire &c.

XXIX.

Dudum quidem observatum est a multis, præsertim ab HUGENIO, [vid. *Opusc. posthuma De vi percussionis* in fine,] motus quantitatem, etiam in corporibus perfecte elasticis, in immensum posse augeri & minui: sed nemini in mentem venit, præterquam NEWTONO, inde consequentiam esse formandam, quod ideo motus omnino perire vel annihilari possit. At hoc potius NEWTONUS, ex eo quod motus quantitas, licet nulla nova causa supperaccedat, sit tamen ex se ipsa variabilis & mutabilis, concludere debuisset in quantitate motus non consistere quantitatem virium, utpote quæ est constantissima, nullique mutationi obnoxia; quod non tantum in exemplis *Hugenianis*, ubi tam ingens est quantitatis motus mutatio, eleganter demonstrari potest per calculum, sed & in ipsissimo exemplo *Newtoniano*, duorum globorum virgula tenui conjunctorum & combinato motu uniformi rotatorio ac progressivo latorum, luculentissime & sine magna difficultate probare possumus, globis illis duobus eandem semper inesse summam virium vivarum, quocunque in situ versentur; hoc est, si globus uterque, non per velocitatem, sed per quadratum suæ velocitatis actualis, multiplicetur, fore productorum summam constanter eandem atque invariabilem. Quo ipso conservatio virium vivarum mirifice adstruitur; tantum abest metum subesse, ne aliquando motus omnis in rerum natura pereat, indeque totum universum in chaos durissimum & immobile

bile relabatur. Dormiamus ergo secure, res est in salvo. Quod autem ex concursu corporum mollium, vel imperfecte elasticorum ubi secundum sensus nostros aliquid de viribus videtur perire, allegari posset contra virium conservationem, ad hoc jam supra respondimus, nec hujus loci est ei diutius inhærere.

XXX.

Ne vero disputando militare pergamus, lubet nunc urgere consensum, quem generalissime deprehendimus in solutionibus Problematum ad hanc materiam pertinentibus, quotiescunque ea duplici modo solvere instituimus, nempe via indirecta [sed plerumque commodiori, ac magis compendiosa] per Theoriam virium vivarum; altera directa & petita ex notissimis atque a nemine non concessis principiis staticis. Audebitne aliquis duram satis habere frontem, ut, visa harmonia constantissima in omnibus exemplis per utramque viam solutis, etiamnum tamen dubitet de probitate prioris methodi, aut, quod magis foret absonum, ne dicam impudens, ut dicat consensum istum casui fortuito deberi, etiamsi talis casus sit moraliter impossibilis: siquidem ex centenis & pluribus exemplis, quæ hactenus tractavimus, ne unicum quidem occurrit, cujus non perfectissimum consensum exitus probaverit?

XXXI.

Præter exemplum Centri oscillationis in pendulis compositis felicissime determinati per utramque methodum, indirectam & directam, quædam alia Problemata huic fini inservientia proposueram in *Comment. Petropol.* Tom. II. pag. 200 *, suppressis tunc quidem solutionibus, visurus, num qui forent ex Eruditis, qui vadum tentare vellent. Inter memorata Problemata occurrit quæstio de chordarum vibrationibus definiendis per oscillationes pendulorum datorum. Hujus Problematis singulos casus [nam varii erant propositi] postea solutos dedi in eorundem Comment. Tom. III. pag. 13 & seq. † & quidem

* Supra, N°. CXXXVII. pag. 124. † N°. CXL. pag. 198.

dem ita ut præcederent ſolutiones erutæ ex doctrina conſervationis virium vivarum, haſque ſtatim exciperent alteræ ex vulgaribus principiis ſtaticis petitæ, quæ cum prioribus ſingulis ad amuſſim conſpirare deprehenduntur. Quod idem non ſine jucunda animi voluptate [ſaltem pro virium vivarum fautoribus,] obſervare eſt in ſubjuncta ſolutione Problematis de chordæ muſicæ vibrationibus determinandis per utramque methodum exhibita, quæ non abludit à *Tayloriana*, per viam longe diverſam inventa. Vide *Method. Increm.* pag. 93. Quo conſenſu TAYLORUS forſan, ſi viveret, & tantillum ingenuitatis haberet, permoveretur ad amplectendam virium vivarum Theoriam.

XXXII.

Conſtitui hoc loco ulterius monſtrare mutuum iſtum conſenſum inter utramque methodum per enodationem alterius alicujus Problematis Dynamico-Mechanici, quod ibidem cum reliquis propoſueram; ſed cujus ſolutionem legitimam nemo hucuſque in lucem emiſit. Senſus Problematis talis erat.

TAB. XLIX. N°. CXLV. *Fig.* 3. *Sit curva data* CGB, *per quam deſcendat pondus* B, *poſt ſe trahens ſurſum aliud minus pondus* A, *per aliam curvam datam* FAC *adſcenſurum ope funiculi* ACB, *trochleam* C *ambientis*, *& binis ponderibus alligati. Quæruntur velocitates ponderum in quibuslibet locis* B & A?

I. SOLUTIO INDIRECTA,

Deducta ex Theoria virium vivarum.

Intelligatur tranſire per trochleam C recta horizontalis MCE, habeatque funiculus ſitum quemcunque ACB, eique proximum aCb. Ex punctis B & A ducantur verticales BE, AD; atque centro C & radiis Cb, CA, deſcripti ſint arculi bn, Am. Denique per puncta b, A ducta intelligantur elementa horizontalia bo, Al, occurſura elementis verticalibus Bo, al. Dicantur $CB = x$, $Bn = am = dx$, $Bo = dy$, $bB = ds$; ſitque

que z = rectæ verticali TV, ex cujus altitudine pondus aliquod libere cadens acquirat velocitatem æqualem illi, quam pondus B acquirit in curvæ puncto B. Quæritur itaque altitudo z?

Hoc fine dicatur porro $Aa = dr$, & $la = dq$. Atque cum velocitas in B sit proportionalis radici quadratæ altitudinis TV, ponatur hæc velocitas $\sqrt{z}$; erit [ob bB ad aA, ut velocitas in B ad velocitatem in A] ipsa hæc velocitas in A $= dr\sqrt{z} : ds$. Nunc, quia, ex conservatione & natura virium vivarum in ponderibus descendentibus & ascendentibus, summa productorum ex ponderibus per descensus, demta summa productorum ex ponderibus per adscensus, debet æquari summæ acquisitæ virium vivarum in universis ponderibus, hoc est, summæ productorum, quæ fiunt multiplicando singula pondera per quadratum suarum respective velocitatum; vel, ut ad sensum *Hugenianum* loquar, quod eodem recidit, quia commune centrum gravitatis duorum ponderum per funiculum colligatorum tantum descendit, quantum postea [si utrumque pondus sua acquisita velocitate separatim sursum dirigatur] adscendere potest; habebimus hic [supponendo G esse initium descensus ponderis B, & F initium adscensus ponderis A, ducendoque verticalem FM, cui occurrat horizontalis AR, sicuti ipsi BE occurrit ducenda horizontalis GS, ita ut SB sit $= y$ & FR $= q$] habebimus, inquam, $SB \times B - FR \times A = z \times B + \frac{dr^2}{ds^2} z \times A$; unde $z = (B \times SB - A \times FR) ds^2 : (Bds^2 + Adr^2)$, vel scribendo y pro SB, & q pro FR, erit $z = (By - Aq) ds^2 : (Bds^2 + Adr^2)$. *Q.E.I.*

II. SOLUTIO ALTERA DIRECTA

Ex principiis pure Mechanicis.

Ut ponderum in se mutuo agentium & resistentium vires commode determinentur, in auxilium voco vim tensionis funiculi ACB, quam voco T, quæ renititur conatui quo pondus B super bB descendit, dum eidem T renititur pondus A, quod ab ea super aA adscendere cogitur. Sit nunc g vis gravitatis, seu acceleratrix naturalis, qua nimirum corpora gravia ad descensum

verticalem animantur. Adeoque, si jam B & A designent massas corporum, erunt eorum pondera absoluta exprimenda per gB & gA, quorum vires seu conatus descendendi si deriventur ad directiones obliquas bB & aA, habebitur vis super bB a gravitate oriunda $= gBdy : ds$, & ea super aA $= gAdq : dr$. Similiter vis tensionis T [quæ in utrumque pondus oblique agit,] derivanda est ad directiones obliquas bB & aA, prodibitque vis super bB a tensione oriunda $= Tdx : ds$, priori $gBdy : ds$ a gravitate derivatæ contraria; & altera super aA, quæ est $= Tdx : dr$, [sunt enim incrementa & decrementa nB & ma partium funiculi CB, CA, æqualia,] alteri illi vi a gravitate oriundæ $gAdq : dr$ pariter contraria. Proinde $gBdy : ds - Tdx : ds$ dabit vim motricem, qua corpus B super bB deorsum urgetur, & $Tdx : ds - gAdq : dr$ vim motricem, qua corpus A super aA sursum trahitur. Ibi enim supponitur vis obliqua a gravitate derivata prævalere alteri a tensione derivatæ, hic vero obtinet contrarium.

Unde, si utrobique vires istæ motrices dividantur per suas respective massas corporum B & A, emerget $gdy : ds - Tdx : Bds$ pro vi acceleratrice corporis B, nec non $Tdx : Adr - gdq : dr$, pro vi acceleratrice corporis A.

Jam autem, posito receptissimo principio dynamico, $PdS = VdV$ [ubi P denotat vim acceleratricem, dS elementum spatii percurrendi, & V velocitatem,] de cujus veritate nemo dubitat, habebimus [nominando u velocitatem in B, & v velocitatem in A,] has duas æquationes $(gdy : ds - Tdx : Bds)\, ds$, seu $gdy - Tdx : B = udu$, & $(Tdx : Adr - gdq : dr)\, dr$, seu $Tdx : A - gdq = vdv$. Utrobique integrando, erit $gy - \frac{1}{B}\int Tdx = \frac{1}{2}uu$, & $\frac{1}{A}\int Tdx - gq = \frac{1}{2}vv$. Ex priori elicitur $\int Tdx = gBy - \frac{1}{2}Buu$, atque ex altera $\int Tdx = gAq + \frac{1}{2}Avv$, adeoque $gBy - \frac{1}{2}Buu = gAq + \frac{1}{2}Avv$.

Sed per hypothesin, z designat altitudinem, ex qua grave libere delapsum acquirit velocitatem u; erit ergo, per principium dynamicum, ab omnibus concessum, $gdz = udu$, indeque $gz = \frac{1}{2}uu$; &, quia præterea $uu : vv = ds^2 : dr^2$, habe-

habetur $\frac{1}{2} vv = \frac{dr^2}{2ds^2} uu = \frac{pdr^2}{ds^2} z$. Substitutis his valoribus pro $\frac{1}{2} uu$ & $\frac{1}{2} vv$, ac diviso per g, dabit inventa æquatio $gBy - \frac{1}{2} Buu = gAq + Avv$, hanc alteram $By - Bz = Aq + \frac{dr^2}{ds^2} Az$, quæ rite reducta dat quæsitam $z = (By - Aq) ds^2 : (Bds^2 + Adr^2)$; omnino uti per priorem solutionem ex viribus vivis elicuimus. *Q. E. I.*

Coroll. I. Per hanc methodum directam determinantur eadem opera [quod per indirectam fieri nequit,] vis tensionis T, quam patitur funiculus, dum eo mediante pondera in se invicem agunt. Quoniam enim $\int T dx = gBy - \frac{1}{2} Buu = gBy - gBz$ erit differentiando, & per dx dividendo, $T = gB(dy - dz) : dx = gBd(y - z) : dx =$ [substituto pro z ejus valore] $\frac{gB}{dx} \times d(y - \frac{Byds^2 - Aqds^2}{Bds^2 + Adr^2}) = \frac{gB}{dx} \times d(\frac{Aqds^2 + Aydr^2}{Bds^2 + Adr^2})$ $=$ [omittendo g, vel sumendo pondus B pro ipso gB, hoc est, pro massa B multiplicata per vim gravitatis g, atque evolvendo A] $\frac{A.B}{dx} \times d(\frac{qds^2 + ydr^2}{Bds^2 + Adr^2})$. Et sic habentur z & T in quantitatibus finitis. Nam, ob datas curvas CGB & CAF, datamque longitudinem funiculi totius ACB, dabitur utique relatio inter dx, ds, & dr, ac proin quoque relatio inter ds^2 & dr^2; unde ambo valores ipsorum z & T resultabunt in terminis finitis.

Coroll. II. In casu speciali, cujus solutionem in *Comment. Petropolit.* sine demonstratione expresseram, ubi recta verticalis pro linea CAF ponitur, propterea dr, dq, dx, seu elementa Aa, la, am, Bn, ut & FR, seu $q = x$, fiunt æqualia, sumto initio descensus G in ipso C; nulla alia mutatio prodibit in generali valore ipsius z, quam ut pro dr^2 scribi possit dx^2, ac pro q etiam x; quo facto erit $z = (By - Ax) ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$ & ipsa $T = \frac{A.B}{dx} \times d(\frac{xds^2 + ydx^2}{Bds^2 + Adx^2})$.

Scholium.

Noster quondam Hermannus viderat hunc a me inventum valorem ipsius z, pro hoc speciali casu, æqualem $(By - Ax)$

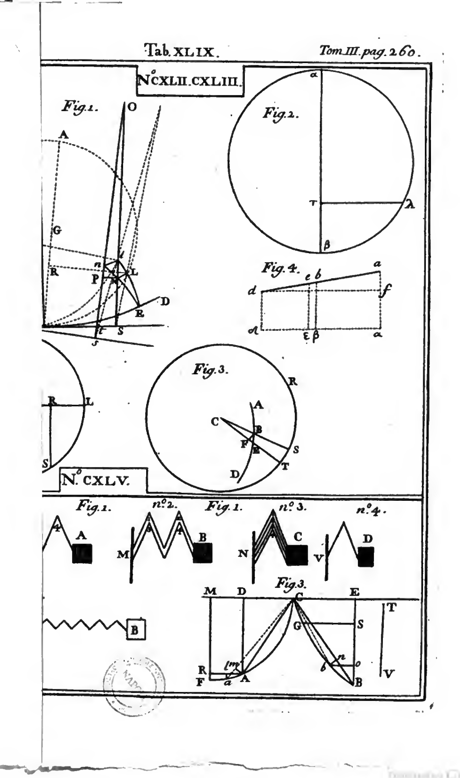
Kk 2 ds^2:

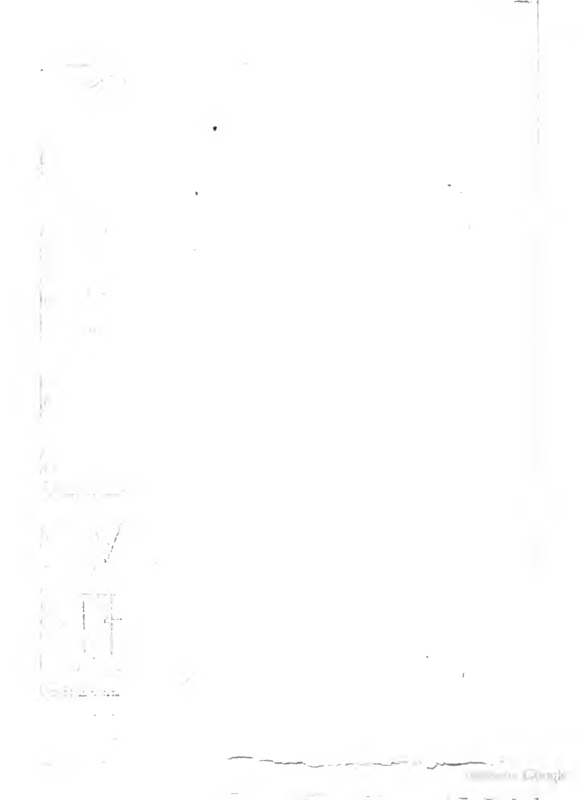
$ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$ in Epistola mea coram Academia *Petropolitana* prælecta *. Ille igitur, volens generalem exhibere solutionem pro linea non tantum recta, sed pro qualibet data curva CAF, occasionem arripuit hanc materiam tractandi in fine suæ *Theoriæ generalis motuum*, Comment. Tom. II, ad Mensem Junii A. 1727 insertæ; quod autem additamentum non nisi diu post Octobr. ejus anni Theoriæ suæ accedere potuit, siquidem hoc demum tempore Theoremata ista a me *Petropolin* dimissa fuere. Quod ideo monendum duxi, ne Lectori mirum videatur, unde venerit, ut proponantur Theoremata & Problemata tanquam aliquid novi, quorum tamen [saltem nonnullorum] solutiones tempore priores [etsi revera posteriores] fuerint inventæ.

Sed aliud majoris momenti non est dissimulandum, quod Lectori scrupulum injicere posset, quando observabit, præsentis Problematis solutionem *Hermannianam*, loco citato pag. 170 † traditam, in terminis generalibus discrepare ab ea, quam in hoc Schediasmate duplici modo inventam exhibui. Ut discrepanti exponatur distinctius, invenit Cel. HERMANNUS, TV vel $z = (By - \int(Adp^2 dq : dr^2))\, ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$, ubi notandum esse $dp = dx$. A me vero aliud diversum & simplicius inventum habetur, nempe $z = (By - Aq)ds^2 : (Bds^2 + Adx^2)$. Conveniunt hi duo valores in solo casu, ubi linea CAF est recta, quod forsan fraudi fuit HERMANNO, ut, consensum animadvertens in hoc casu speciali, tanto minus dubitaret de bonitate solutionis suæ generalis; at differunt sane in omnibus cæteris casibus. Qui ambas meas methodos, indirectam & directam, tam egregie conspirantes, probe examinaverit, non poterit ambigere de solutionis meæ veritate; necesse est igitur errorem inesse in *Hermanniana*. Observari reapse Virum bonum, hic & alibi Dynamica versantem, sæpe hallucinatum fuisse; quod non ideo dico, ut ipsius meritis aliquid detraham, sed ut discant alii hanc materiam, densa adhuc caligine obseptam, cautius tractare, cum viderint magnos quoque Viros in ea frequenter cespitasse. Habet certe HERMANNUS hac in re sibi comparem in NEWTONO, qui & ipse aliquando suos manes passus est, ceu supra ostendi & alibi sæpius.

ESSAI

* N°. CXXXVII. † N°. præced. pag. 237, 238.


N° CXLII. CXLIII.
Fig. 1.
O
A
G
R
n
P
l
N
L
E
D
t
S
s
Fig. 2.
α
τ
λ
β
Fig. 4.
a
e
b
d
f
δ
ε
β
α
Fig. 3.
R
A
C
B
F
E
S
T
D
L
N° CXLV.
Fig. 1.
A
n° 2.
B
M
Fig. 1.
n° 3.
C
N
n° 4.
D
V
B
Fig. 3.
M
D
C
E
T
G
S
n
o
b
R
F
a
A
B
V



N°. CXLVI.

ESSAI

D'UNE

NOUVELLE PHYSIQUE CELESTE,

Servant à expliquer les principaux Phenomènes du Ciel, & en particulier la cause physique de l'inclinaison des Orbites des Planetes par raport au plan de l'Equateur du Soleil.

PIECE

DE

M. JEAN BERNOULLI,
DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, & de celles de Londres, Petersbourg, &c. Et Professeur de Mathematique en l'Université de Bâle.

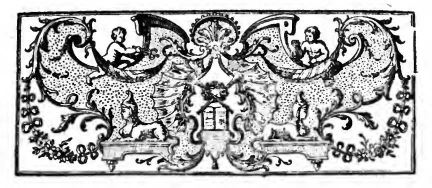
Qui a partagé le Prix double de l'année 1734.

Imprimée

A PARIS

1735.

Kk 3



ESSAI
D'UNE
NOUVELLE PHYSIQUE
CELESTE,

Servant à expliquer les principaux Phenomènes du Ciel, & en particulier la cause physique de l'inclinaison des Orbites des Planetes par raport au plan de l'Equateur du Soleil.

Felices animæ, quibus hæc cognoscere primum,
Inque domos superas scandere, cura fuit.
Ovid. Fastor. lib. 1.

DISCOURS PRELIMINAIRE.

I.

L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, selon son noble dessein de faire fleurir les Sciences & les beaux Arts, invite les Savants de toutes les nations sans distinction, à

à travailler sur les sujets qu'elle leur propose tous les ans, avec un prix destiné à celuy qui aura le mieux réussi. Le sujet pour l'année 1732 n'ayant point été traité à la satisfaction de l'illustre Academie, elle l'a remis sur le tapis une seconde fois pour l'année 1734, & pour encourager davantage les curieux, elle a trouvé bon d'en doubler le prix.

La question est conçûë en ces termes : *Quelle est la cause physique de l'inclinaison des Plans des Orbites des Planetes par raport au plan de l'Equateur de la revolution du Soleil autour de son axe, & d'où vient que les Inclinaisons de ces Orbites sont differentes entr'elles.* C'est, sans doute, une matiere très-importante, & très-digne d'être aprofondie avec une sérieuse aplication.

I I.

Il n'y a eu jusqu'ici que deux systèmes de Physique, qui ayent fait grand bruit, & partagé les opinions des Physiciens: l'un est le fameux système des *Tourbillons*, introduit par M. DESCARTES; l'autre est celui de M. NEWTON, qui se sert du *Vuide* & des *Attractions*, fondé d'ailleurs sur deux loix que la Nature suit dans le mouvement des Planètes, & de leurs Satellites.

L'un & l'autre de ces deux systèmes est très-bien imaginé, & chacun a ses beautez; mais aussi faut-il convenir qu'il y a de part & d'autre de grands défauts, & des difficultés que personne n'a encore entierement levées: de sorte que je ne m'étonne point que les pieces données pour le dénouëment de nôtre question, n'ayent pas eû le bonheur de contenter le goût exquis de Mrs. les Juges: c'est aparemment que les Auteurs des pieces ont donné avec trop de déference dans l'un ou l'autre de ces deux systèmes, sans assés de discernement du bon d'avec le mauvais. Car encore un coup, il faut demeurer d'accord que chacun a son mauvais côté, par lequel il faudroit l'envisager aussi, avant que de s'y livrer entierement.

I I I.

M. de MAUPERTUIS, dans l'excellent Discours sur les differen-

differentes figures des Astres, qu'il donna au public vers la fin de l'année derniere, expose très-distinctement toutes les difficultés ausquelles les deux systèmes sont sujets, quoiqu'en qualité de Géométre, il admette celui de M. NEWTON, à cause de l'exactitude avec laquelle la plûpart des Phénomènes celestes s'expliquent dans ce système, & non point à cause de l'évidence des principes qu'on y adopte. Il a raison de dire, que tout effet reglé, nonobstant que sa cause soit inconnuë, peut être l'objet des Mathématiciens; témoin GALLILE'E, qui, sans connoitre la cause de la pesanteur des corps vers la terre, n'a pas laissé de nous donner sur cette pesanteur, une Théorie très-belle & très-sûre, & d'expliquer les phénomènes qui en dépendent; témoin aussi lui-même, qui dans le chapitre penultiéme nous donne en habile Mathématicien la solution de deux problêmes difficiles, sur les figures que doivent prendre les fluides qui tournent autour d'un axe, & sur la nature d'un torrent de matiere fluide circulant autour d'un axe hors du torrent: où il supose la pesanteur du fluide comme une attraction, sans avoir besoin d'en indiquer la cause, ni de dire en quoi elle consiste. Il remarque fort bien que M. NEWTON avoit assés de candeur, pour ne regarder jamais l'attraction comme une explication de la pesanteur des corps les uns vers les autres, & pour advertir qu'il n'employoit ce terme que pour désigner un fait, & non point une cause.

Il n'en est pas autrement du Vuide parfait que M. NEWTON supose; il lui est permis de le suposer, tant qu'il ne s'en sert que comme d'un milieu ou d'un fluide sans résistance, se mettant peu en peine si un tel milieu ou un tel vuide peut exister, ou non. Un Géométre, entant que tel, n'est pas obligé d'expliquer l'origine des faits: il peut les suposer, pourvû que, pour en découvrir les proprietés, il raisonne juste sur les hypothéses établies. Il seroit à souhaiter que les partisans de M. NEWTON eussent suivi l'exemple de leur maitre, & qu'au lieu de prétendre que le vuide & l'attraction sont des

réalités dans la nature des choses, & que ce sont des principes d'existence, ils les eussent seulement envisagés comme des manieres de concevoir.

I V.

C'est donc au Physicien, qui veut chercher les causes des faits, à établir des principes d'existence, & ces principes doivent être clairs & intelligibles, si bien que leur possibilité se manifeste d'elle-même. Je ne pense pas que le principe d'attraction ait autant d'évidence que celui d'impulsion : je vois, par exemple, avec une évidence entiere, qu'un corps en mouvement, qui en rencontre un autre en repos, doit le mouvoir aussi, non-seulement parce que les corps sont impénétrables, mais parce que le choc est une action, & que toute action doit avoir son effet, qui produit un changement dans l'état de celui qui le reçoit : mais il n'y a point d'autre changement d'état dans le corps choqué, que celui de quitter l'état de repos où il étoit, pour se mouvoir ; car c'est une loi generale reçûë dans la Statique & la Méchanique, que les corps pressés plus d'un côté que de l'autre doivent céder vers où ils sont le moins pressés. Or le choc se fait par pression ; c'est donc une action dont il résulte un effet. Qui veut concevoir une action sans effet, il veut concevoir une chimére.

Tout au contraire, un corps sans mouvement ne peut pas agir, puisque l'action d'un corps dépend uniquement de son mouvement ; ainsi je ne vois pas comment deux corps éloignés & en repos peuvent s'attirer mutuellement, c'est-à-dire, se mettre en mouvement d'eux-mêmes ; ce seroit un effet sans cause, & une action sans principe d'agir. Vouloir recourir à la volonté immédiate de Dieu, & dire que Dieu les pousse l'un vers l'autre avec une certaine force, lorsqu'ils sont à une certaine distance de l'un à l'autre, ce seroit bannir les causes secondes de la Nature ; il vaudroit autant dire que tous les phénomènes, & tout ce qui arrive dans l'univers, s'exécute immé-

immédiatement par la cauſe premiere, je veux dire, par la volonté divine, & que les cauſes ſecondes n'y contribuent que comme des occaſions qui déterminent l'Etre ſouverain à agir d'une telle ou telle maniere ſelon les diverſes contingences : mais ce ſeroit introduire de nouveau le ſyſtème des cauſes occaſionnelles, qui n'a guères contenté les Philoſophes de bon goût.

V.

Les inconvenients qui réſultent de ces deux principes incompréhenſibles pour un Phyſicien, je parle du Vuide & de l'Attraction, ne ſont pas les ſeuls qui empêchent d'admettre dans la Phyſique le Syſtème de M. NEWTON : il y en a d'autres, par raport à quelques phénomènes, qui reſtent inexplicables, quand même on accorderoit ces principes; ce ſont, par exemple, la rotation des Planètes autour de leur axe; comme auſſi la direction commune de leur revolution autour du Soleil, ſe faiſant chacune ſous le Zodiaque d'Occident en Orient, ainſi que ſe fait auſſi la revolution du Soleil ſur ſon axe; item, les mouvements irréguliers des Cométes, dont preſque chacune a ſa direction particuliere, & ſouvent contraire l'une à l'autre. Il ſemble que le Vuide parfait, tel que M. NEWTON le ſupoſe, devroit permettre aux Planètes, auſſi-bien qu'aux Cométes, de ſe choiſir chacune une route particuliere, & indépendante de la régularité de direction. M. NEWTON a ſi bien ſenti cette difficulté, qu'il avouë que ce phénomène eſt quelque choſe de ſurnaturel.

V I.

Le ſyſtème des Tourbillons imaginé à la maniere de M. DESCARTES ne laiſſe pas d'être expoſé auſſi à de grandes objections : on ſait que la gravitation des Planetes vers le Soleil, attribuée à l'effet de la force centrifuge de la matiere du Tourbillon, ne devroit pas ſe faire directement au centre

du Soleil, mais perpendiculairement vers l'axe du Tourbillon; de même que les corps graves sur la Terre devroient avoir une tendance perpendiculaire à l'axe, & ne point tendre au centre de la Terre. Il semble aussi que les Planètes principales, si elles étoient simplement entrainées par le courant de la matiere du Tourbillon solaire, devroient avoir la même vitesse & la même densité, qu'ont les couches du Tourbillon dans la région ou elles nagent; tout comme un vaisseau, abandonné au courant d'un fleuve, acquiert enfin une vitesse commune avec l'eau qui l'emporte; de sorte que la force centrifuge des Planètes deviendroit précisément égale à celle qu'auroit un égal volume de matiere du Tourbillon aux endroits où nagent les Planètes: donc à cause du parfait équilibre entre ces deux forces centrifuges, les Planètes, n'ayant point de gravitation plus ou moins grande dans un temps que dans un autre, ne varieroient jamais de distance au Soleil. Il est vrai qu'on a proposé différens moyens, pour faire voir comment les Planètes peuvent s'aprocher & s'éloigner du Soleil, pendant que le Tourbillon les entraine: mais tous ces moyens, quelque vraisemblables qu'ils soient d'ailleurs, ne m'ont jamais paru assés naturels.

Il y a encore dans le Tourbillon à la Cartésienne une difficulté, qui consiste en ce que les vitesses de ses couches sont beaucoup trop grandes, par raport à celle de l'Equateur du Soleil, pour que la circulation de cet astre & celle de son Tourbillon dépendent d'un même principe. Cela est si vrai, que KEPLER avant la découverte des taches sur le disque du Soleil, soupçonnoit qu'il devoit avoir un mouvement de rotation, dont la période étoit de 3 jours, au lieu de 25 jours & demi, comme les observations des taches l'ont montré dans la suite.

VII.

Mais ce qu'il y a de plus fort contre le système des Tourbillons, comme le remarque très-à-propos M. de MAUPERTUIS,

TUIS, résulte de l'incompatibilité pour ce systême entre les deux loix de KEPLER, qui s'observent pourtant generalement dans le cours des Planétes tant principales que secondaires. En vertu de la premiere de ces loix, les secteurs de l'Orbe elliptique d'une Planète, formés autour du foyer qu'occupe le Soleil, sont constamment proportionnels aux temps qu'elle employe a parcourir les arcs de l'Ellipse, compris dans ces secteurs. Par la seconde loi, il faut que les temps périodiques de différentes Planètes soient en raison sesquipliquée de leurs distances moyennes au Soleil, ce qui s'étend aussi aux Satellites par raport à la Planète principale autour de laquelle ils font leurs revolutions.

Si donc, selon l'hypothèse commune des Tourbillons, la vitesse des Planètes se regle sur celle des couches de la matiere du Tourbillon, il faudroit, suivant la premiere loi des secteurs proportionnels aux temps, que les vitesses réelles des couches fussent en raison inverse des distances au centre, c'est en quoi consiste la circulation harmonique de M. LEIBNITS. Mais en conséquence de la seconde loi, qui veut que les temps périodiques de différentes Planètes soient en raison sesquipliquée des distances au centre, il faudroit que ces mêmes vitesses réelles des couches fussent en raison soûdoublée réciproque de leurs distances. Les vitesses des couches auroient donc en même temps deux différentes raisons par raport aux distances, ce qui impliqueroit une manifeste contradiction.

Pour la sauver, on pourroit peut-être inventer un nouveau Tourbillon qui satisfit à une des loix, pendant que l'autre satisferoit à l'autre; & chacun de ces deux Tourbillons devroit circuler suivant sa propre regle, sans s'interrompre mutuellement en se traversant, à peu près comme M. BULLFINGER a voulu expliquer (d'une maniere plus ingénieuse que vraisemblable) l'effet de la pesanteur & sa tendance vers le centre de la Terre, en multipliant les Tourbillons. Mais c'est ici où l'on pourroit demander, si la simplicité des operations de la nature permet de prodiguer si liberalement *des*

matieres & des mouvements, sans autre raison que le besoin qu'on en a. Il est vrai que c'est une liberalité qui ne coûte rien, mais aussi peu pardonnable que celles des anciens Astronomes, qui, pour supléer à l'insuffisance de leurs hypothèses, n'ont point fait scrupule de créer de nouveaux cieux crystallins, des épicycles, & d'autres ouvrages de cette nature, à mesure qu'on en avoit besoin pour expliquer de nouvelles irregularités qui se découvroient dans le mouvement des Astres, sans se mettre en peine si tous ces embarras étoient convenables à la simplicité, à la beauté, & à la symmétrie de l'Univers. Que n'auroient-ils pas encore fait, ces mêmes Astronomes, si déja de leur temps on eût connu les merveilles du ciel, découvertes dans ces derniers siécles; que n'auroient-ils pas fait, dis-je, pour les expliquer à leur maniere: on ne verroit, je crois, qu'un labyrinte d'une infinité de cercles nouveaux.

VIII.

Je reviens à nos deux systèmes donnés par DESCARTES & par M. NEWTON: de quelque côté que je me tourne, je rencontre dans chacun des difficultés presque insurmontables. J'ai donc cru qu'en voulant se dévouer aveuglément à l'un ou à l'autre de ces deux systêmes, on ne pourroit pas répondre d'une maniere satisfaisante à la question proposée. Un juste milieu entre les deux m'a paru le plus sûr: pour cette fin, j'ai choisi de l'un & de l'autre ce qu'il y a de plus naturel & de plus simple; j'ai abandonné dans chacun ceux des principes qui choquent ou la raison ou le bon sens, ne me servant que de ceux qui sont clairs & intelligibles; j'en ai tiré des conséquences, qui en découlent naturellement sans les forcer. De cette maniere, j'ai tâché de concilier ensemble les deux systèmes par leur beau côté, pour en former un nouveau. J'admets dans ce nouveau systême les Tourbillons des deux especes, tant ceux du Soleil & des Etoiles fixes, que les particuliers

ticuliers autour des Planètes principales. Je ne leur donne point d'autre mouvement que celui qu'ils ont reçu du même principe qui a fait tourner les Astres sur leur centre qu'ils environnent. C'est la maniere la plus simple de concevoir la circulation d'un Tourbillon.

La gravitation des Planètes vers le centre du Soleil, & la pesanteur des corps vers le centre de la terre, n'a pour cause ni l'attraction de M. NEWTON, ni la force centrifuge de la matiere du Tourbillon selon M. DESCARTES; mais l'impulsion immédiate d'une matiere, qui sous la forme d'un Torrent, que je nomme *central*, se jette continuellement de toute la circonférence du Tourbillon sur son centre, & imprime par conséquent à tous les corps, qu'il rencontre sur son chemin, la même tendance vers le centre du Tourbillon. Delà je rends raison de la proprieté de cette gravitation des Planètes, nécessaire pour qu'elles décrivent des Ellipses autour du foyer, qui est le centre des tendances. Et tout ce qu'en déduit M. NEWTON par ses attractions, se déduit naturellement de ma Théorie des impulsions du Torrent central.

Cependant mes principes ayant entr'eux une liaison étroite, je ne pourrois pas commodément raisonner sur le sujet en question, sans faire préalablement une description de mon systême: ce que je fais d'autant plus volontiers, que j'aurai occasion d'expliquer en même temps les causes des principaux phénoménes du ciel, & de donner ainsi une idée generale d'une nouvelle Physique celeste.

Je partage mon ouvrage en quatre parties; les trois premieres seront employées à l'exposition du nouveau systême, & à l'explication des faits; & la quatrieme partie traitera en particulier de la Question proposée, où je ferai voir que la cause, qui fait que la route des Planètes principales s'écarte du plan de l'Equateur du Soleil, est semblable à celle qui détourne les Vaisseaux sur mer de la direction de la quille, ce que l'on apelle la *Dérive des vaisseaux*.

PRE-

PREMIERE PARTIE.

IX.

IL y a long-temps que l'on a remarqué, que ſuivant l'idée que DESCARTES donne pour expliquer la cauſe de la peſanteur par l'action de ſes Tourbillons, les corps graves ne devroient pas tendre directement au centre, mais perpendiculairement à l'axe de ces mêmes Tourbillons; les expériences faites depuis ont confirmé cette objection, en ce qu'on a vû qu'une ſphére de verre remplie d'eau juſqu'à une partie qui contenoit de l'air, ou une matiere liquide de moindre denſité que l'eau, étant tournée rapidement ſur ſon axe, cet air, ou cette matiere moins denſe, ſe rangeoit, non point autour du centre en forme de globe, mais plûtôt le long de l'axe, & formoit un noyau allongé, aprochant de la figure cylindrique, conformément à la nature des forces centrifuges, qui veut que les parties qui en ont moins, comme ſont les moins denſes, cedent aux plus denſes, qui ont plus de force centrifuge, & tendent par conſéquent vers le centre du cercle parallele à l'équateur de la ſphére, c'eſt-à-dire, perpendiculairement à ſon axe. Qu'on liſe pour cela le diſcours de M. BULFFINGER.

M. HUGUENS voulant obvier à cet inconvenient, a imaginé une autre ſorte de Tourbillon, dont la matiere ſe meut en tout ſens ſur la ſurface ſphérique de chaque couche dont il conçoit composé ſon Tourbillon; de-là il prétend faire voir pourquoi les corps peſants tendent directement au centre du Tourbillon: mais ce mouvement prétendu ſouffre de très-grandes difficultés, parce qu'on ne ſauroit dire ce qui peut entretenir ce mouvement; d'autant qu'il ſemble que chaque particule du Tourbillon, étant rencontrée par une autre de maſſe & viteſſe égale directement opoſée, toutes les deux devroient s'arrêter tout court, à moins qu'on ne veuille ſupoſer un reſſort parfait dans ces corpuſcules élementaires, qui les repouſſe, ſans pouvoir

pouvoir dire d'où leur vient ce ressort, & partant plus difficile à expliquer que la cause de la pesanteur elle-même.

X.

Selon mon systême, il faut concevoir deux sortes de matiere, comme aussi deux mouvements principaux, dans un Tourbillon celeste; l'une de ces sortes de matiere, est celle que je conçois comme parfaitement liquide, je veux dire, non seulement divisible à l'infini, ce qui est commun à tous les corps, mais divisée réellement à l'infini & sans bornes, ou plûtôt c'est un fluide uniforme, qui n'est pas composé de corpuscules élementaires, comme on conçoit les fluides ordinaires, qui selon la multitude & grosseur de ces corpuscules plus ou moins serrés, sont conçûs être plus ou moins denses, & faire une plus ou moins grande résistance aux corps sensibles qui y nagent: au lieu que nôtre matiere parfaitement liquide, entant qu'elle est destituée de corpuscules élementaires, est sans résistance, comme nous verrons plus amplement ci-après.

M. DESCARTES paroit avoir supofé quelque chose d'aprochant, par sa matiere qu'il apelle du *premier élement*, mais mais il y a une très-grande difference entre nos deux manieres de concevoir la nature & l'origine de cette matiere: la voici.

XI.

On sait que ce Philosophe prétendoit, que lorsqu'un Tourbillon celeste devoit se former d'une masse de matiere, au commencement en repos & divisée en petits corpuscules qui se joignoient exactement les uns aux autres, ne laissant aucun vuide entr'eux; que toute cette grande masse ayant pris par la volonté de Dieu, un mouvement de circulation autour d'un centre, ces corpuscules ont dû quitter leurs places, & se choquer de toutes parts; d'où il est arrivé, selon lui, que par la fréquente attrition de leurs angles & prominences avan-

cées ils se sont enfin écornés, jusqu'à s'arrondir parfaitement en petits globules très-solides, & destitués de pores; car DESCARTES croit que la solidité ou la dureté des corps n'a point d'autre cause que le repos relatif de leurs parties entr'elles.

C'est l'amas de tous ces petits globules qu'il a voulu nommer la matiere du second élement, & qui, par la continuation de son mouvement circulaire une fois imprimé, forme un des Tourbillons celestes. Le déchet, ou la raclûre provenue après l'arrondissement des globules, est ce que DESCARTES a nommé matiere du premier élement, dont les particules, incomparablement plus petites que les globules, n'ont aucune figure réguliére ni déterminée, mais servent en partie à remplir les interstices triangulaires des globules, & en partie à s'amasser autour du centre du Tourbillon, dans l'espace qui seroit resté vuide par la formation & diminution des globules, lesquels par leur force centrifuge se sont éloignés du centre. Cet amas de matiere du premier élement qui occupe la region centrale du Tourbillon, est, selon DESCARTES, la substance du Soleil, ou d'une autre étoile.

XII.

Je ne veux pas m'amuser à faire l'histoire de toutes les conséquences que ce grand Philosophe a tirées de cette hypothèse, pour en composer tout son systême du monde. Il me suffit de faire voir que sa matiere du premier élement n'est pas actuellement divisée à l'infini, puisqu'il veut que chacune de ces particules ait été séparée d'une plus grande, dont elle faisoit partie; elle est donc encore un corpuscule entier & indivisé, quoique sujet à des changements infinis de grandeur & de figure. De-là il suit que nôtre Philosophe a regardé la solidité ou la dureté des particules élementaires, c'est-à-dire, ce repos relatif de leur parties internes, comme un attribut essentiel ou attaché à leur nature.

XIII.

XIII.

Mais moi tout au contraire, je pense que la dureté des corps, quelque petits qu'ils soient, est une qualité accidentelle, qui n'est point comprise dans l'idée que nous devons avoir du corps. La cohésion des parties, soit parfaite ou imparfaite, est un phénomène qui a sa cause comme tous les autres phénomènes de la nature. Qui dit corps, ne dit autre chose que ce qui est étendu, mobile & impénétrable; voilà tout ce que l'idée du corps doit renfermer; il n'est pas même nécessaire de faire entrer la divisibilité dans la définition du corps, comme étant déja comprise dans la seule notion de l'etenduë.

XIV.

Cela étant, il est visible que la matiere, entant que matiere, est non seulement divisible à l'infini, mais qu'immédiatement après sa création elle pouvoit être réellement divisée à l'infini, j'entends ici une *infinité* absoluë, en sorte qu'il n'y a pas même des particules infiniment petites, ou pour parler ainsi, des differentielles de matiere, dont on puisse dire qu'elles ont une solidité nécessaire; car encore une fois la solidité n'entre pas dans la nature du corps, & n'en est point du tout essentielle. Je sais bien qu'il y a des Philosophes, & presque la plûpart, qui croyent que les corpuscules élementaires qui composent les corps sensibles, sont solides de leur nature; comme si la petitesse pouvoit changer la nature du corps: mais c'est un préjugé tout pur, dont on devroit se défaire.

Ainsi je conçois très-clairement, qu'il peut y avoir, sans contradiction, dans le monde, une matiere telle que je viens de la décrire, & que j'apellerai, prise dans ce sens, *matiere premiere*, ou matiere du *premier élement*, dont la nature est d'avoir une division, ou plûtôt une dissolution de parties qui va à l'infini absolu. En effet, qu'est-ce qui m'empêche de suposer l'existence de ce premier élement? car aprés la création

de la matiere en general, le Créateur n'avoit qu'à en laisser une partie dans son état naturel, & cette partie étoit déja ce premier élement, sans que le Créateur y adjoûtât une nouvelle qualité.

X V.

L'autre partie de la matiere aura été employée primitivement à en former des corpuscules, en prenant pour chacun une petite quantité de matiere du premier élement, ramassée ensemble, & qui par le seul mouvement conspirant dans tous ses points, fait une massule dont les parties sont par cela même cohérentes, sans dire qu'elles soient invinciblement dures. Ce sont donc ces corpuscules élementaires que je qualifierai du titre de *matiere du second élement*. Je ne prétends pas, à l'exemple de DESCARTES, montrer comment par les différentes combinaisons de la matiere du second élement avec le concours du premier s'est formé la matiere du troisiéme élement, & de-là comment les corps terrestres & celestes ont pû prendre leur origine ; ce seroit une entreprise trop hardie & trop présomptueuse pour moi. Mon but est seulement de faire voir que par la nature & par l'action de la matiere du premier & du second élement, tels que je les ai expliqués ici, je me trouve en état de rendre raison des principaux phénomènes celestes que l'Astronomie a observés, & partant aussi de celui qui fait le sujet de la question de l'illustre Académie.

X V I.

La matiere du premier élement étant parfaitement liquide, & n'ayant point de parties cohérentes, on voit bien qu'elle ne fait aucune résistance aux corps qui s'y meuvent ; car la résistance des fluides ne vient que de l'inertie des molécules dont les fluides sont composés, & dont un corps qui y nage, doit à tout moment remuer, & déplacer une certaine quantité ; ce qui ne se peut faire sans leur communiquer une partie de son

son mouvement, & en perdre par conséquent tout autant. Et c'est en quoi consiste la résistance, qui, la vitesse étant égale, sera toûjours proportionnelle à la densité du fluide, indépendamment de la grosseur des molécules; car c'est le volume entier, & non pas le nombre, que le corps mû déplace dans un petit temps donné, qui doit déterminer la quantité de la résistance.

Ainsi on accorde à M. NEWTON, que faisant abstraction de la tenacité & du frottement du fluide contre le corps, ce qui cause une autre espece de résistance; ne regardant que la résistance qui vient de l'oposition & du déplacement d'un volume de molécules que le corps rencontre, cette résistance sera en raison composée de la densité & du quarré de la vitesse: on accorde donc aussi, qu'une plus ou moins grande subtilité de ces molécules, ne fait rien à l'estimation de la résistance; étant visible que les plus subtiles molécules peuvent être si serrées, que le fluide qui en est composé sera beaucoup plus dense, qu'un autre dont les molécules (peut-être plus grossieres) ne laissent pas de composer un fluide d'une rareté fort grande; tel est, par exemple, l'air dont les molécules élementaires, selon toutes les aparences, ont plus de grosseur que celles du vif-argent, quoique le vif-argent soit bien dix mille fois plus dense que l'air.

XVII.

Mais selon l'idée que nous avons de nôtre matiere du premier élement, puisqu'elle n'est pas un amas de molécules solides comme un autre fluide, il est évident qu'elle n'a pas cette inertie, requise pour oposer de la résistance aux corps qui s'y meuvent. C'est donc une matiere liquide, d'une continuité & homogeneïté parfaite, qui cede avec une facilité infinie au moindre mouvement d'un corps, qui ne fait que remplir le vuide, & s'accommoder à tout moment aux différentes situations des corps qu'elle environne. Cela fait que

 les

les corps y peuvent continuer leur mouvement ſans en rien perdre, tout comme ils feroient, s'ils nageoient dans un vuide parfait, tel que le ſupoſent les partiſans rigides de M. NEWTON.

XVIII.

Suivant ma théorie, la nature & la formation d'un Tourbillon celeſte ſe fait, comme je vais l'expliquer: il faut concevoir une prodigieuſe quantité de matiere fluide, mais non pas de celle que DESCARTES apelle des globules céleſtes; je ſupoſe que ſa plus grande partie ſoit faite de cette matiere du premier élement parfaitement liquide, dans laquelle ſoit mêlée une bonne partie de matiere du ſecond élement, diſperſée par toute la maſſe; en ſorte que les particules du ſecond élement, quoique bien proches les unes des autres, ne laiſſent pas d'avoir des intervalles, qui ſont bien grands en comparaiſon des diamétres de ces particules; à peu près comme je conçois, que le peu de fumée qui ſort d'un grain d'encens mis ſur un charbon ardent remplit tout l'air d'une chambre, ou comme un grain de cochenille peut teindre une grande quantité d'eau claire. Donc toute cette maſſe de matiere parfaitement liquide, mais impregnée de particules du ſecond élement, commençant à être tournée autour du centre en forme d'un Tourbillon, continuëra de ſe mouvoir avec la viteſſe une fois acquiſe; mais cette viteſſe, qui ſera vers l'équateur du Tourbillon à peu près en raiſon reciproque de la racine quarrée de la diſtance au centre, comme on a démontré ailleurs que la nature du tourbillon le requiert, n'eſt pas à beaucoup près ſi rapide, que ſe l'imaginent ceux qui croyent, avec DESCARTES, que les Planètes ſont emportées par le Tourbillon autour du Soleil. Car je ferai voir que les Planètes ont un tout autre principe de leur mouvement annuel, & que la circulation de la matiere du Tourbillon eſt deſtinée à un autre uſage qu'à celui d'emporter les Planètes.

XIX.

XIX.

Je reviens à confiderer le Tourbillon dans l'état de génération : dès le moment donc qu'il a commencé à circuler, les particules du fecond élement ont à la vérité acquis un peu de force centrifuge ; je dis *un peu*, parce que leur mouvement circulaire eft très-lent par raport à celui qui feroit requis pour entrainer les Planètes fuivant l'idée de M. DESCARTES ; cependant cette force centrifuge, quelque petite qu'elle foit, a fait monter un peu les particules du fecond élement, en s'éloignant du centre ; s'étant ainfi raprochées entr'elles, elles ont compofé le corps du Tourbillon plus denfe qu'il n'étoit, & la denfité introduite a été différente felon les différents éloignements du centre, & la diverfité des particules, foit dans leur groffeur, figure, ou autres circonftances, ce qu'il n'eft pas à propos d'aprofondir, comme ne faifant rien à mon deffein. Il fuffit que je dife que la denfité la plus grande qui fe trouve dans le Tourbillon, peut être conçûë de fi peu de conféquence, que malgré cette denfité, la matiere du fecond élement eft encore fi rare, que le mouvement d'une Planète n'en fauroit être retardé fenfiblement pendant un grand nombre de fiécles.

XX.

Cependant, par l'éloignement du centre & par la condenfation de la matiere du fecond élement, il refta un efpace autour du centre du Tourbillon, qui fut rempli de matiere du premier élement d'une liquidité parfaite, entremêlée pourtant de particules groffiéres, qui par l'irrégularité de leurs figures fe font accrochées en partie, & n'ont pas acquis affés de force centrifuge, pour fortir de cet abime de matiere du premier élement.

XXI.

X X I.

C'eſt cette matiere infiniment liquide, accumulée & renfermée dans l'eſpace central de chaque Tourbillon, qui fait ce qu'on apelle une Etoile fixe, ou le Soleil qui eſt au centre du Tourbillon ſolaire, dont je veux entretenir mon lecteur; tout ce que j'en dirai pouvant être apliqué aux autres Tourbillons, dont chacun eſt parmi les autres, comme entouré de ceux qui lui ſont les plus voiſins tout à l'entour.

X X I I.

La maſſe totale du Soleil, ramaſſée autour du centre de ſon Tourbillon, aura acquis, par la premiere impreſſion, ce mouvement de rotation ſur ſon centre, dont une révolution (comme on le connoit par ſes taches) s'acheve dans le temps de $25\frac{1}{2}$ jours par raport aux étoiles fixes; mouvement trop tranquille & trop lent pour produire une force centrifuge de quelque conſidération; comme je le ferai voir ci-deſſous.

X X I I I.

Mais la matiere du Soleil, qui eſt infiniment ſubtile, & dont la moindre portion l'eſt auſſi, par conſéquent ſuſceptible d'une extrême agilité, cette matiere, dis-je, n'auroit-elle point d'autre principe de mouvement, que celui dont je viens de parler, en vertu duquel tout le globe ſolaire tourne ſur ſon axe d'une viteſſe aſſés uniforme, de même que ſon tourbillon dans chacune de ſes couches? Il ne faut pas douter que la matiere du Soleil, outre ſon mouvement rotatif, ne ſoit encore dans une agitation très-violente, qu'elle a reçûë dès le commencement de ſon exiſtence, & qui ne ſauroit diminuer par la longueur du temps, quoique cette agitation ſe faſſe confuſément & en tout ſens: car comme ce liquide parfait eſt d'une nature à ne point faire de réſiſtance aux corps

qui

qui y nagent, ainsi que nous l'avons dit, il s'ensuit que les parties, n'ayant point de connéxion entr'elles, se mouvront aussi très-librement, sans s'empêcher, ni se résister en aucune maniere.

XXIV.

Voyons ce qui doit arriver aux corpuscules grossiers & irréguliers, que j'ai dit (§. XX) être mêlés par-ci par-là dans dans cet océan du premier élement; & qui par l'irrégularité de leur figure, & par la lenteur du mouvement de rotation de la masse du Soleil, n'acquiérent pas assés de force centrifuge pour sortir & s'éloigner du Soleil, ou, s'il y en a qui s'éloignent, cet éloignement ne s'étendra qu'à une certaine distance, par exemple, tout au plus jusqu'à l'orbite de la Terre, peut-être dans un temps plus que dans un autre. Enfin, selon la constitution & l'agilité de ces corpuscules, une partie ira assés loin, une autre se rangera plus ou moins haut, à proportion de la force centrifuge que les corpuscules reçoivent par le tournoyement du Soleil.

XXV.

C'est peut-être de cette matiere qui s'échape du Soleil, que se forme une espéce d'atmosphère platte autour de cet astre, & particulierement sur le plan de son équateur, puisque c'est ici où le mouvement de circulation est le plus vite, & où par conséquent la force centrifuge est la plus grande. Ainsi il n'y a nul doute que ce ne soit cet atmosphère qui cause la lumiere zodiacale, que M. CASSINI *le pere* observa la premiere fois le soir du 18 Mars 1683, comme il l'a annoncé lui-même dans le Journal des Savants du 10 Mai de la même année. Après lui, M. FATIO DE DUILLIER remarqua aussi cette lumiere dans l'Automne le matin avant le lever du Soleil; d'où il conjectura d'abord, qu'elle devoit paroitre le plus sensiblement dans ces deux saisons, savoir dans le Printemps après le coucher

cher du Soleil, & dans l'Automne avant ſon lever, parce qu'alors dans nos climats, l'écliptique (ou plûtôt le plan de l'équateur ſolaire) ſur lequel la lumiere (qu'on apelle zodiacale) ſe répand, s'éleve le plus droit ſur l'horizon, ou s'aproche le plus d'un cercle vertical.

X X V I.

Après cette petite digreſſion, je reviens à mon ſyſtème, qui ſe developera par l'explication des principaux phénomènes aſtronomiques, entre leſquels celui qui eſt en queſtion demande le plus d'attention, vû l'extrême difficulté qui ſe préſente de tout côté en voulant chercher une cauſe phyſique probable, qui faſſe détourner la route des Planètes du plan de l'équateur ſolaire; d'autant qu'il paroit être contre le cours & l'ordre de la nature, que les corps mûs ne ſuivent pas la direction de la cauſe mouvante, là où les corps celeſtes ont un champ libre d'aller en tel ou tel ſens, vers où la force motrice les détermine.

C'eſt ici en effet, que l'action des Tourbillons à la Cartéſienne ſouffre un horrible échec; car le mouvement du Tourbillon & celui du Soleil ſur ſon axe, ſe faiſant chacun d'Occident en Orient, prennent ſans doute leur origine d'une même cauſe: le Tourbillon & le Soleil ſont un tout; ainſi la même force primitive, qui a fait tourner l'un, a auſſi fait tourner l'autre; donc l'équateur de l'un & l'équateur de l'autre devroient être dans un même plan; donc auſſi les Planètes, qui flottent tranquillement (ſelon l'idée de DESCARTES) dans la matiere du Tourbillon, devroient ſuivre abſolument ſa direction, tout comme un batteau dans une riviere abandonné à lui-même, eſt bien-tôt entrainé par l'eau, & dirigé ſuivant le fil du courant. Cependant les Planètes ne marchent pas ſur les traces du courant du Tourbillon; elles s'en écartent, & décrivent des routes particulieres, dont les plans coupent le plan commun du Tourbillon & du Soleil dans la ligne des Nœuds

Nœuds qui passe par leur centre commun. Voilà le point capital de la difficulté.

XXVII.

Pour me préparer à y répondre convenablement, je continue à faire mes réflexions sur les effets que doit produire la véhémente agitation de la matiere du premier élement, dont j'ai commencé à parler (§. XXIII): je regarde d'abord cette agitation comme la plus forte ébullition que l'on puisse concevoir, & d'autant plus forte que la quantité de corpuscules irréguliers du second élement, qui s'y trouvent dispersés, ne sauroit rallentir ni diminuer en rien la violence de cette ébullition, parce que quelque copieuse que soit cette matiere hétérogéne des corpuscules, elle est comptée pour rien en comparaison de toute la masse du Soleil, & n'y fera pas plus qu'une pincée de poussiere que je jetterois dans un grand chauderon rempli d'eau bouillante.

Cependant ces corpuscules ne laissent pas d'être la cause de plusieurs effets considerables tant au dedans qu'au dehors du Soleil; car comme ils sont obligés de subir la même agitation confuse, ils ne peuvent que se choquer très-fréquemment avec une grande impétuosité, par où il arrive qu'une partie des plus grossiers & irréguliers, pouvant résister à la rupture, s'accrochent ensemble, & forment enfin de gros pelotons, à peu près comme se font les avalanges de neige, qui grossissent en roulant avec précipitation du haut d'une montagne. C'est de-là, sans doute, que tirent leur origine les taches de différente grandeur & figure, que l'on observe sur le disque du Soleil, qui vraisemblablement ne sont autre chose que ces gros pelotons, expulsés quelquefois vers la surface du Soleil, & ensuite derechef engloutis.

L'aparition de ces taches a été d'un grand secours aux Astronomes, qui par leur mouvement sur le disque solaire ont eu l'avantage de déterminer deux choses: 1°. le temps

périodique d'une révolution du Soleil sur son axe; & 2°. la situation de son équateur par raport aux étoiles fixes. Par où ils ont connu que ce mouvement de rotation se fait en même sens que la révolution des Planètes autour du Soleil, savoir suivant l'ordre des Signes; marque certaine que ces mouvements sont les effets d'une même cause. Quant à l'équateur solaire, ils ont aussi trouvé par leurs fréquentes observations, qu'il n'est pas dans un plan commun avec l'écliptique ou l'orbite de la Terre, ni avec les orbites des autres Planètes, mais que toutes ces orbites sont différemment inclinées, tant entr'elles, que par raport à l'équateur du Soleil. Or comme cette différence ne paroit pas bien s'accorder avec la mutuelle dépendance qui devroit régner entre le mouvement de rotation du Soleil, & celui de son Tourbillon; c'est justement ce qui a occasionné l'illustre Académie d'en demander la cause physique: mais avant que d'en venir à la solution de cette importante question, il faut nécessairement achever d'expliquer mon systême, afin que la liaison entre tous les phénomènes, dont l'explication en découle si naturellement, soit exposée dans un plus grand jour. Je me flatte que la simplicité, aussi bien que la fécondité des principes dont je me sers, sera agréable à tous ceux qui aiment qu'un systême soit clair & intelligible.

XXVIII.

Nous avons consideré l'effet que produisent les corpuscules grossiers & crochus, en formant par leur rencontre & leur concrescence les taches du Soleil; je passe maintenant à méditer sur ceux qui sont moins grossiers, & d'une consistance friable: je vois avec une évidence entiere, que ceux-ci ne pouvant pas résister à l'impetuosité & frequente collision, sans se rompre de plus en plus, deviendront d'une subtilité qui surpasse la force de l'imagination. C'est donc dans l'agitation incroyablement violente, & la collision perpétuelle de ces petites massules, que consiste la lumiere éclatante, & la chaleur excessive du

du Soleil. Il n'y a qu'à voir comment l'une & l'autre eſt portée au déhors du Soleil à une diſtance immenſe, & avec une rapidité prodigieuſe.

XXIX.

Je ne ſais ſi on ne m'accordera pas facilement, que ces maſſules reduites à une petiteſſe quaſi infinie, & miſes dans une effervеſcence extraordinaire, ne pouvant plus ſe contenir dans leurs bornes, ſeront chaſſées & jettées hors du Soleil, avec une viteſſe incomparablement plus grande que tout ce qu'on peut imaginer de plus rapide, & cela en direction droite du centre vers tous les points de la ſurface extrême, & au de-là même (comme nous l'entendrons bientôt) du Tourbillon. Nous voyons au moins une foible image de telles exploſions dans les liqueurs ſpiritueuſes faites par la chymie, leſquelles étant fortement ſecouées & agitées, rendent une odeur beaucoup plus forte & plus au loin, que quand elles ſont dans un état calme; marque certaine que, par le mouvement d'agitation, les particules ſpiritueuſes ſont pouſſées dehors, & diſperſées de toute part à la ronde, juſqu'à une diſtance conſiderable.

Je conçois donc, que ces effluves qui ſortent du Soleil, ſans ceſſe, en ligne droite, par l'effet d'une exploſion très-violente, ſont ce qu'on apelle les rayons du Soleil, qui portent ſur tout ce qu'ils rencontrent la lumiere & la chaleur, de la maniere qu'on ſait aſſés, ſans que je m'y arrète long-temps.

XXX.

Je dois plûtôt répondre à deux objections qu'on peut me faire. La premiere eſt, pourquoi par ce continuel découlement de ces maſſules, qui dure déja depuis la création du Monde, la ſource, qui eſt dans le Soleil, ne tarit pas à la fin, & que la matiere ne lui en manque jamais? La ſeconde objection conſiſte en ce qu'on me demandera, d'où vient que les rayons, qui traverſent les vaſtes étenduës du Ciel, ne perdent rien de

leur rapidité ? Pour ce qui est de la derniere de ces objections, à laquelle je répondrai en premier lieu, je dis sans détour, que chaque Tourbillon n'étant qu'une masse de matiere du premier élement, mais sans agitation intestine, qui se trouve seulement dans celle du Soleil & des autres Etoiles fixes, & que dans cette masse du Tourbillon y ayant bien quantité de particules du second élement, mais qui sont fort dispersées les unes des autres ; on voit bien, que puisque la matiere du premier élement ne résiste pas, les rayons y passeront sans aucun obstacle de la part de cette matiere, & à cause des grands interstices que laissent entr'elles le particules du second élement, l'extrême subtilité des massules, dont les rayons sont composés, fait aussi qu'il n'y a point d'empêchement à craindre pour leur passage ; & que si par hazard il y en a, l'une ou l'autre de ces particules, qui se rencontre sur leur chemin, sera bien vite refoulée, & écartée par le flux continuel du rayon.

X X X I.

Mais quant à la premiere objection, elle merite plus d'attention ; d'autant que la réponse que j'y donnerai, m'ouvre justement le chemin pour parvenir à la connoissance de la cause physique d'un des plus importants phénomènes, je parle de la pesanteur. On renvoye donc la réponse, pour la donner lorsque j'aurai à expliquer la pesanteur dans toute son étenduë ; il suffit que je dise en passant, que la perte de la matiere du Soleil, qui se fait par l'écoulement des rayons, est à tout moment reparée par une égale quantité d'autre matiere qui s'y jette de tout côté, venant des extrémités du Tourbillon vers le Soleil, de la maniere que j'indiquerai.

Revenons donc aux rayons du Soleil, dans le progrès desquels consiste la propagation de la lumiere. Il y a long-temps que l'on est desabusé de croire avec DESCARTES, que cette propagation soit instantanée comme un effort qui se communique à la fois d'un bout à l'autre par toute la longueur d'un bâton,

bâton, quand il est pressé par l'une des extrémités. L'observation qu'a faite M. ROMER, montre evidemment que le progrès de la lumiere est successif, quoique prodigieusement rapide, puisqu'elle parcourt le diamétre de l'orbe annuel de la Terre dans le temps de 22 minutes horaires; ensorte que dans une seule minute elle fait un chemin de mille diamétres de la terre, & $16\frac{2}{3}$ diamétres dans une seconde. Une telle vitesse, qui est six cent mille fois plus grande que celle du son, a paru à M. HUGUENS trop énorme, pour croire que la propagation de la lumiere se fasse par un transport actuel d'une matiere, qui depuis l'objet lumineux s'en vienne jusqu'à nous. Il a donc mieux aimé concevoir cette propagation sur le pied que se fait celle du son, qui s'étend par des ondes sphérique, comme on le voit dans son Traité de la Lumiere, d'ailleurs très-ingénieux; où il prétend que les particules qui composent le rayon, sans sortir loin de leur place, se poussent successivement, comme feroient de petites boules élastiques mises bout à bout sur une longue file en ligne droite, dont la premiere en mouvement choqueroit la seconde, celle-ci la troisieme, & ainsi de suite, tout le mouvement de la premiere boule seroit transmis à la derniere par les boules intermédiaires.

XXXII.

Mais sans parler de l'impossibilité du hazard, qui demanderoit que toutes ces petites boules fussent mises très-exactement & à la rigueur géométrique en ligne droite; car ce qu'il dit, que si une des boules en rencontroit à la fois trois ou plusieurs autres, la communication du mouvement en ligne droite ne laisseroit pas de se faire sur les suivantes avec la même vitesse, est très faux, & contre les régles de la communication du mouvement; sans parler donc de cet inconvénient, on voit bien que par-là il ne gagneroit rien pour sauver la difficulté qu'il y auroit à comprendre cette énorme vitesse, qu'il faut supposer en statuant que la matiere des rayons se transporte effectivement depuis l'objet rayonnant jusqu'à la plus grande distance où la lumiere se porte;

car

car quand on lui accorderoit cette ſorte de tranſmiſſion de mouvement d'une boule à l'autre, ne faut-il pas que chacune reçoive ſucceſſivement la même viteſſe par l'impreſſion de la précédente? & la rapidité de cette ſucceſſion de l'une à l'autre n'eſt-elle pas plus incompréhenſible, que ſi la viteſſe une fois imprimée à chacune des boules ne fait que perſeverer, puiſqu'il n'y a rien en leur chemin qui leur réſiſte, comme nous avons fait voir?

Outre cela, l'élaſticité des boules d'où leur viendroit-elle, vû que les corps ſont naturellement ſans reſſort, & s'ils en ont, il faut qu'il y ait une cauſe qui le produiſe; car certainement l'idée que l'on a du corps ne renferme pas celle de l'élaſticité; autrement tout corps devroit être élaſtique, ce qui eſt contre l'expérience; donc, ſelon M. HUGUENS, il faudroit ſupoſer encore un autre genre de matiere, qui fût incomparablement plus ſubtile que ces boules qui compoſent les rayons de lumiere, leſquelles ſont déja d'une ſi grande ſubtilité, qu'elles paſſent librement les pores les plus étroits, tels que ſont ceux du verre, du criſtal, du diamant: ce ſeroit donc cette autre matiere, qui entrant avec une rapidité inconcevable dans les globules de la lumiere, leur devroit procurer cette parfaite élaſticité.

Ainſi M. HUGUENS, bien loin d'éviter la difficulté, qui, ſelon lui, ſe rencontre en ſupoſant un tranſport effectif des globules de lumiere avec une ſi grande viteſſe, eſt reduit à ſupoſer dans la matiere, qui leur donne le reſſort, une viteſſe infiniment plus grande; ou veut-il peut-être que l'élaſticité leur ſoit innée ou eſſentielle, ſans qu'on ait beſoin de ſupoſer pour cela une cauſe étrangère? mais ce ſeroit attribuer à la matiere une qualité auſſi incompréhenſible que l'eſt la vertu attractrice que donnent ſi liberalement aux corps M^rs. les *Newtoniens*, ſe mettant peu en peine qu'on l'entende ou non. En fait de Phyſique, on a raiſon de rejetter la coûtume de ceux, qui pour expliquer quelque phénomène, ont recours à des principes chimériques, plus obſcurs que ce qui eſt en queſtion.

XXXIII.

XXXIII.

Après cette discussion, nous ne balancerons plus à établir pour hypothèse, que les petites masses très-fines (que je nommerai *massules*) formées dans le Soleil par cette agitation violente, sont continuellement chassées hors du Soleil avec une rapidité nécessaire pour parcourir mille diamétres de la Terre dans une minute de temps. Et comme cette explosion se fait de tout côté, ou vers toutes les plages du Monde, il est visible qu'il y a autant de rayons partants du Soleil, que l'on peut s'imaginer de lignes droites tirées du centre vers toute la circonférence de son Tourbillon, & que chaque rayon est une file rectiligne d'une infinité de massules, qui se suivent immédiatement les unes après les autres avec cette prodigieuse vitesse.

Rien n'empêche donc de concevoir, qu'à cause de leur extrême petitesse, elles pénétrent librement les pores des corps grossiers sur lesquels elles tombent, comme sont les Planètes & leurs atmosphéres, sans y produire d'autre effet que la lumiere & la chaleur; la lumiere se termine sur la surface des corps, à moins que leurs pores ne soient disposés en ligne droite, auquel cas la lumiere passe plus outre avec les rayons; car ceux-ci passent toûjours (au moins pour la plûpart) de part en part, quoiqu'ils soient obligés d'aller en serpentant par les corps qu'on nomme *opaques*, à cause des détours & des sinuosités obliques des pores, mais néanmoins sans rien perdre de leur rapidité; car les pores sont assés larges pour donner un libre passage, ils changent seulement la direction, & interrompent par-là l'effet de la lumiere, qui demande la continuation en ligne droite.

Mais pour la chaleur, qui est causée par le frottement continuel que souffrent les pores intérieurs ou leurs parois, quand les rayons y passent & agitent les petits filaments qui avancent hors de ces parois; il est clair que les parties des corps opaques, en étant ébranlées en diverses manieres, reçoivent cette qualité qu'on apelle *chaleur*.

XXXIV.

Ce n'eſt pas mon deſſein de m'arrêter plus long-temps ſur l'explication de ces deux effets, j'entends de la lumiere & de la chaleur; je n'en euſſe même point du tout parlé, comme hors de mon ſujet, ſi la petite deſcription de mon ſyſtème (que je dois faire préliminairement avant que de donner une ſolution probable de nôtre queſtion) ne m'y eût conduit directement.

Je reprends donc le fil de mon diſcours, pour voir ce qui arrive de plus aux rayons du Soleil, après avoir paſſé au travers des Planètes, auſſi-bien qu'à tous ceux qui ne les traverſant pas ſont parvenus au-deſſus de la region de Saturne, où ils ne rencontrent plus de Planètes juſqu'à l'extrémité du Tourbillon: à moins que dans cette vaſte étenduë il n'y ait peut-être encore quelques autres Planètes, mais qui pour être trop éloignées ou trop petites, ne ſont pas viſibles.

XXXV.

Les maſſules, dont les files compoſent les rayons, étant ainſi parvenues à l'extrémité du Tourbillon, ſont d'une très-grande rareté, puiſque toutes celles qui partoient à la fois en lignes droites depuis la ſurface du Soleil, ſont préſentement répanduës par toute la ſurface du Tourbillon; par conſéquent les denſités étant en raiſon réciproque des eſpaces qu'une même quantité de maſſules occupe, il eſt évident que la denſité de leur maſſe totale dans l'inſtant qu'elles partent du Soleil, eſt à la denſité de cette même maſſe répanduë ſur toute la ſurface du Tourbillon, réciproquement comme le quarré du demi-diametre du Tourbillon eſt au quarré du demi-diametre du Soleil. D'où il paroit qu'à cauſe de cette grande rarefaction de la matiere des rayons ſolaires, la lumiere doit être affoiblie dans la même raiſon directe; avec tout cela les rayons ne laiſſent pas de continuer leur route avec la même rapidité, & de

de pénétrer non-seulement dans les Tourbillons voisins, mais de les traverser, & encore d'autres plus éloignés, pour porter leur lumiere, quoiqu'affoiblie extrémement, à des distances immenses; il faut bien que cela soit ainsi, car sans cela les étoiles fixes, qui dardent leurs rayons dans nôtre Tourbillon, au travers de plusieurs autres qui sont entre deux, ne seroient pas visibles.

XXXVI.

Cependant considerons maintenant un autre effet qui doit arriver à la matiere des rayons, lorsqu'elle est portée à l'extrémité de son Tourbillon, & qu'elle est prête à entrer dans celui qui le touche immédiatement: il est très-probable, & moralement certain, que parmi tant de millions de milliards de ces massules, qui se présentent à chaque instant sur toute la superficie du Tourbillon, & dont le plus grand nombre passe plus outre, il y en a pourtant aussi une multitude très-considerable, qui sont rencontrées par tout autant de massules semblables, lesquelles chassées du fond des Tourbillons qui environnent le nôtre, viennent fondre sur les premieres avec la même force. D'où il s'ensuit que ces massules n'ayant naturellement point de ressort, comme je l'ai dit ci-dessus, il faut que toutes les fois que deux de ces massules de différents Tourbillons viennent à se choquer directement, elles perdent toutes deux leur mouvement, & s'arrêtent tout court colées ensemble, & forment ainsi une nouvelle massule en repos deux fois plus grosse que chacune n'étoit auparavant. Il peut même arriver, sans beaucoup de hazard, que plusieurs de ces nouvelles massules en repos viennent à être choquées à la fois par deux autres primitives, l'une d'un côté, & l'autre du côté oposé; auquel cas il est derechef manifeste par les règles de la communication du mouvement des corps sans ressort, que ce second choc détruisant le mouvement oposé de ces deux nouvelles massules, & les colant aux deux premieres, il s'en formera

mera un petit peloton en repos, & quatre fois plus gros qu'une des massules primitives.

De cette maniere, je conçois clairement, que ces pelotons peuvent grossir de plus en plus, avant que d'être chassés de leur repos par des chocs, qui viennent d'un seul côté, soit pour retourner ensemble au Soleil, si le choc vient du côté d'un Tourbillon voisin, soit pour pénétrer plus avant dans un des Tourbillons voisins, lorsque le choc vient du côté du Tourbillon solaire.

XXXVII.

Ainsi voilà nôtre Tourbillon solaire, & chacun des autres, terminé par une espéce de voile d'un tissu fort rare & poreux, dont les parties ne sont point liées ensemble; ensorte que le plus grand nombre des massules qui composent les rayons y passent librement, pour sortir & entrer d'un Tourbillon dans l'autre: mais à cause de leur multitude infinie, il y en aura toûjours assés que le hazard dirige à tomber centralement sur autant de pelotons, qui sont là dans l'inaction & en repos, par conséquent dans un état d'indifférence à être emportés vers où ils sont poussés, c'est-à-dire, les uns pour descendre au Soleil, les autres pour rentrer dans un autre Tourbillon. Il peut même arriver, qu'en chemin faisant, quelques-uns de ces pelotons se joignent à d'autres qu'ils entrainent avec eux, & grossiront par ce nouvel accroissement.

De cette maniere nous concevons qu'il doit descendre continuellement du ciel une pluye abondante & impétueuse de pelotons repoussés en bas par le choc des massules, qui sortent des Tourbillons circonvoisins.

XXXVIII.

Je vais faire à present mes reflexions sur la nature & l'effet de ce déluge de pelotons, qui tombe de toute part de la circonférence du Tourbillon vers le centre, & que j'apellerai pour

pour cela *Torrent central*; parce qu'effectivement sa matiere est assés copieuse pour qu'elle se jette avec précipitation comme un Torrent perpetuel sur le Soleil. C'est donc de cette matiere que le Soleil recouvre sa nourriture, pour reparer la perte qu'il fait sans cesse par l'émanation des files de massules, je veux dire par les rayons; à peu près comme les eaux qui sortent de l'Océan, soit par l'évaporation, ou par la filtration par les pores de la terre, lorsque de maniere ou d'autre, moyennant la chaleur, elles se résolvent en vapeurs, dont ensuite plusieurs parcelles se joignant ensemble en goutes, retombent en forme de pluye, ou sortent des lieux élevés de la terre pour composer de petits ruisseaux, qui eux-mêmes par leur concours forment de grands fleuves pour regagner les mers.

Ou bien ne pourroit-t-on pas faire cette autre comparaison, prise de ce que nous voyons que la fumée, qui s'éleve de la matiere combustible, & dont une partie s'attache au tuyau de la cheminée, & fait la suye, laquelle reprenant peu à peu par la réünion des petites particules de la fumée une consistance plus grossiére, se détache enfin, & retombe au foyer. C'est donc ainsi qu'on répond à la premiere objection formée dans le §. XXX. Or il est assés intelligible, sans que je le dise, que les pelotons rentrés dans le Soleil, sont d'abord contraints de suivre la violente agitation confuse, qui se trouve dans toute la masse du Soleil, & ne seront pas long-temps sans être réduits par la frequente collision dans leur premier état de petitesse, c'est-à-dire, dans la forme des massules propres à subir l'explosion nécessaire pour le dardement des rayons, tout comme la suye retombée dans le feu, se brûle, & se dissout une seconde fois en fumée, & remonte.

En tout cela je ne vois rien qui puisse choquer l'imagination : mais il se présente une difficulté dans la maniere de concevoir la descente du Torrent central jusqu'au Soleil, sans que les files de pelotons s'empêchent mutuellement de descendre, avant que d'arriver à la surface du Soleil; car si les pelo-

tons encore en repos occupent toute la vaste étenduë de la circonference du Tourbillon, & qu'ils viennent ensuite se précipiter sur la surface du Soleil, où ils doivent occuper une étenduë quasi infiniment plus petite, il faut sans doute que la densité des files, près du Soleil, devienne comme infinie par raport à celle que les pelotons ont entr'eux, pendant qu'ils sont dispersés à l'extrémité du Tourbillon : ainsi il semble que les files devroient enfin en descendant se toucher par les côtés avant que d'achever la descente totale : mais cela se faisant, il est sensible que les files du Torrent ne pourroient plus descendre davantage, sans que les pelotons se pénétrassent; d'où il s'ensuit que le Torrent s'arrêteroit, & demeureroit suspendu à une bonne distance du Soleil.

Pour lever cette difficulté, on n'a qu'à dire que quoique les files soient assez serrées autour même de la circonference du Tourbillon, rien n'empêche pourtant qu'on ne puisse suposer que leurs interstices peuvent être diminués tant que l'on veut, pourvû que l'on conçoive que la somme de tous les diametres des pelotons situés autour de la circonference du Tourbillon, n'excede pas la circonference du Soleil : de cette maniere nous comprendrons aisement que le Torrent descendra jusqu'au Soleil, sans que les files viennent à se toucher. Il est vrai que pour que cela soit, il faut que les pelotons soient suposés d'une subtilité extrême, nonobstant que le plus petit d'entr'eux ait une masse trois fois plus grosse, qu'une massule du rayon solaire. La divisibilité de la matiere à l'infini permet de donner aux particules une telle subtilité que l'on jugera convenable. Il n'y a donc point de contradiction de statuer que nos pelotons occupant toute la surface du Tourbillon, & serrés entr'eux si près que l'on voudra, ils pourront néanmoins, étant transportés sur le Soleil, trouver assés d'espace sur sa surface, pour y être situés au large, & sans se toucher les uns les autres.

SECON-

SECONDE PARTIE.

XXXIX.

APrès avoir donné une idée, ce me ſemble, aſſez intelligible de la generation de nos pelotons, qui doivent former le Torrent central, je pourſuis ma théorie, pour en déduire les cauſes des phénomènes & des faits céleſtes; je commence par expliquer la cauſe de la peſanteur. A cette fin, je ferai mes remarques ſur les groſſeurs reſpectives, & les viteſſes que peuvent acquerir les pelotons, lorſqu'ils ſont mis en mouvement par l'impulſion des maſſules qui viennent des Tourbillons du dehors. De ce que je viens d'expliquer, il eſt d'abord manifeſte que les plus petits pelotons qui forment le Torrent central, ſont compoſés pour le moins de trois maſſules, ſavoir de deux qui par leur choc direct ſe ſont mis en repos, & de la troiſieme qui leur donne l'impulſion, & vont conjointément deſcendre vers le Soleil, ne faiſant plus qu'un ſeul petit corps que j'ai nommé *peloton*, dont la commune viteſſe ſera (par les regles de la communication du mouvement pour les corps ſans reſſort) le tiers de la viteſſe d'une maſſule avant le choc.

La ſeconde ſorte de pelotons, ſont ceux qui ſont compoſés de 5 maſſules, lorſqu'après que deux ont perdu leur mouvement par le choc direct; deux autres les heurtent en même tems, & en direction opoſée, par où elles perdent auſſi leur mouvement, & ne font qu'augmenter la maſſe du peloton, qui ſera par conſéquent compoſé de 4 maſſules, & encore ſans mouvement, juſqu'à-ce que la 5me. vienne du dehors les choquer, & deſcendre enſemble comme une maſſe commune avec la 5me. partie de la viteſſe d'une maſſule. La 3me. la 4me. la 5me. ſorte de pelotons, & ainſi de ſuite, ſeront compoſés de 7 maſſules, de 9, de 11, &c. & deſcendront avec $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, &c. de la viteſſe d'une maſſule. Je ne prétends pas cependant que la formation de nos pelotons ſoit juſtement ſi réguliere, que nous venons de le

le dire ; il peut arriver qu'un des pelotons, déja mis en mouvement, en rencontre ſous lui un autre qui eſt encore en repos, ou qui a une viteſſe plus petite, auquel cas il s'en fera un peloton plus gros, qui acquerra une viteſſe ſelon la combinaiſon de la differente groſſeur & viteſſe de leur maſſe particuliere. Concevons en general un peloton de maſſe A avec la viteſſe m, qui choque ſous lui un peloton de maſſe B, qui a déja une viteſſe, mais plus petite, n; la maſſe du peloton compoſé, qui ſera $A+B$, prendra une viteſſe $=(mA+nB):(A+B)$, ſuivant les régles de la communication du mouvement pour les corps non-élaſtiques. Enfin mon but étoit de faire comprendre que le Torrent central doit être compoſé de pelotons de toutes ſortes de groſſeur & de viteſſe avec laquelle ils ſe portent vers le Soleil.

X L.

Nous pouvons prendre de tous ces pelotons de differente groſſeur & viteſſe, un d'une groſſeur & d'une viteſſe moyenne, quelle qu'elle ſoit ; par exemple, qu'il ſoit dix ou cent fois plus gros qu'une des maſſules, & qu'il ait la centieme ou la dixieme partie de la viteſſe de celle-ci : une exacte détermination de cette circonſtance n'eſt nullement néceſſaire pour mon deſſein ; c'eſt aſſez que je puiſſe concevoir l'exiſtence d'un Torrent central en forme d'un fluide, compoſé de ces pelotons, qui ſont pouſſés de haut en bas, depuis toute la ſurface du Tourbillon juſques dans le Soleil, & que ce fluide du Torrent, qui, comme nous l'avons montré, ne manque jamais de matiere, ſe précipite avec une grande rapidité.

Car quand même cette rapidité ſeroit mille fois plus petite que celle d'une ſeule maſſule, qui eſt celle de la lumiere ; cette rapidité du Torrent central ne laiſſeroit pas d'être encore très-conſiderable, puiſque ſelon ce que nous avons remarqué (§. XXXI) elle ſeroit aſſez grande pour parcourir dans le tems d'une minute la longueur d'un diametre entier de la terre. Le Torrent central avec une telle viteſſe ſera donc en état de produire un effet tout parti-

particulier sur un corps qu'il rencontre dans son chemin, & cet effet est précisément la gravitation des Planètes vers le Soleil: voici comme je conçois que la chose se fait.

XLI.

Les pores & les interstices entre les parties élementaires terrestres qui composent les Planètes, sont suffisamment larges pour laisser passer sans obstacle les files des massules qui partent du Soleil; mais après qu'à leur retour une bonne quantité de ces mêmes massules se sont accumulées en petits pelotons, qui fournissent la matiere au Torrent central, & desquels le plus petit est pour le moins trois fois plus gros qu'une massule; il est déja assés évident que les pelotons n'enfileront plus si aisément les mêmes pores des corps terrestres: d'où il arrive, que le Torrent central fait un effort continuel sur la Planète qu'il rencontre, pour la pousser en bas vers le centre commun du Tourbillon, de la même maniere qu'un courant d'eau, donnant contre un obstacle, fait pour l'entrainer un effort continuel, égal à la force avec laquelle cet obstacle résiste.

Il n'y a point d'autre difference entre ces deux actions, sinon que l'eau frape seulement les surfaces extérieures des corps qui lui résistent, au lieu que nôtre Torrent ayant des pelotons de toutes sortes de grosseur, les plus petits pénétreront jusqu'aux moindres pores, avant que de perdre leurs forces, & les imprimeront par conséquent aux moindres parties des corps terrestres, pendant que les plus gros pelotons consument leurs forces en frapant la premiere superficie de la Planète, après en avoir déja employé une partie à pénétrer, en vainquant la résistance de l'atmosphère qui envelope le corps de la Planète.

Les pelotons, qui conservent un reste de mouvement après leur passage à travers la Planète, poursuivront leur route vers le Soleil, mais ceux qui consument tout-à-fait leur force, en donnant, ou sur l'atmosphère seulement, ou sur la superficie ex-

térieure du corps de la Planète, resteroient là sans mouvement, si par la succession continuelle de la nouvelle matiere du Torrent, ils n'étoient obligés de faire place, en esquivant à côté, & de se laisser entrainer par le fluide lateral du Torrent, qui ne fait plus que friser la Planète, ou son atmosphére.

X L I I.

Je ne crois pas qu'on puisse rien prétendre de plus pour la cause de la pesanteur des Planètes vers le Soleil; l'explication courte, mais claire, que nous en avons donnée, comprend tous les éclaircissements qu'on pourroit demander sur diverses particularités & circonstances qui accompagnent la nature de cette gravitation. Car on voit 1°. que non seulement le corps de la Planète, pris dans son total, doit être pesant, mais que chacune de ses parties en son particulier le doit être aussi à proportion de sa masse, parce que la matiere du Torrent central pénétre & agit sur la Planète selon toutes ses dimensions, sur les parties intérieures aussi-bien que sur les extérieures. On s'aperçoit 2°. pourquoi les forces de la gravitation, que Mrs. les *Newtoniens* attribuent à une vertu attractrice, doivent être entr'elles en raison réciproque des quarrés des distances au Soleil, puisqu'il est évident, que les filets du Torrent se rétrecissent par les côtés, à mesure qu'ils s'aprochent du Soleil, & partant que leur densité, dont dépend l'estimation des forces absoluës, observe cette proportion, tout comme les rayons aussi produisent une lumiere dont les vivacités sont comme leur densité, c'est-à-dire, réciproquement comme les quarrés des distances du point lumineux. Il est clair 3°. que les particules élementaires des corps grossiers (j'entends les plus petites, qui sont solides & sans pores) ne reçoivent l'action de la pesanteur que par leur surface ; puisque ces particules n'ayant point de pores ne peuvent pas admettre dans leur intérieur la matiere du Torrent, qui doit les rendre pesantes.

Il me semble que cette seule consideration fait voir claire-

ment

ment la nullité de la prétenduë attraction. Car si les corps avoient de leur nature cette qualité essentielle de s'attirer l'un l'autre, il est certain que les particules élementaires seroient pesantes en raison de leur solidité, & non pas de leur surface; & qu'ainsi une même particule élementaire, à un éloignement double du corps dont il est attiré, en recevroit une force qui ne seroit pas sous-quadruple, mais sous-octuple de celle qu'elle reçoit à une distance simple; puisque la densité, ou la multitude des rayons qui partent du corps attirant, & qui saisissent la particule, devroit être estimée par la quantité de sa masse & non point de sa surface; d'où il s'ensuit que la force de cette attraction diminueroit en raison triplée comme les cubes, & point du tout comme les quarrès des distances: delà on peut démontrer aisément, que les masses entieres des Planètes n'auroient point d'autre gravitation sur le Soleil, que celle de ses particules élementaires, dont la diminution se feroit en raison des cubes des distances.

Que deviendra donc le sistème de M. NEWTON par raport à la Physique, si son fondement principal tombe en ruine? Je m'étonne que pas un de ses partisans outrés ne se soit aperçû de l'inconvénient qui résulte de l'hypothése des attractions, que l'on veut attribuer, comme une qualité essentielle, non seulement aux corps grossiers, mais aussi à leurs particules élementaires destituées de pores; ce qui ne peut subsister, ainsi que nous l'avons démontré, avec la loi suivant laquelle la gravitation des Planètes doit varier par raport aux éloignements du Soleil, pour qu'elles décrivent des orbites elliptiques autour de cet astre placé dans un de leurs foyers.

XLIII.

Il n'y a nul doute que ce que nous avons dit jusqu'à présent, sur la cause & la nature de la pesanteur des Planètes vers le centre du Soleil, ne doive être apliqué aussi aux pesanteurs particulieres, qui agissent sur les corps envelopés dans les Tour-

billons secondaires, pour les pousser vers les centres de ces Tourbillons. Car naturellement chaque Planète principale, comme, par exemple, la Terre, qui tourne sur son propre axe, sera munie d'un Tourbillon particulier, & aura dans son centre une espéce de petit Soleil, je veux dire un amas de cette matiere parfaitement liquide & bouillante, laquelle, avec les autres circonstances, doit produire en petit ce que la force du Soleil fait dans un degré beaucoup plus éminent.

Ainsi tous les corps, & même la Lune, qui sont de la dépendance du Tourbillon terrestre, seront poussés, par un Torrent central qui s'y forme, vers le centre de la Terre, avec des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés des distances. C'est donc aussi dans l'action de ces forces, que consiste la pesanteur des corps graves terrestres. Je n'en dis pas davantage, de peur d'ennuyer mon lecteur par une longue répétition de ce qui a été expliqué sur la cause generale de la pesanteur.

X L I V.

Je ne saurois m'empêcher, à cette occasion, de communiquer mes pensées sur la maniere d'expliquer la pesanteur, que l'on voit dans le petit livre de M. VILLEMOT, intitulé *Nouveau Systême, ou Nouvelle explication du Mouvement des Planètes*; où l'Auteur expose son systeme, établi aussi sur le bouillonnement d'un feu central; mais dont la nature, l'origine & les effets différent infiniment de l'idée sous laquelle je le conçois; outre qu'il le donne dans une tout autre vûë, pour en tirer les phénomènes celestes, que je ne le fais dans mon systême. On n'a qu'à lire l'un & l'autre pour en voir la différence; le seul chapitre de la pesanteur fait déja connoitre que les principes de Statique & d'Hydrostatique ne lui étoient pas assés familiers. Voici de quelle maniere il raisonne, p. 182. Après avoir suposé, que rien ne peut sortir de la matiere bouillonnante au centre de la Terre, cette matiere, selon lui, ne fait que tendre ou s'efforcer à s'en éloigner en ligne droite,

droite, sans s'en éloigner effectivement, „ mais on conçoit, *dit-il*, qu'elle pousse, ou plûtôt qu'elle presse toute la matiere voisine, & qu'ainsi elle doit pousser vers le centre les „ corps grossiers, par la même raison que l'eau tendant en bas „ fait monter le liege dont elle prend la place.

M. VILLEMOT considere cette matiere voisine, répanduë jusqu'à l'extrémité du Tourbillon, comme un fluide renfermé de toutes parts, lequel venant à être pressé par un bout, cette pression se communique d'abord à l'extremité oposée, & de-là ne pouvant aller plus loin, elle rejaillit sur le corps grossier qui s'y trouve, & l'oblige, à ce qu'il croit, de s'aprocher vers le principe de la pression: mais ne devoit-il pas voir, que par la loi d'Hydrostatique la pression se communiquant également sur toutes les parties du fluide, le corps, qui en est environné, doit soutenir une compression uniforme tout à l'entour, & sera par conséquent pressé par devant, tout autant qu'il l'est par derriere, ce qui lui fera garder un parfait équilibre. Si quelqu'autre que M. VILLEMOT eût allégué la compression prise du liege que l'eau fait monter, comme un exemple, pour expliquer la cause de la pesanteur, je dirois que ce seroit commettre le Sophisme, que l'on apelle dans les écoles *Petition de principe*; puisqu'il suposeroit que l'eau est pesante, & que le liege est moins pesant, sans expliquer la cause pourquoi l'un & l'autre est pesant. Car si on pouvoit ôter à l'eau & au liege submergé leur pesanteur naturelle, & qu'au lieu de cela on pressât de haut en bas la superficie horizontale de l'eau, on auroit beau presser, on verroit que le liege ne bougeroit pas de sa place.

XLV.

Pour en être convaincu, on n'a qu'à prendre un tuyau de verre *AB* fermé en *B*, & ouvert en *A*: qu'on le remplisse d'eau jusqu'en *P*; & qu'étant mis dans la situation horizontale, on y mette vers le milieu un petit morceau de liege *L*, qui TAB. L. *Fig.* 1.

qui puiſſe nager librement dans l'eau, ſans aucun frottement ſenſible contre le verre ; que l'on faſſe entrer par l'ouverture *A* le piſton *PC*, & qu'on preſſe fortement le cylindre d'eau *CB* de *C* vers *B*. C'eſt-là juſtement le cas de M. VILLEMOT : car la preſſion de la matiere bouillonnante eſt ici repréſentée par la preſſion du piſton *PC* ; la matiere voiſine preſſée, qui ſe termine par l'extrémité du Tourbillon, doit être comparée au cylindre d'eau *PB*, dont la preſſion ſe termine en *B* ; le corps groſſier, dont il veut expliquer la peſanteur, ſe repréſente par le morceau de liege *L* : donc ſi ſon explication avoit lieu, il faudroit que par l'effort du piſton *PC*, le liege *L* s'en aprochât, & vint à s'y joindre. Mais la ſaine Hydroſtatique m'aprend, ſans en faire l'expérience, qu'avec la plus grande force du piſton que le tuyau puiſſe ſoûtenir, on ne déplacera jamais le morceau de liege *L*, bien loin de le faire aprocher du piſton *PC*.

Ainſi l'explication donnée par M. VILLEMOT ſur la cauſe de la peſanteur, n'eſt qu'une pure illuſion, auſſi évidente que celle qui ſe trouve à la page 186 de ſon livre, où, pour prouver que la Terre eſt plus élevée vers l'équateur que vers les poles, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt un Sphéroïde aplati, il recourt à l'obſervation de M. CASSINI, qui a obſervé que les degrés de la Terre diminuent en allant de l'équinoxiale vers les poles : car cette obſervation ſupoſée exacte, comme il n'en faut pas douter, prouve juſtement le contraire, ſavoir que la figure de la Terre doit être un Sphéroïde allongé : la raiſon en eſt, parce que les meridiens d'un tel Sphéroïde ont leur plus grande courbure aux poles, ce qui fait que les degrés de latitude diminuent à meſure qu'ils s'éloignent de l'équinoxiale ; au lieu que dans un Sphéroïde aplati, par une raiſon contraire, leur plus grande courbure, ſe trouvant où les meridiens croiſent l'équateur, y racourcit le plus ſenſiblement la longueur des degrés, qui enſuite s'allongent en allant vers les poles. La ſavante Diſſertation ſur ces deux ſortes de Sphéroïdes, publiée par M. DE MAIRAN dans les Mémoires de 1720, mérite d'être lûë,

lüë, parce qu'elle contient des raisonnements solides touchant la figure de la Terre.

XLVI.

Quoi qu'il en soit, il faut avouer qu'une simple pression, telle que M. VILLEMOT l'a imaginée, n'est point du tout propre à en tirer la cause de la pesanteur ; & comme nous avons déja vû (§. IX) que les Tourbillons conçûs à la maniere de M. HUGUENS, desquels il fait mouvoir la matiere sur des surfaces sphériques en tout sens, ne pourroient pas subsister, parce que leurs particules s'entre-choquant, & n'étant point élastiques, s'arrêteroient mutuellement; d'où il arriveroit dans peu, que toute la matiere d'un Tourbillon de cette nature se changeroit en une masse immobile.

D'ailleurs le Tourbillon fait selon l'idée de M. DESCARTES, que nous adoptons aussi, mais pour un autre usage (comme nous le verrons) que pour causer la pesanteur par la force centrifuge de sa matiere, prévalente à celle des corps terrestres ; ce Tourbillon, dis-je, n'étant point du tout suffisant pour expliquer les proprietés de la pesanteur, puisque les corps grossiers devroient être chassés, non point au centre, mais perpendiculairement à l'axe du Tourbillon; outre plusieurs autres inconvénients qui résultent de cette hypothése, dont nous avons indiqué quelques-uns (§. VI & VII); l'unique remède, qui reste, pour avoir une idée generale de la cause de la pesanteur, & de toutes ses proprietés, à moins qu'on ne veuille recourir aux attractions de M. NEWTON, c'est d'admettre nôtre Torrent central, par lequel on explique si naturellement & si intelligiblement tout ce qu'il a voulu expliquer par ses attractions, & bien davantage; ainsi qu'on le verra bien-tôt, par la raison que je rendrai de la rotation des Planètes principales autour de leur axe, où il paroitra très-clairement que cette rotation (difficile à expliquer par le systême de NEWTON) n'est qu'une suite de l'action du Torrent sur la Planète.

XLVII.

XLVII.

Je vais donc contempler de plus près les Tourbillons de DESCARTES, afin de tirer de leur nature ce qui sert principalement à perfectionner ma théorie. J'ai déja dit au commencement de ce discours, qu'un Tourbillon celeste est 1°. un amas ou une quantité prodigieuse de matiere parfaitement liquide, qui ne fait point de résistance aux corps qui s'y meuvent; 2°. que cette matiere, quoique de la même nature que celle du Soleil, n'a pas ce bouillonnement excessif dont celle-ci est agitée; mais 3°. qu'elle tourne d'un mouvement tranquille autour du Soleil, avec une vitesse que je déterminerai; 4°. que ce Tourbillon de matiere parfaitement liquide, charrie avec lui une multitude infinie de particules du second élement, que je veux bien nommer avec M. DESCARTES *globules celestes*, sans s'entre-toucher pourtant, comme il les a conçûs, mais separés & dispersés, laissant entr'eux des intervalles, si vous voulez, cent ou mille fois plus grand que le diamétre d'un globule; je fais cette supposition dans cette seule vûë, que l'on puisse concevoir, comment les massules des rayons & les pelotons du Torrent passent à travers des distances immenses, fort librement, sans rencontrer de fréquents obstacles, en heurtant contre des globules celestes, & que s'ils en rencontrent par-ci par-là, ils les écartent facilement par la rapidité de leur mouvement, & rendent le passage libre à ceux qui les suivent de près.

XLVIII.

Pour ce qui est de la vitesse avec laquelle le Tourbillon doit tourner autour du Soleil, on a démontré ailleurs que la vitesse (quelle qu'elle soit) des parties du Tourbillon, sous son équateur, doit être à peu près réciproquement proportionnelle à la racine quarrée de leurs éloignements du centre du Soleil; d'où dépend la regle de KEPLER, qui veut que leurs temps périodi-

riodiques soient en raison sesquipliquée de ces mêmes éloignements. Mais pour avoir une idée distincte de la vitesse actuelle à chaque distance, je fais cette réflexion: le mouvement de circulation de la masse du Soleil, & celui de son Tourbillon, se faisant en même sens, savoir d'Occident en Orient, il n'y a pas lieu de douter que ces deux mouvements ne viennent d'un même principe, en sorte que l'un doit être la regle de l'autre. Or la vitesse d'un point de l'équateur du Soleil est telle, qu'il acheve sa circulation autour du centre en 25 ½ jours, ce qu'on connoit par le mouvement des taches solaires. Donc concevant le Tourbillon divisé en une infinité de couches concentriques d'une épaisseur infiniment petite, il faut que la premiere couche contiguë à la surface du Soleil, ait la même vitesse, c'est-à-dire qu'elle fasse sa rotation conjointément avec le Soleil; car quelle raison auroit-on de lui donner une vitesse differente & beaucoup plus grande, sans forger un nouveau principe de mouvement de circulation, indépendant de celui du Soleil? & que pourroit-on imaginer de capable d'entretenir cette grande diversité de mouvements entre deux fluides, qui se touchent immédiatement, sans qu'ils se confondent enfin en un mouvement commun?

Suposons donc comme une chose raisonnable, que la premiere & plus basse couche fasse sa circulation avec le Soleil en 25 ½ jours; pour en tirer la vitesse réelle d'une autre couche, par exemple, de celle qui a pour demi-diametre la distance moyenne de la Terre au centre du Soleil, que l'on compte ordinairement de 22000 demi-diametres de la Terre; le demi-diametre du Soleil contenant 100 demi-diametres terrestres, il faut faire en vertu de la regle de KEPLER (car on a demontré dans une autre occasion, que le Tourbillon a la proprieté, que les vitesses réelles de differentes couches sont à peu près reciproquement proportionnelles à la racine quarrée de leurs distances au centre, & non pas aux simples distances, comme quelques-uns l'ont avancé) il faut faire, dis-je, cette analogie; comme $\sqrt{22000}$ est à $\sqrt{100}$, ainsi la vitesse d'un point de l'équa-

teur solaire, que je nomme *V*, est à la vitesse de l'équateur de la couche, pour la distance moyenne de la Terre: mais on a à fort peu près $\sqrt{22000}. \sqrt{100} = 150. \ 10 = 15. \ 1$; Donc la vitesse de l'équateur de cette couche $= \frac{}{15} V$, c'est-à-dire 15 fois plus petite que celle de l'équateur du Soleil, de sorte qu'il lui faut 15 fois $25\frac{1}{2}$, ou $382\frac{1}{2}$ jours, pour parcourir un arc égal en longueur à la periphérie du Soleil; cet arc est donc contenu dans toute sa circonference autant de fois que le demi-diametre du Soleil est contenu dans le demi-diametre de la couche, c'est-à-dire 220 fois; ainsi il faut prendre $382\frac{1}{2}$ jours 220 fois, & nous aurons 84150 jours, ce qui fait 230 années & 143 jours, pour le temps d'une revolution entiere de la matiere du Tourbillon à la distance moyenne de la Terre au Soleil.

Ce calcul apliqué à toutes les Planètes, on trouvera les temps périodiques de la matiere du Tourbillon pour la distance moyenne de chacune; voici le résultat de mon calcul, en négligeant les jours à ajouter:

Pour Saturne.............	6744. années.
Jupiter..............	2715.
Mars...............	428.
Terre..............	230.
Venus.............	140.
Mercure...........	54.

La conclusion que j'en tire, est que chaque Planète a son mouvement moyen sur son orbite plus de 230 fois plus vite que n'est la vitesse avec laquelle circule la matiere du Tourbillon dans la région moyenne où se trouve la Planète: voici maintenant les remarques que je fais là-dessus.

X L I X.

Le principe du mouvement des Planètes autour du Soleil ne vient pas de celui de la matiere du Tourbillon qui l'emporte, comme l'eau d'une riviere emporte un tronc d'arbre, selon le sentiment

timent de DESCARTES; car la Planète se laissant entrainer par le courant du Tourbillon, ne pourroit acquerir tout au plus que la vitesse du fluide où elle nage, comme je l'ai déja dit.

Il faut donc que la grande vitesse, avec laquelle les Planètes circulent autour du Soleil, ait un autre principe; c'est pourquoi je ne fais point de difficulté de statuer ici, avec M. NEWTON, que cette vitesse est primitive, qui leur a été imprimée dès le commencement de leur formation. Cette vitesse dure encore aujourd'hui, & durera sans doute jusqu'à la fin du monde, sans que la résistance de la matiere du Tourbillon puisse lui causer le moindre retardement sensible : car la plus grande partie de cette matiere, étant parfaitement liquide, ne résiste pas, & les globules célestes, qui y nagent fort au large, sont encore d'une petitesse & d'une rareté, plus que suffisante, pour que leur choc contre les corps d'une grosseur énorme, comme sont ceux des Planètes, ne puisse rien gagner sur eux, ni retarder leur mouvement d'une maniere sensible, durant le cours de plusieurs centaines de siécles.

On peut donc considerer sûrement les Planètes, comme si elles se mouvoient dans un vuide parfait, tel que M. NEWTON l'a supposé, quoique véritablement tout soit rempli de matiere.

L.

Par-là nous ne tombons pas dans l'embarras, où se trouvoit M. NEWTON, à l'occasion de la régularité du mouvement de toutes les Planètes, qui se fait suivant la commune direction d'Occident en Orient. M. DE MAIRAN dit très-judicieusement dans les Mémoires de 1729, qu'on est fondé à demander raison de ce mouvement commun des Planètes d'Occident en Orient dans le systême de NEWTON; cette uniformité n'étant nullement requise, là où il y a un grand vuide, qui permettoit aux corps celestes de se mouvoir en tout sens, savoir à chacun selon sa propre direction, comme il arrive actuellement aux Cometes qui suivent leurs routes particulieres. On en a même observé, qui faisoient leurs cours contre l'ordre des signes.

Qq 2 Cette

Cette régularité, dis-je, du mouvement des Planètes sous le Zodiaque a tellement réduit à l'étroit M. NEWTON, qu'il fut obligé d'avouer ingénûment, que, dans son systême, on ne peut point donner de raison physique de ce phénomène, qu'il regarde presque comme un miracle; voici comme il s'exprime sur cet article (pag. 527. Princ. phil. edit. 3.) *Feruntur*, dit-il, *cometæ motibus valde excentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest nisi vortices tollantur; perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hasce minime potuerunt planetæ & cometæ.* Hi motus regulares (*planetarum*) originem non habent ex causis mechanicis.

Si ces causes ne sont pas méchaniques, elles ne sont donc pas naturelles ou physiques; il prétend donc qu'elles soient surnaturelles ou miraculeuses: mais sied-il bien à un grand Philosophe de crier au miracle, quand il s'agit de donner l'explication d'un phénomène que la nature nous présente.

L I.

Par la théorie que je viens d'établir, on trouve un expédient assés facile, pour montrer la cause de ladite régularité du mouvement des Planètes, & de l'irregularité de celui des Cometes. Car quant au premier point, suposons que les Planètes commencent d'exister, chacune avec sa direction & vitesse particuliere, selon que le hazard l'a voulu; qu'en arrivera-t-il? Je vois d'abord, que chacune poussée par le Torrent central vers le Soleil, pendant que sa vitesse primitivement acquise la transporte au travers d'une colomne du Torrent à l'autre, elle sera obligée de décrire une ligne courbe, plus ou moins éloignée du Soleil, selon que la direction & la vitesse primitivement imprimée le demande, afin que la force centrifuge, qui dépend de la courbure & de la vitesse, puisse contre-balancer l'effort central du Torrent, derivé perpendiculairement sur la courbe; lors donc que la Planète est parvenue dans cet état d'équilibre, elle continuera

tinuera en vertu du principe de Statique, de décrire toûjours la même courbe, ſavoir ſon orbite autour du Soleil.

Mais les forces centripétes, qui ſont, dans ma théorie, les preſſions du Torrent central, étant en raiſon réciproque du quarré des diſtances au Soleil, il eſt viſible, par la démonſtration indirecte de M. NEWTON, & par celle qu'on en a donnée enſuite *apriori*, que cette orbite doit être une Ellipſe, dont un des foyers eſt dans le centre du Soleil. Nous avons donc autant de differentes orbites elliptiques, dont les plans paſſent néceſſairement par le centre du Soleil, qu'il y a de Planètes principales.

Cependant, juſqu'ici, nous ne voyons pas encore, pourquoi tous ces plans ſont reſſerrés ou renfermés entre deux plans paralleles, qui terminent dans le firmament une zone peu large, qu'on apelle le Zodiaque, partagée en deux ſelon la largeur par un troiſiéme plan, qui eſt celui de l'Ecliptique ou de l'orbite de la Terre; & pourquoi le mouvement de toutes les Planètes, qui décrivent leurs orbes elliptiques ſur ces plans, eſt dirigé régulierement d'Occident en Orient, & pas un en ſens contraire; je parle du mouvement réel, & non point de l'apparent, qui eſt quelquefois retrograde.

LII.

Voici ma penſée là-deſſus. S'il n'y avoit point de Tourbillon, je veux dire, ſi toute la matiere, qui remplit cette vaſte étenduë autour du Soleil bien loin au de-là de Saturne, n'avoit point de mouvement de circulation, je tiens pour inconteſtable, que les directions des Planètes ſeroient encore comme au commencement purement fortuites, & ſans aucune régularité, en ſorte que les plans de leurs orbes couperoient le firmament en de grands cercles, qui ſeroient ſitués ſans ordre par raport aux plages du Monde, de même que cela s'obſerve encore aujourd'hui dans le mouvement des Cometes, dont preſque chacune a ſa direction particuliere, par la raiſon que je dirai ci-après.

Mais puisqu'il y a un Tourbillon, quoique fort tardif & fort foible, il aura eu, quelque foible qu'il soit, assés de force pour changer peu à peu la direction de la Planète, sans alterer sensiblement sa vitesse, jusqu'à ce que cette direction soit devenuë à peu près conforme à la direction du Tourbillon, qui va d'Occident en Orient : je dis *à peu près*, pour marquer qu'il y a une cause, que j'expliquerai, qui empêche l'entiere conformité de direction; c'est justement en quoi consiste le nœud de la question proposée, pour le dénouement duquel il m'a fallu faire tout ce discours, afin de faire voir la connexion des phénomènes, qui découlent si naturellement des principes de mon système.

L I I I.

On voit donc déja, par quelle raison les Planètes ont pû changer leurs directions, primitivement irrégulieres, en direction réguliere & commune d'Occident en Orient, qui est celle du Soleil sur son axe, & aussi celle de son Tourbillon: on m'objectera peut-être, que j'ai ôté à la matiere du Tourbillon toute force sensible de résister au mouvement des Planètes, pendant que je lui en accorde assés pour en changer les directions; mais on levera cette difficulté, si on daigne faire cette réflexion; qu'il faut incomparablement plus de force, pour augmenter ou diminuer la vitesse d'un corps qui est déja en mouvement, que pour en changer seulement la direction. Nous voyons, par exemple, qu'une fusée, qui vole tout droit dans les airs avec beaucoup de vitesse, change considerablement de direction, par le moindre vent qui souffle, sans une perte sensible de sa vitesse : aussi voyons-nous qu'une bale de plomb, chassée avec une extrême rapidité par la force de la poudre, ne laisse pas, malgré toute sa densité, d'être détournée de sa direction, par un petit vent, à peine sensible, qui vient de côté.

Ce qui rend cette explication plus probable, c'est justement l'irrégularité des directions des Cometes, qu'elles ont pû garder depuis leur origine jusqu'à nos temps; tant s'en faut que cette irré-

irrégularité serve d'argument pour détruire le systême des Tourbillons, comme M. NEWTON l'a voulu insinuer à l'endroit cité; voici de quelle maniere j'en prouve le contraire. Comme les orbites des Cometes sont des Ellipses extrémement longues en comparaison de leur largeur, ayant le Soleil dans leur foyer, quasi infiniment plus près du perihélie que de l'aphélie, selon le sentiment même de M. NEWTON; il faut que le temps que la Comete employe à parcourir la partie superieure de son orbite allongée, qui s'étend à une énorme distance au-dessus de Saturne, soit de beaucoup plus grand que le reste du temps périodique, qu'elle employe à passer par la région des Planètes, & qui ne peut qu'être fort court, tant à cause de la grande vitesse que la Comete acquiert en aprochant du perihélie, qu'à cause de la petitesse du chemin à parcourir dans la basse région, par raport à l'extréme longueur de la partie superieure, où il faut passer par l'aphélie avec un mouvement très-tardif. Puis donc que dans ces grands éloignements du Soleil, les circulations du Tourbillon doivent être si lentes, que sa matiere peut bien être considerée comme immobile, elle ne fera par conséquent point d'effet sensible pour changer la direction de la Comete, pendant tout le temps qu'elle séjourne dans ces endroits si élevés: mais le séjour qu'elle fait dans nôtre voisinage est trop court, pour se laisser détourner beaucoup de sa route par la circulation du Tourbillon.

LIV.

Cela étant, il n'y a pas lieu de s'étonner, qu'on n'observe pas dans le cours des Cometes cette régularité de direction, qui se voit dans celui des Planètes; c'est plûtôt une conséquence naturelle de nôtre théorie, que chaque Comete doit suivre sa route particuliere, que le cas fortuit lui a assignée dans le premier commencement, sans aucune alteration perceptible. Si le Monde eût déja duré quelques milles siécles, ou qu'il durât encore autant, pour permettre aux Cometes de parachever plusieurs centaines de révolutions, je ne doute pas que leur direction ne s'accommodât

modât enfin auſſi, peu à peu, à ſuivre le zodiaque d'Occident en Orient.

La fameuſe Comete de 1680, dont M. NEWTON fait la deſcription avec beaucoup d'exactitude, ſe trouva dans ſon perihélie le 8 Decembre, ſelon ſon calcul, laiſſant un ſi petit intervalle entr'elle & le Soleil, qu'à peine la ſixieme partie du diamétre du Soleil eût pû être miſe entre deux : cependant le 5 Janvier ſuivant, c'eſt-à-dire, en moins de 30 jours elle étoit déja hors de la région du grand orbe, & après le 5 Mars elle diſparut, en allant s'enfoncer dans les plus hautes régions du Tourbillon, où elle paſſera 575 années (ſuivant la ſupputation de M. HALLEY), avant que de redeſcendre dans nos quartiers, où pareillement elle ne reſtera viſible que 5 ou 6 mois: elle ſera donc pour le moins 574 années, ſans ſouffrir la moindre alteration ſenſible dans ſa direction de la part du Tourbillon, ni dans l'inclinaiſon de ſon orbite ſur le plan de l'écliptique, laquelle inclinaiſon eſt, ſelon le même M. HALLEY, de 60 degr. 56 min. & les 6 mois, ou, ſi on veut, le double, qu'elle eſt à paſſer par les régions planètaires, ne ſont pas à beaucoup près ſuffiſants, pour que la force du Tourbillon circulant puiſſe la troubler dans ſa direction, à moins que ce ne ſoit l'atmoſphére du Soleil, par laquelle cette Comete paſſe en allant vers ſon perihélie (comme le croit M. NEWTON), qui y puiſſe aporter quelque petit changement; mais ce n'eſt pas de quoi il s'agit ici.

Enfin les Planètes, qui ne ſortent jamais des régions où elles ſont ſans ceſſe expoſées à l'action du Tourbillon, qui tend à rendre par petits degrés leur direction uniforme, quand elle ne l'eſt pas déja, que ſait-on ſi, d'abord après leur création, il ne falloit pas des ſiécles entiers pour leur procurer cette uniformité permanente, à laquelle nous les voyons aujourdhui reduites? N'eſt-il donc pas probable, que l'unique raiſon, pourquoi les directions des Cometes ſont ſi irrégulieres, eſt, parce que ſe trouvant la plus grande partie du temps de leur révolution hors de cette action du Tourbillon, il s'en faut beaucoup qu'il n'y ait eû aſſés

assés de temps pour conformer leurs directions à la regularité de celles des Planètes? & cela d'autant plus, que les Cometes, qui descendent plus souvent vers nous, c'est-à-dire, qui achevent leur révolution en moins de temps, ne paroissent pas entierement exemptes de l'effet que la circulation du Tourbillon peut faire sur elles, en ce que les plans de leurs orbites aprochent plus de celui de l'équateur du Tourbillon, que ne font ceux des Cometes, dont les revolutions sont d'une durée excessive. Il y a effectivement une Comete, que M. HALLEY croit être la même qui parut dans les années 1531, 1607, 1682, & qui, selon lui, avoit aussi paru l'an 1456, & reparoitra l'an 1758, laquelle par conséquent n'employe que $75\frac{1}{2}$ années pour parcourir sa periode; cette Comete, dis-je, a son orbite inclinée seulement de 17. degr. 56. min. sur le plan de l'écliptique, suivant la remarque de M. HALLEY; au lieu que l'inclinaison de l'orbite de la Comete de 1680 sur l'écliptique, est, comme nous avons vû, de plus de 60 degrés. Il est vrai que la difference de ces inclinaisons peut provenir du hazard des directions primitives, mais rien n'empêche que la cause alleguée n'y puisse avoir aussi sa part. Le meilleur moyen de s'en assûrer seroit, que les Astronomes, qui viendront après nous, observassent, à chaque retour, la Comete qui doit reparoitre en 1758, si tant est qu'elle revienne tous les $75\frac{1}{2}$ ans, pour voir si l'angle du plan de son orbite avec celui de l'écliptique, ou plûtôt avec le plan de l'équateur solaire, ne diminuëra pas peu à peu, après plusieurs de ses révolutions. Si cela arrivoit, ma conjecture deviendroit une vérité certaine.

TROISIEME PARTIE.

L V.

AVANT que d'entrer dans le point essentiel du sujet de la Question, il reste encore à examiner un des plus importants phénomènes: c'est le mouvement diurne des Planètes principales,

 ou

ou la rotation sur leur axe, dont j'entreprends d'expliquer la cause physique par les principes établis de ma théorie; je le fais d'autant plus volontiers, que je n'ai point lû d'Auteur qui m'ait donné là-dessus une entiere satisfaction. M. VILLEMOT, dans son Traité (chap. 1. part. 2.) croit, de ce que la Terre est emportée par le Tourbillon, & se meut moins vite par le bas de son globe que la matiere du Tourbillon, mais plus vite par le haut, que le fluide reflue (comme il dit) d'un hémisphère à l'autre, d'où il prétend prouver que la Terre doit tourner sur son axe d'Occident en Orient, comme fait le Tourbillon lui-même.

M. DE LA HIRE lui a fort bien objecté, que selon ce principe, la Terre devoit tourner dans un sens contraire; l'Auteur lui a voulu répondre par un éclaircissement, que l'on voit à la fin de son Traité; mais il n'y a pas assés de solidité dans sa réponse, & la difficulté subsiste toûjours.

J'ai lû dans les Mémoires de l'Académie de 1729, une piece excellente, de la façon de M. DE MAIRAN, où il rejette aussi l'explication de M. VILLEMOT, & lui substitue la sienne, qui est à la vérité très-ingénieuse. Il déduit la cause de la rotation des Planètes d'Occident en Orient, de ce que l'hémisphère inférieur de la Planète doit être plus pesant que le supérieur, par cela seul, que celui-ci est plus éloigné du Soleil que celui-là; d'où il conclud, que l'impulsion du fluide contre l'hémisphère supérieur, comme le moins pesant, devoit avoir plus d'effet pour l'entrainer, que celle sur l'hémisphère inférieur, qui ayant plus de poids, a aussi plus d'inertie pour résister. Or les deux hémisphéres inégalement pesants, ne l'étant pas constamment par leur nature, mais par leur position seule; il est visible que l'inférieur, qui est le plus pesant, quand il monte perd son avantage, & devient le plus leger, & au contraire, le supérieur en descendant prend cet avantage de devenir le plus pesant du plus leger qu'il étoit. De cette maniere le fluide du Tourbillon ayant une fois ébranlé le supérieur avec plus d'efficace que l'inférieur, cette action se renouvellant toûjours, il falloit que le supérieur se précipitant en avant, c'est-à-dire, d'Occident en Orient,

Orient, fit enfin tourner par degrés la Planète ſur ſon axe, juſqu'à-ce que la rotation eût pris une viteſſe conſtante, qui dure encore aujourd'hui.

Mais quelque déference que j'aye pour les ſentiments de l'illuſtre Auteur de cette explication, je dois dire, que j'ai de fortes raiſons, que le temps ne me permet pas d'expoſer tout au long, de douter que la rotation des Planètes puiſſe être l'effet de l'inégalité perpétuelle de peſanteur des deux hémiſphères; car, ſans rien dire des autres difficultés qui ſe preſentent contre cette conjecture ſi ſubtilement imaginée, il me ſemble que l'inégalité de peſanteur des hémiſphères eſt trop inſenſible pour produire un effet ſi conſiderable, tel que ſeroit la grande viteſſe de rotation imprimée à la prodigieuſe maſſe de Jupiter, pour lui faire faire une révolution entiere ſur ſon axe en moins de dix heures. Si on veut prendre la peine de faire le calcul, on trouvera que cette viteſſe du mouvement diurne d'un point pris ſur l'équateur de Jupiter, eſt preſque égale à la viteſſe du mouvement annuel de cette Planète autour du Soleil; par conſéquent auſſi preſque égale à la viteſſe même du fluide du Tourbillon, qui l'emporte, ſuivant le ſens du ſyſtème de M. DESCARTES; il faudroit donc que l'impulſion faite par le fluide ſur l'hémiſphère inférieur, ſans doute contraire à la rotation, ne l'eût ou point retardé, ou fort peu, de ſorte que toute la force du fluide eût été uniquement employée à la rotation, ſans rien contribuer, ni à pouſſer l'hémiſphère inferieur, ni à tranſporter tout le corps planètaire ſur ſon orbite; cependant il s'y meut librement d'un mouvement progreſſif, & tourne en même temps ſur ſon axe; comment accorder tout cela?

LVI.

Voyons s'il n'y auroit pas moyen de s'en éclaircir par quelque expérience, qui nous mit devant les yeux l'effet que pourroit produire l'action d'un fluide à faire tourner un corps ſphérique qui y nage; & dont la partie inférieure fût, par ſa poſition ſeule, conſtamment plus peſante que la ſuperieure.

Pour cette fin on prendra, une boule creuſe d'une matiere moins peſante que l'eau, par exemple, de bois: on y verſera par une petite ouverture une liqueur plus peſante, par exemple, du vif-argent, autant qu'il en faut pour donner à la boule, avec le vif-argent au dedans, un poids preſque égal à celui d'un volume d'eau, que la boule entierement enfoncée y occuperoit, afin que la boule ainſi chargée de vif-argent, miſe dans l'eau, s'y plonge juſqu'au niveau, ſans pourtant deſcendre au fond. Cela fait, & après avoir bouché le trou par lequel on a fait entrer le vif-argent, on ſe choiſira une riviere dont le courant ſoit uniforme, & la ſurface bien unie comme la glace d'un miroir; on y plongera doucement la boule juſqu'à ſon ſommet: voilà donc la boule dans un état ſemblable à celui que M. de MAIRAN attribuë aux Planètes, quand elles ont commencé d'être emportées par le fluide du Tourbillon.

Car l'hémiſphère inférieur de nôtre boule, chargé de vif-argent, eſt auſſi conſtamment, & par la poſition ſeule, plus peſant que l'hémiſphère ſupérieur; en ſorte qu'elle peut tourner ſur ſon axe, & avoir néanmoins l'hémiſphère d'enbas toûjours plus peſant que celui d'enhaut, tout comme le ſavant Auteur le conçoit dans les Planètes; avec cette ſeule difference, qu'au lieu que dans les Planètes l'inégalité de peſanteur des hémiſphères eſt quaſi infiniment petite, ici, dans nôtre boule, on peut faire cette inégalité auſſi ſenſible que l'on voudra & ce qui plus eſt, la viteſſe de l'eau, qui donne contre l'hémiſphère ſupérieur de la boule, eſt pour le moins auſſi grande, ſi elle n'eſt pas plus grande, que celle avec laquelle eſt frapé l'hémiſphère inférieur; au lieu que, dans le Tourbillon, la premiere eſt plus petite que l'autre; d'où il devroit réſulter par cette double cauſe une rotation bien prompte dans la boule: cependant je ſerai bien ſurpris, quand j'aprendrai (car je n'ai pas fait cette expérience) que la boule venant à être prolongée dans le courant de la riviére, & abandonnée à elle-même, aura fait autre choſe que ſuivre ſimplement le mouvement progreſſif de l'eau qui l'entraine, ſans ſubir la moindre rotation.

LVII.

LVII.

Croyant avoir de bonnes raiſons de prévoir quel ſera le ſuccès de cette expérience, je puis m'être trompé, ce qui eſt très-facile en fait de Phyſique, auquel cas je déclare que j'adopterai volontiers l'explication ingénieuſe de M. DE MAIRAN. En attendant que je ſois convaincu d'un ſuccès contraire, il me ſera permis de dire à mon Lecteur, que j'ai cherché ailleurs la cauſe du mouvement diurne des Planètes, & que je crois l'avoir trouvée dans nôtre Torrent central; voici comment. Je conſidere d'abord la Planète, comme n'ayant point encore de mouvement progreſſif ſur ſon orbe; dans cet état, je vois que le Torrent la pouſſe de toute ſa force en ligne droite vers le Soleil, avec une accéleration, que doit produire la preſſion du Torrent, qui eſt réciproquement proportionnelle aux quarrés des diſtances au Soleil: Je vois auſſi que durant la deſcente, la Planète ne tournera nullement ſur ſon centre, non plus qu'une pierre ſphérique qui tombe verticalement ſans pirouetter; parce que la preſſion du Torrent ſe répandant également ſur toutes les parties de la Planète, les retiendra en équilibre, & donnera le parallèliſme à leur mouvement.

Mais s'il ſurvient à la Planète une viteſſe laterale, primitivement imprimée, qui lui fait décrire ſon orbe elliptique, de la maniere que nous l'avons expliqué ci-deſſus; alors l'équilibre & le parallèliſme du mouvement des parties ne peut plus ſe ſoûtenir: la raiſon en eſt manifeſte; car il eſt très-clair que les parties antérieures de la Planète, qui ſe trouvent du côté où elle tend, vont en quelque façon au devant & à la rencontre des filets du Torrent que la Planète eſt prête à traverſer, au lieu que les parties de l'autre côté fuyent en quelque maniere ceux des filets qu'elles vont quitter; ce qui fait que la Planète eſt frapée ſur le devant avec plus de force que ſur le dos. Il faut donc que le côté antérieur cede au Torrent, c'eſt-à-dire, qu'il deſcende, & que le côté poſtérieur monte contre l'action du Torrent; & cela continuant toûjours, la Planète à meſure qu'elle avance ſur ſon

orbe, eſt obligée de pirouetter avec une viteſſe proportionnée à cet excès de force. On voit donc d'abord, ſans l'expliquer davantage, que ces deux mouvements, le diurne & l'annuel, doivent ſe faire en même ſens, ſavoir d'Occident en Orient.

LVIII.

Ceci bien entendu, on ne doit pas s'imaginer que ce ſoit ſeulement la ſurface extrême de la Planète, dont la partie ſupérieure ſouffre une plus forte impulſion par devant que par derriere: mais la même choſe arrive à toutes les couches parallèles autour du centre, dont on conçoit compoſé le corps planètaire, parce que les pelotons du Torrent étant de toutes ſortes de grandeur (§. XXXIX), il y en aura toûjours, qui après avoir pénétré les pores des couches les plus éloignées du centre, tomberont ſur une qui a aſſez de denſité, par conſéquent ſes pores aſſez étroits, pour ne leur pas donner le paſſage libre; en ſorte que cette autre couche doit, auſſi bien que la premiere, ſoûtenir l'impulſion du Torrent, & par la raiſon alleguée, une impulſion plus forte ſur la partie qui va devant, que ſur celle qui ſuit.

Il faut même étendre cette explication juſqu'aux couches extérieures, qui environnent le corps de la Planète, je parle de celles qui doivent compoſer ſon Tourbillon particulier, & qui ſeront ſans doute frapées par les plus gros pelotons du Torrent. Par où on voit, non ſeulement pourquoi le Tourbillon particulier doit avoir la même direction, pour tourner d'Occident en Orient, qu'a le Tourbillon general; mais que toutes ces couches, tant de la Planète que de ſon Tourbillon, s'entr'aident à ſuivre cette commune direction, chacune contribuant de ſa part à la rotation, par la prévalente impulſion qu'elle reçoit ſur le devant.

Cette force du Torrent central, qui frape avec plus d'énergie la partie antérieure de la Planète & de ſon Tourbillon particulier, pour lui procurer la rotation, peut fort bien être comparée à la force de l'eau d'une cataracte, laquelle ſe précipitant ſur les

les aîles d'une rouë de moulin la fait tourner sur son axe ; car quand même, à l'oposite de cette cataracte, il y en auroit une autre, mais moins forte, tombant sur les aîles diametralement oposées, celle-ci feroit à la vérité un effort sur la rouë pour la faire tourner à contre-sens ; mais la premiere, l'emportant sur l'autre, ne laisseroit pas de faire pirouetter la rouë de son côté, quoiqu'avec moins de vitesse qu'elle ne feroit sans son antagoniste.

L I X.

Dans cette nouvelle théorie, je regarde la Planète comme ayant déja acquis, par la longueur du temps, la commune direction permanente du grand Tourbillon solaire, de la maniere dont je l'ai expliqué ci-dessus. Car il est bien vrai, que pendant ce temps-là elle étoit déja contrainte, en passant continuellement à travers le Torrent, de pirouetter; mais, à cause de l'irrégularité de sa route, l'axe de sa rotation a dû changer à tout moment de situation dans le globe, jusqu'à ce qu'enfin se conformant avec la direction du Tourbillon general, la situation de l'axe se fixât. Quant à la vitesse du mouvement de rotation, on s'aperçoit bien qu'elle ne dépend pas seulement de la rapidité, ou de la force, avec laquelle le Torrent central agit sur la Planète, & sur son Tourbillon particulier, mais de plusieurs autres circonstances ; comme, par exemple, de la densité de la matiere dont le corps planetaire est composé, puisqu'il est notoire, toutes choses d'ailleurs étant égales, qu'un corps plus dense est plus difficile à remuer, à cause de sa plus grande inertie, qu'un corps moins dense ; item, de l'éloignement du Soleil, car dans une plus grande distance les filets du Torrent ont plus de rareté, par conséquent moins de force pour faire tourner la Planète, en même raison que la pesanteur est plus petite que dans une moindre distance ; aussi la differente grosseur des Planètes peut faire varier la vitesse de la rotation, non pas tant parce que le Torrent a plus de prise sur les grandes couches, à cause de leurs plus grandes surfaces, que parce que la même force, étant apliquée à la circonference d'une

d'une grande rouë, fait plus d'effet qu'étant apliquée à celle d'une plus petite. Ajoutez y l'obliquité de l'axe de rotation, par raport à la direction du Torrent ; cette obliquité devant nécessairement diminuer l'action du Torrent pour faire tourner la Planète autour de son axe.

La complication de toutes ces causes peut faire, que la rotation se fait plus ou moins vite, que n'exigeroit la distance de la Planète au Soleil, selon que les unes ou les autres de ces causes sont les prévalentes.

L X.

Ainsi Jupiter, qui est environ 5 fois plus éloigné du Soleil que la Terre, & partant la force du Torrent dans cette région 25 fois plus foible qu'elle n'est dans la région de la Terre, néanmoins Jupiter acheve une de ses rotations en dix heures de temps, au lieu que la Terre a besoin de plus du double de ce temps pour une seule révolution sur son centre: la raison en est manifeste par ces trois circonstances : 1°. l'équateur de Jupiter représente une rouë dont le diametre est 10 fois plus grand que celui de la Terre ; donc si ces deux corps n'étoient que des disques plats de même épaisseur, il y auroit par la nature du levier, dix fois plus de facilité à faire tourner Jupiter que la Terre. Mais puisque ce sont des globes, dont les surfaces, exposées à l'action du Torrent, sont comme les quarrés de leurs diametres, il y aura, tout le reste étant égal, dix fois dix ou cent degrés de facilité pour le tournoyement de Jupiter contre un degré pour celui de la Terre : mais comme par-contre l'action du Torrent à la distance de Jupiter est 25 fois plus foible qu'à la distance de la Terre, il faut combiner ces deux raisons de 100 à 1 & de 1 à 25, d'où résulte la raison de 4 à 1, qui marque que si Jupiter & la Terre étoient d'une même densité, la facilité de rotation dans Jupiter ne seroit plus que quadruple de celle dans la Terre. Mais 2°. la matiere qui compose le corps de Jupiter, étant, si nous nous en raportons au calcul de M. NEWTON, 5 fois moins dense que le corps de la Terre, cela fait la raison

quadru-

quadruple encore 5 fois plus grande, de sorte qu'à ces deux égards la facilité de rotation, c'est-à-dire, la vitesse qui en résultera dans l'équateur de Jupiter, doit être 20 fois plus grande que celle de l'équateur de la Terre. Outre cela, 3°. les observations montrent que l'axe de Jupiter est presque perpendiculaire au plan de son orbite, par conséquent aussi à la direction du Torrent central; au lieu que l'axe de la Terre incline de $23\frac{1}{2}$ degrés, ce qui diminue encore, comme il est aisé à prouver, la vitesse de rotation de la Terre, en même raison que le quarré du sinus du complément de $23\frac{1}{2}$ degrés est plus petit que le quarré du sinus total. Or les Tables des sinus font connoitre que ces deux quarrés sont à peu près comme 5 est à *6*.

Composant donc la raison de 20 à 1 avec celle-ci de 5 à *6*; la vitesse rotative absoluë de l'équateur de Jupiter est à celle de la Terre comme 20 est à $\frac{5}{6}$, ou comme 24 à 1. Ainsi puisque les temps périodiques de deux globes qui tournent sur leur axe, sont en raison directe de leurs diametres, & inverse des vitesses absoluës de leurs équateurs, nous aurons le temps d'une révolution de Jupiter sur son axe à celui de la Terre $= \frac{10}{24} : 1 = 10 : 24$, conformement aux observations.

L X I.

De tout cela nous tirons cette regle generale pour le mouvement diurne des Planètes: *Il faut composer ou multiplier ensemble ces quatre raisons, savoir, la raison inverse du quarré des distances au Soleil; la raison directe du quarré des diametres; la raison simple inverse des densités; & la raison directe du quarré des sinus du complément des inclinaisons des axes sur les plans des orbites: le produit donnera la raison des vitesses rotatives des équateurs.*

Mais n'y ayant aucune observation qui puisse nous aprendre les densités des Planètes, il faudra se contenter de quelque conjecture probable. Or si on veut accepter ce que M. NEWTON a trouvé par sa supputation, que la densité de Jupiter est à celle de la Terre à peu près comme 1 est à 5, c'est-à-dire, récipro-

quement comme leurs distances au Soleil ; & comme d'ailleurs il paroit fort probable, que les Planetes les plus denses occupent les plus basses régions dans le Tourbillon solaire ; on seroit porté à établir pour un principe general, que *les densités des corps planètaires sont réciproquement proportionnelles à leurs distances au Soleil.* La même chose devroit s'entendre des Satellites, par raport aux distances à leurs Planetes principales.

Cela posé, on pourroit abreger la regle que je viens de donner : car les deux raisons qui entrent dans cette regle, savoir la premiere inverse du quarré des distances au Soleil, & la troisieme simple inverse des densités, donneroient toûjours par leur composition la simple raison inverse des distances ; ainsi il n'y auroit plus que ces trois raisons à multiplier ensemble, savoir *la raison simple inverse des distances ; la raison directe doublée des diametres ; & la raison directe doublée des sinus du complément des inclinaisons des axes : le produit donneroit la raison des vitesses rotatives des équateurs.*

L X I I.

Voyons ce qui résulteroit en apliquant cette regle à la Planète de Venus, & en adoptant ce qu'il y a dans la *Connoissance des Temps*, où je trouve 1°. que la distance moyenne de Venus au Soleil est à celle de la Terre environ comme 5 à 7, dont la raison inverse est de 7 à 5 ; 2°. que leurs diametres sont égaux, & par conséquent leurs quarrés sont comme 1 à 1 ; & 3°. par l'observation de M. BIANCHINI, que l'inclinaison de l'axe de Venus sur le plan de son orbite est de 75 degrés : mais puisque M. BIANCHINI ajoute qu'il y a des temps dans la période de Venus, où l'axe de rotation paroit se confondre entierement avec l'axe d'illumination, c'est-à-dire, que l'inclinaison est totale, ou de 90 degrés ; nous prendrons un juste milieu entre 75° & 90° ; prenons donc 80° pour l'inclinaison la plus ordinaire de l'axe de Venus, ensorte que son complément étant de 10 degrés, & le complément de l'inclinaison de l'axe de la Terre de $66\frac{1}{2}$ degrés, on trouve

trouve, dans les Tables, que les ſinus des ces deux compléments ſont à peu près en raiſon de 3 à 16, dont la raiſon doublée ſera de 9 à 256; c'eſt pourquoi ſelon la regle il faut multiplier les expoſants de nos trois raiſons, & nous aurons $\frac{7}{5} \times \frac{1}{1} \times \frac{9}{256} = \frac{63}{1280}$; d'où il ſuit que la viteſſe de rotation de l'équateur de Venus ſeroit à celle de l'équateur de la Terre comme 63 eſt à 1280; par conſéquent les globes de ces deux Planètes étant poſés égaux, les temps périodiques de leurs revolutions diurnes ſont réciproquement comme 1280 à 63, ou bien près comme $20\frac{1}{3}$ à 1; on auroit donc 20 jours & 8 heures pour une rotation entiere de Venus, ce qui eſt un peu moins de 23 jours, comme il eſt marqué dans la Connoiſſance des Temps.

Mais en donnant un ſeul degré de plus à l'inclinaiſon mediocre de l'axe de Venus, enſorte qu'elle ſoit de 81° au lieu de 80°, nous trouverons par nôtre regle, que la revolution diurne de cette Planète ſeroit environ de 25 jours; ce nombre ſurpaſſe celui de 23 jours, preſque autant que celui-ci ſurpaſſe les 20 jours 8 heures, que nous avons trouvés par la premiere ſuppoſition. Nous voilà donc reduits à prononcer, que la véritable inclinaiſon moyenne de l'axe de Venus, entre la plus petite de 75 degrés & la plus grande de 90 degrés, eſt un peu plus grande que de 80 degrés, mais un peu moindre que de 81 degrés. C'eſt beaucoup que nos principes nous ayent mené à une ſi grande préciſion, dans un cas où l'inclinaiſon de l'axe eſt variable dans chaque revolution annuelle: ce qui eſt un phénomène étrange, & tout particulier à Venus; les autres Planètes, que je ſache, ne changeant point ſenſiblement d'inclinaiſon de leur axes, pendant leur cours autour du Soleil; ſi ce n'eſt peut-être cette petite nutation ou libration, s'il y en a une, dont parle M. NEWTON, mais qui eſt ſi inſenſible, qu'elle ne mérite point d'attention.

L X I I I.

Dans cette recherche, on a ſupoſé que la matiere, qui compoſe le globe d'une Planète, eſt uniformement denſe par toute ſon étenduë, ou que tous les corps particuliers, qui pris enſemble font le total, ſont homogènes; mais comme l'expérience fait voir que le globe terreſtre, que nous habitons, eſt composé d'une infinité de parties hétérogènes, plus ou moins denſes les unes que les autres ſelon leur differente nature, il eſt bien à préſumer qu'il en eſt de même dans les autres Planètes, quoiqu'il y en ait peut-être où la diverſité n'eſt pas ſi conſiderable, ou dont les parties hétérogènes ſont arrangées autour du centre, d'une telle maniere, que le total ſera le même effet, par une eſpèce de compenſation du plus & du moins, que s'il étoit uniformement denſe: dans un tel cas nôtre regle ne s'écarteroit pas beaucoup de la vérité du fait.

Quand au reſte, ſi les parties heterogènes d'une Planète ſont trop inégalement diſtribuées autour du centre du globe, en ſorte que le centre de gravité (que je nommerois plûtôt le centre d'*inertie)* de toute la maſſe, differe beaucoup du centre de figure, je dis que c'eſt juſtement cette inégale diſtribution, qui eſt la cauſe de l'obliquité de l'axe de rotation, ou qui fait pancher cet axe ſur le plan de ſon orbite; voici la maniere dont je conçois la choſe.

L X I V.

J'ai déja demontré que dans ce ſyſtème, auſſi bien que dans celui de M. NEWTON, les orbites des Planètes doivent être des Ellipſes qui ont leurfoyer dans le centre du Soleil, vers lequel tendent directement les filets du Torrent central; il eſt viſible que la direction des filets qui donnent ſur une Planète, eſt ſituée toûjours ſur le plan de ſon orbite; il ſera donc ſon effort pour faire tourner la Planète ſur une ligne droite, qui paſſe par ſon centre perpendiculairement au plan de l'orbite ;

c'eſt

c'eſt pourquoi, ſi le globe de la Planète ſe trouve dans une entiere indifference d'obéir au mouvement rotatif en telle ou telle direction, ſelon qu'il eſt frapé, il faut de neceſſité que cette ligne droite devienne effectivement l'axe de rotation.

Or cette indifference ſe trouve, lorſque le centre de gravité, ou d'*inertie*, eſt dans le centre même du globe; ce qui peut arriver en deux manieres; ſavoir 1°. quand la matiere du globe, eſt réellement homogène, ou uniformement denſe; 2°. quand ſes parties, quoique non uniformement denſes, ſont tellement diſtribuées que leur commun centre d'inertie tombe dans le centre du globe, comme, par exemple, quand on conçoit le globe compoſé de couches, dont chacune ſoit d'une denſité uniforme, mais de differente denſité entr'elles. Mais ſi le centre d'inertie eſt éloigné du centre de figure ou du globe, alors cette indifference au mouvement rotatif n'a plus lieu, étant ſenſible par les loix de la Méchanique, qu'il y a plus de facilité à tourner un globe, de façon que ſon centre d'inertie demeure immobile pendant le toutnoyement, qu'il n'y en a lorſqu'on le veut tourner dans un autre ſens, qui ne ſe peut faire ſans mouvoir le centre d'inertie; parce que de cette maniere n'y ayant plus d'équilibre entre les inerties partiales, on eſt obligé de vaincre l'inertie totale de la maſſe, ce qui demande plus de force, à meſure que le centre d'inertie fait plus de chemin par la rotation.

LXV.

Cela bien entendu, conſiderons la Planète comme n'ayant point encore de rotation, mais prête à la ſubir par l'impreſſion du Torrent: je conçois le diametre tiré par les deux centres, d'inertie & de figure; ſi ce diametre par un coup de hazard ſe trouve perpendiculaire ſur le plan de l'orbite, il eſt évident que la rotation commencera à ſe faire autour de ce diametre, qui enfile les deux centres, qui ſera par conſéquent l'axe de rotation; parce que de cette maniere le mouvement ne rencontre nulle opoſition

de la part du centre d'inertie, qui étant dans l'axe même demeure immobile; mais si le diametre, qui passe par les deux centres, est oblique au plan de l'orbite, alors l'impression du Torrent ne tournera plus le globe autour de la ligne perpendiculaire sur le plan de l'orbite, à cause de l'obstacle que lui opose l'inertie totale de la masse. Cet obstacle devroit être vaincu pour mettre aussi le centre d'inertie en mouvement de rotation; ce qui ne pouvant pas se faire aisement, & sans quelque perte de la force du Torrent, la rotation changera plûtôt de direction, en évitant, autant qu'il est possible, la difficulté de faire tourner le centre d'inertie; je veux dire que le globe se prêtant à la plus facile détermination, tournera, ou exactement, ou peu s'en faut, sur le diametre qui passe par les deux centres, qui sera par cela-même l'axe de rotation.

La situation oblique de cet axe, que le hazard lui a une fois donnée, doit ensuite se conserver toûjours, parce que le corps planètaire étant constamment dans son équilibre, par la force centrifuge, contre-balancée par la gravitation causée par l'impulsion du Torrent, l'axe de rotation ne peut que garder son parallelisme; d'où il ne sortiroit jamais, s'il n'en étoit détourné insensiblement par une cause étrangére, dont nous parlerons dans la suite, qui fait qu'après un grand nombre de revolutions autour du Soleil, le changement de situation devient un peu sensible, en sorte que l'axe prolongé jusqu'aux étoiles fixes, son extrémité, ou le pole de l'équateur, paroit décrire un petit cercle autour du pole de l'écliptique, qui se fait dans le ciel, en étendant par la pensée le plan de l'orbite jusqu'au firmament.

L X V I.

Après cette longue déduction, on ne peut plus demander, dans nôtre systême, pourquoi le mouvement diurne ou de rotation se fait, ni pourquoi il se fait selon la même direction dans la partie supérieure de la Planète, selon laquelle se fait son mouvement périodique autour du Soleil. Les difficultés qui se presentent à cet égard

égard dans l'hypothèse des attractions, sont entierement levées par l'action du Torrent, plus forte sur l'hémisphere anterieur qui va au devant de son action, que sur le posterieur qui la fuit.

On peut former une autre demande, dans le systême de M. NEWTON, pour le moins aussi importante que la premiere ; qui est, que l'hypothese des attractions étant jointe à celle du grand vuide, on est en droit de demander pourquoi l'orbite de chaque Planète change insensiblement de place, en tournant d'un mouvement très-lent & uniforme autour de son foyer qui est dans le centre du Soleil, & pourquoi ce mouvement se fait aussi d'Occident en Orient, ce qui cause qu'après une longue suite d'années on remarque que les apsides s'avancent un peu vers l'Orient. L'existence du vuide supofée, & les forces centrales en raison inverse doublée des distances, exigent necessairement que les orbites soient des courbes rentrantes en elles-mêmes, qu'elles soient des Ellipses parfaites, dont l'axe ou la ligne des apsides soit absolument immobile. Il est vrai que, pour rendre raison de leur mobilité, M. NEWTON a recours aux influences que les Planètes ont les unes sur les autres par leurs attractions mutuelles, par lesquelles il croit devoir arriver que la régularité de leur mouvement se trouble, & que par-là les aphèlies deviennent mobiles ; mais on a démontré ailleurs l'insuffisance & la foiblesse de cette raison, puisqu'on a fait voir que, par exemple, Jupiter, qui par sa grosseur doit exercer le plus de force d'attraction sur une autre Planète, devroit tantôt avancer, tantôt faire reculer l'aphèlie de celle-ci, selon que l'un ou l'autre précède, bien-loin de produire un mouvement toûjours en avant, égal & uniforme.

LXVII.

Nôtre théorie nous fournit une explication de ce phénomène très-simple & très-naturelle, quoique differente de celle qu'on a donnée dans une autre occasion ; voici cette nouvelle explication, tirée des principes établis dans ce discours. Nous avons vû ci-

ci-dessus, que le grand Tourbillon solaire est d'une nature à ne point faire de résistance aux corps célestes, qui puisse être tant soit peu sensible en plusieurs milliers d'années; que sa circulation d'Occident en Orient doit être tranquille & uniforme dans chaque couche; & que la vitesse de cette circulation est 230 fois moins grande, qu'on ne la doit suposer dans le systême de DESCARTES, qui veut que la Planète qui y nage n'ait point d'autre mouvement autour du Soleil, que celui qu'elle emprunte de la matiere du Tourbillon qui l'emporte; au lieu que, selon M. NEWTON, & selon mes principes, le mouvement annuel de la Planète n'a pas son origine de celui du Tourbillon, mais qu'il lui a été primitivement imprimé; ensorte que l'origine est intrinseque, & indépendante de toute autre cause que de la premiere: tout aussi-bien que les Cartesiens rigides sont obligés de reconnoitre que la circulation, tant du Soleil, que celle du Tourbillon autour d'un centre commun, tirent immédiatement leur origine de la premiere cause, je veux dire, de l'Auteur du premier mouvement.

De plus, nous avons vû (§. LII & suiv.) que, quoique le Tourbillon n'ait pas assés de force pour augmenter ou diminuer sensiblement les vitesses des Planètes sur leurs orbites, que demande la regle de KEPLER, il en a pourtant assés pour causer quelque changement dans leurs directions; jusques-là même que les orbites ayant eu au commencement leurs positions sur differents plans, sans ordre & sans régularité, les directions de leurs cours, & par-là les positions de leurs orbes, se sont rangées peu à peu par le mouvement du grand Tourbillon, dans l'espace du Zodiaque. Après donc que le plan d'une orbite a été reduit ainsi dans sa situation convenable & permanente, la Planète continueroit éternellement à décrire la même orbite, & repasseroit dans chaque révolution par les mêmes apsides, tout comme dans le vuide parfait, savoir si le Tourbillon venoit à cesser de se mouvoir.

Mais comme il circule toûjours d'Occident en Orient, & ne cesse jamais; son effet sera, non pas de changer la vitesse sensible

ble de la Planète, mais au moins d'en faire anticiper un peu la direction en chaque point de l'orbite; d'où il s'ensuit visiblement que l'orbite elle-même paroitra circuler d'un mouvement uniforme, mais très-lent, autour de son foyer, & transporter par conséquent les apsides avec la même lenteur uniforme, & dans la même direction d'Occident en Orient.

Voilà une explication, ce me semble, bien simple & pas moins claire, d'un phénomène, qui par son importance fut trouvé digne par l'illustre Académie d'être proposé pour le sujet du prix de 1730.

QUATRIEME PARTIE.

LXVIII.

JUSQU'ICI j'ai traité des principaux phénomènes, que l'Astronomie moderne a observés avec le plus d'exactitude & d'aplication; les raisons physiques, que j'ai tirées de ma théorie pour expliquer ces faits, me paroissent telles qu'on les pourra envisager pour le moins comme des conjectures très-probables, sur-tout à cause de la simplicité & de la clarté des principes sur lesquels j'ai bâti mon systême. Je soûmets cependant le tout à la décision de mes Juges, sages & éclairés, accoûtumés à ne prononcer leur sentence qu'en faveur de la solidité du raisonnement.

Il est temps presentement, que je tâche de satisfaire aussi à la question qui revient sur le tapis, à cause que, selon ce qu'insinue le programme publié pour l'année 1734, on n'a rien trouvé dans les pieces qui ont été envoyées la premiere fois, d'assés précis ni d'assés clair sur le sujet en question, & que c'est pour cela qu'on n'a pas cru devoir adjuger le prix, mais qu'une matiere aussi importante pour l'Astronomie physique étant très-digne d'être aprofondie, l'illustre Académie a jugé qu'il étoit utile de proposer de nouveau le même sujet pour l'année 1734, en y attachant un prix double de l'ordinaire. Cette

 genero-

generosité & louable attention pour le bien public doit exciter les Savants, & particulierement ceux qui portés par eux-mêmes pour l'avancement des Sciences, ont toûjours tâché d'y contribuer, indépendamment même du profit qui leur en pourroit revenir.

Animé de cet esprit, je vais produire mes pensées sur *la cause physique de l'inclinaison des plans des orbites des Planètes par raport au plan de l'équateur & de la révolution du Soleil autour de son axe*; & indiquer ensuite *d'où vient que les inclinaisons de ces orbites sont differentes entr'elles*. Ce sont-là les propres termes dans lesquels la Question est proposée. Je me flatte que la solution que j'en donnerai sera d'autant plus goûtée, qu'elle a une liaison parfaite avec les principes de ma théorie.

Aussi est-ce dans cette seule vûe, que j'ai communiqué un peu au long cette théorie, afin qu'on ne trouve pas étrange que je m'y sois étendu à expliquer des faits astronomiques, qui semblent avoir peu de connexion avec le sujet dont il s'agit presentement. Si on veut examiner une partie d'une édifice, on fait bien de contempler auparavant tout l'édifice en son entier, & ensuite les parties séparément, pour juger si celle dont il s'agit est dans l'ordre & dans la symmétrie avec les autres; c'est en quoi consiste la beauté de tout l'édifice: ainsi je crois n'avoir pas mal fait d'avoir exposé à la vûe un systême, avec les principales particularités qui en réhaussent le prix : outre que les œuvres surérogatoires, comme je pense, ne sont pas désagréables, lorsque'lles donnent un lustre au devoir essentiel.

L X I X.

Pour en venir donc à la Question proposée: elle consiste en deux parties. On demande 1°. la cause physique des inclinaisons des orbites; 2°. la raison de la diversité de ces inclinaisons. Il n'y a qu'à bien satisfaire à la premiere partie par une réponse convenable, on verra que la réponse à la seconde s'ensuivra d'elle-même.

A cette fin, je prie mon lecteur de prêter le plus d'attention à mes raisonnements sur le premier de ces deux points, comme sur le plus essentiel, & de se souvenir, avant toutes choses, de la nature du Tourbillon solaire, auquel j'ai attribué par de bonnes raisons une vitesse 230 fois plus petite qu'on ne la supose dans le systême Cartesien, & avec cela une force très-insensible de résister, ou de diminuer la vitesse des Planètes, à cause que la plus grande partie de la matiere du Tourbillon est un liquide parfait, divisé actuellement à l'infini & sans borne, ou plûtôt n'ayant point de parties élementaires sans division (§. X & suiv.) par conséquent incapables de faire la moindre résistance aux corps qui s'y meuvent; mais que le reste de la matiere, savoir les globules célestes, qui entrent, pour une très-petite partie, dans la composition du Tourbillon, sont d'une rareté extrême; je veux dire, si dispersés par tout le vaste océan du Tourbillon, que les corps énormes des Planètes y passent librement comme dans un vuide parfait, avec les vitesses qu'ils doivent acquerir dans les divers endroits de leurs orbes elliptiques, en vertu de la regle de KEPLER.

Cependant si la résistance de cette matiere doit être comptée pour rien, nous avons démontré, qu'il n'en est pas de même du changement de direction que doivent subir les Planètes sur leurs routes, selon la diversité des circonstances, quoique sans rien perdre de leur vitesse (§. LII & LIII). Or c'est ce changement de direction, provenant de l'oposition des globules célestes, qui peut devenir sensible, & même assez considerable par la longueur du temps, pour faire que les plans des orbites, après avoir été reduits dans une situation permanente, comme je l'ai expliqué ci-dessus, ne se trouvent pas précisement dans le plan commun de l'équateur du Tourbillon, mais qu'ils s'en écartent, ensorte que les orbites couperont cet équateur sous des angles plus ou moins grands, selon la diverse constitution des Planètes: c'est ce que je me mets en devoir d'expliquer plus amplement & en détail.

LXX.

D'abord je me figure que le plan de l'équateur du grand Tourbillon n'est point different de celui de l'équateur du Soleil même. Je regarde le Soleil & son Tourbillon comme un tout, dont celui-ci est, pour ainsi dire, la continuation de celui-là; de sorte que le Soleil ayant reçû une fois son mouvement de circulation autour d'un axe, ce mouvement a été communiqué peu à peu à la matiere qui l'environne, & forme presentement son Tourbillon, dont la circulation ne fait que suivre celle du Soleil, dans la même direction d'Occident en Orient, & partant autour du même axe; mais avec plus de vitesse dans les couches plus voisines que dans les éloignées; jusqu'à ce que ces differentes vitesses soient enfin parvenuës à l'état d'uniformité, savoir chacune convenable à la distance au Soleil, telle que la demandoient les loix de la Méchanique dans la formation d'un Tourbillon, comme on l'a démontré autrefois.

C'est-là l'idée la plus simple & la plus naturelle qu'on puisse avoir au sujet de la formation & du mouvement d'un Tourbillon; car quelle contrainte ne faut-il pas se donner pour s'imaginer avec les *Cartesiens* outrés, que la premiere couche du Tourbillon solaire fasse sa circulation 230 fois plus rapidement que la surface du Soleil à laquelle la premiere couche est contiguë? & quelle peine n'a-t-on pas aussi à concevoir, que le Tourbillon particulier terrestre dans sa plus basse région contiguë à la surface de la Terre, circule 17 fois plus vite que ne fait la Terre elle-même par son mouvement diurne? c'est pourtant ce qu'il faut dire, si on veut soûtenir que les Planètes autour du Soleil, & la Lune autour de la Terre, empruntent leur mouvement de celui des Tourbillons, par lesquels on prétend que ces corps célestes sont entrainés.

Ne seroit-on pas fondé à demander, pourquoi à l'endroit où le Tourbillon solaire touche le Soleil, & où le terrestre touche la Terre, les deux mouvements ne se confondent pas enfin, ou ne se conforment pas l'un à l'autre? Quelle cause pourroit-on inventer, qui

qui entretint cette grande inégalité de viteſſe de deux matieres fluides, qui ſe frotteroient continuellement, ſans qu'il en réſultat le moindre retardement dans la plus vite, ni d'acceleration dans la plus lente? le bon ſens n'en eſt-il pas choqué? Nôtre hypothèſe remédie à tous ces inconvénients: ainſi continuons à nous en ſervir pour l'explication du fait en queſtion, d'une maniere qui en rende la cauſe préciſe & claire, telle qu'on la demande.

L X X I.

On m'acordera donc, puiſque j'ai fait voir que cela convenoit mieux à la ſimplicité de la Nature, que le mouvement du Tourbillon eſt la production de celui du Soleil, ou plûtôt que celui-la n'eſt autre choſe que la continuation de celui-ci; d'où il ſuit qu'il ne ſe fait point de ſaut ſubit de la viteſſe de l'un à la viteſſe de l'autre, mais que déja depuis le centre, la diminution de viteſſe circulante ſe fait graduellement vers la circonference, ſuivant la loi d'un Tourbillon, au moins juſqu'à une vaſte diſtance au-deſſus de la région des Planètes; que par conſéquent toutes ſes parties ſans exception circulent autour d'un même axe, qui eſt celui du Soleil; ce ſont donc les mêmes poles, & le même plan des équateurs de toutes les couches qui compoſent le Tourbillon: car quelle raiſon auroit-on de croire, comme quelques-uns ſe le ſont imaginé, que les couches, à differentes diſtances, changent de direction dans leur circulation? il n'y a là aucune cauſe phyſique à alleguer, qui ſoit ſolide. Je me fonde toujours ſur la ſimplicité, & tiens pour un principe general, qu'il ne faut jamais s'en écarter, ſans une extrême neceſſité.

Cela étant, je vois avec une entiere évidence, qu'après que les Planètes ont une fois acquis la direction permamente, de la maniere que je l'ai expliqué, cette direction devroit être exactement conforme à celle du Tourbillon, puiſque celle-ci a produit l'autre; cela veut dire, que toutes les orbites devroient ſe trouver parfaitement ſur le plan commun de l'équateur du Soleil & du Tourbillon: cependant les obſervations ſont connoitre

qu'elles s'en écartent un peu, & que leurs plans coupent le plan de l'équateur solaire, en differents endroits, & sous differents angles, dont le plus grand monte à 7°, 30′, qui est celui que fait l'orbite de la Terre.

Cette deviation m'a donc fait juger, que sa principale cause ne doit pas être cherchée uniquement dans la matiere du Tourbillon, qui environne immédiatement la Planète par un contact immédiat, & qui devroit plûtôt, comme nous l'avons vû, l'entretenir dans le mouvement commun sur le plan de l'équateur. Mais faut-il peut-être recourir à une autre cause, qui agisse de loin sur la Planète, pour la détourner de la direction du Tourbillon, selon le sentiment de KEPLER, & de quelques autres après lui, qui ont introduit une espece de magnétisme immateriel émanant du Soleil, & capable de changer la situation & le cours des Planètes? mais cette vision, qui ne vaut pas plus que les attractions, est aussi obscure que les qualités occultes.

N'allons donc pas si loin, & cherchons la veritable cause de nôtre phénomène dans le corps même de la Planète; on l'y trouvera sûrement, d'autant plus recevable, qu'elle ne develope pas seulement le fait, mais aussi les circonstances qui l'accompagnent, indiquées par les observations les plus exactes; marque indubitable, qu'il y a ici quelque chose de plus qu'une simple conjecture plausible.

LXXII.

Je commence par examiner ce qui arriveroit au mouvement annuel d'une Planète, en suposant que sa figure est une sphère parfaite. Je vois qu'un tel corps a une entiere indifference à obéir, avec une égale facilité, à telle ou telle direction que le fluide ambiant lui imprime. Or, comme je l'ai déja dit plus d'une fois, le Tourbillon, quoiqu'il n'ait pas de force suffisante pour changer sensiblement les vitesses des corps célestes, ne laisse pas d'en disposer les directions (si elles sont d'abord differentes de la sienne) de sorte qu'elles deviennent peu à peu conformes à la direction commune de toutes les parties du Tourbillon.

Il

Il ne faut donc pas douter qu'une Planète parfaitement ſphèrique (s'il y en avoit) ne demeurât continuellement dans le plan de l'équateur ſolaire, dont elle ne s'écarteroit jamais; en ſorte que le plan de cet équateur & celui de l'orbite planètaire ne feroient point d'angle, & ne ſeroient qu'un même plan: cela me paroit clair, ſans autre explication plus ample.

LXXIII.

Mais on ſait aujourd'hui que les corps des Planètes n'ont pas la figure d'un globe parfait. Quant à la Terre, il y a des Philoſophes qui lui attribuent la figure d'un ſpheroïde allongé vers les poles; au contraire Mrs. NEWTON, HUGUENS & d'autres diſent qu'elle eſt un ſpheroïde aplati. On convient generalement, par les obſervations, que l'axe de Jupiter eſt plus petit que le diametre de ſon équateur, en raiſon environ de 12 à 13. Il n'y a pas à douter, en réflechiſſant ſur les cauſes phyſiques qu'on allegue de part & d'autre, qu'une telle inégalité de diametres, plus ou moins grande, ne ſe trouve auſſi dans la figure des autres Planètes.

Je ſuis donc en droit de demander qu'on m'accorde que les Planètes ſont des ſpheroïdes: & je démontrerai que cette figure ſupoſée emporte neceſſairement, 1°. que les Planètes ne peuvent pas ſe mouvoir exactement ſur la direction du Tourbillon, je veux dire, que les plans de leurs orbites ſeront differents du plan de l'équateur ſolaire, qui eſt auſſi celui du Tourbillon, & que c'eſt dans cette differente poſition que conſiſte l'inclinaiſon des orbites par raport au plan de l'équateur ſolaire: 2°. que cette inclinaiſon ſera plus ou moins grande, ſelon que le ſphéroïde difére plus ou moins d'une ſphère parfaite. Ces deux points démontrés formeront la réponſe à la premiere & à la ſeconde partie de la Queſtion.

LXXIV.

Je dis donc que l'une & l'autre eſpece de ſphéroïde, tant aplati qu'allongé, doit cauſer que la direction du mouvement de la

la Planète se détourne de la route qu'elle prendroit sur le plan commun de l'équateur solaire, si la Planète étoit une sphère; avec cette difference, que les nœuds de ces deux sphéroïdes sur l'équateur du Soleil seront de noms contraires, je veux dire que là où se fera le nœud ascendant, ou Boreal, dans le cas du sphéroïde aplati, il deviendra nœud descendant, ou Austral, si on supose que c'est un sphéroïde allongé, & réciproquement le nœud descendant du sphéroïde aplati se change en ascendant pour le sphéroïde allongé: j'en donne l'explication tirée de la navigation.

On sait que les vaisseaux poussés obliquement par le vent, au lieu d'aller dans la direction de la quille, en sont insensiblement détournés, en prenant une autre route, dont la direction fait avec celle de la quille un angle, que les Marins apellent la *dérive* du vaisseau.

La nature & la cause de cet effet est connuë & traitée amplement dans la manœuvre des vaisseaux: c'est que si le corps du vaisseau avoit la figure d'un cercle, ou d'une sphère, par conséquent indifferente à se mouvoir avec une égale facilité en tout sens, il iroit sans doute, abandonné à lui-même, dans la direction que lui donneroit la ligne moyenne de la force mouvante, & cette direction pourroit passer aussi pour celle de la quille, puisque chaque diametre la pourroit être. Tout au contraire, un vaisseau fort long, mais infiniment peu large, suivroit constamment la direction de sa longueur ou de sa quille, quelle que fût l'obliquité de la direction de la force mouvante: car un tel vaisseau ne trouvant point de résistance sensible à la prouë, & toute la force de l'eau donnant sur le côté; il est visible qu'il doit se mouvoir exactement sur la direction de la quille sans la moindre dérive. Mais comme il est impossible dans la structure des vaisseaux, de faire ensorte que la prouë ne souffre dans le sillage quelque résistance, que l'eau lui opose; cela est la cause, que le vaisseau est obligé de prendre une route moyenne entre la direction de la quille & celle de la force mouvante; c'est-à-dire, de subir une dérive, plus ou moins grande, selon que la résistance de l'eau contre la prouë est plus ou moins sensible.

Je

Je dis donc qu'il se fait la même chose dans le mouvement des Planètes, lorsqu'elles n'ont pas la figure d'une sphère exacte : ainsi il me sera permis d'y faire l'aplication, dont le résultat montrera, combien mes raisonnements sont conformes aux observations faites sur cette matiere.

LXXV.

Soit *GC* une portion de l'équateur du Tourbillon, & suposons d'abord qu'une Planète *BDAE* ait son centre *C* sur la ligne *GC* avec un mouvement de *G* vers *C*. Je vois clairement, que si la Planète étoit une sphère parfaite, elle continueroit son mouvement sur la même ligne de *C* vers *N*, nonobstant l'oposition de la matiere du Tourbillon comprise entre les tangentes extrêmes *ML*, *SR* parallèles à *GC*: car cette oposition qui n'auroit pas de force pour diminuer sensiblement la vitesse de la Planète, n'en a pas non plus pour changer la direction du mouvement; parce que les deux arcs *OBM*, *OES*, étant en ce cas deux quarts de cercle d'une situation semblable au-dessus & au-dessous de *CO*, il est évident que pour chaque filet tel que *TF* contre lequel donne l'arc superieur *OBM*, & qui feroit impression suivant *F*Φ perpendiculaire à la courbe, il y a un autre filet semblable, qui donne sur l'arc inferieur, & qui fait une pareille impression, mais de bas en haut, au lieu que le premier la fait de haut en bas; en sorte que toutes ces impressions se trouvant en équilibre par raport à la direction *GC*, la Planète continuera toûjours à se mouvoir sur cette direction, & n'en sera jamais détournée. TAB. L. Fig. 2 & 3.

LXXVI.

Si le corps planètaire *BDAE* est un sphéroïde soit aplati ou allongé, mais dont l'axe de rotation ou du mouvement diurne *BA* est exactement perpendiculaire sur *GC*, ou sur le plan de l'équateur du Tourbillon, de sorte que l'équateur *DE* de la Planète,

& celui du Tourbillon *GC*, ne sont que sur un même plan; alors le point *E* tombant sur *O*, les oppositions de la part du fluide contre *EB* & *EA* sont encore semblables & égales, d'où il suit aussi que la direction du centre *C* suivant *GC* ne sera point changée. Donc une Planète sphéroïdique, qui auroit son axe de rotation perpendiculairement érigé sur le plan de l'équateur solaire, ne sortiroit jamais de ce plan, c'est-à-dire, que le plan de l'orbite planètaire & le plan de l'équateur du Soleil ne feroient point d'angle. Voilà les deux cas uniques, où il n'y auroit point d'inclinaison.

LXXVII.

TAB. I. *Fig.* 2. Mais considerons presentement la Planète comme ayant la figure d'un sphéroïde aplati, dont l'axe de rotation *BA* soit oblique sur la direction *GC*, que je regarde toûjours comme une partie de l'équateur du Tourbillon, & voyons si la Planète pourra se soûtenir sur la direction *GC*, ou si elle sera obligée de s'en écarter peu à peu pour prendre une autre route *gc*. Pour cette fin, soit le point *V* le plus avant vers le côté où va la Planète, par lequel si on conçoit tirée la tangente *HVI*, cette tangente sera perpendiculaire aux directions *ML*, *ON*, *SR*, & le point d'attouchement *V* sera au dessous de la direction *GCN*; tellement que l'arc total *MOS* exposé à l'action des filets du fluide compris entre *ML* & *SR* est partagé en deux parties inégales *VBM*, *VES*, dont la plus grande *VBM* reçoit aussi le plus grand nombre de filets, qui conspirent tous à pousser la Planète obliquement de haut en bas, & la moindre partie *VES*, reçoit le plus petit nombre de ces filets, qui agissent conjointément sur la Planète pour la repousser obliquement de bas en haut.

Donc ces deux forces sur *VBM* & *VES* étant inégales, la plus petite cedera à la plus grande, d'où il suit que le centre *C* quittera la direction *GC*, & en suivra une autre *gc* au-dessous de la premiere. Ce qui arrive déja dès lors que l'angle *BCO* commence à devenir aigu; car il faut considerer que cet an-

angle *BCO*, que fait l'axe de rotation *BC*, toûjours parallele à lui-même, avec la direction *CO*, toûjours dans une autre position, change continuellement de grandeur, comme nous le verrons ci-après plus particulierement.

LXVIII.

Si nous suposons maintenant le cas où la Planète, après avoir fait le demi-tour depuis un des nœuds jusqu'à l'autre, se meut dans un sens contraire au premier, savoir de *C* vers *G*, ensorte que l'angle *BCG* soit obtus, on voit évidemment que la plus forte impression du fluide du Tourbillon; qui se déploye sur la partie découverte *MDAS*, vient de bas en haut, & détournera par conséquent le centre *C* de la direction *CG*, pour lui faire prendre la direction *cγ* au-dessus de *CG*, ce qui arrive aussi d'abord que l'angle *BCG*, commence à devenir obtus.

Il est à remarquer que les deux points d'intersection, où les deux lignes *cg*, *γc* coupent la ligne *CG* prolongée de part & d'autre, représenteront les deux nœuds de la Planète, savoir, la premiere intersection donnera le nœud austral, & la seconde le nœud boreal.

Il reste à expliquer l'effet que produira l'oposition du fluide du Tourbillon contre une Planète qui auroit la figure d'un sphéroïde allongé, d'où nous verrons que cet effet sera renversé par raport au premier dans l'ordre du mouvement de la Planète sur son orbite, je veux dire, que le nœud descendant ou austral se change ici en boreal, & réciproquement le boreal en austral.

LXXIX.

Soit donc une Planète en forme de sphéroïde oblong *BDAE*; TAB. L. Fig. 3.
l'axe de rotation *BA* plus grand que le diamétre de son équateur *DE*; son pole Boreal *B*, & Austral *A*; le centre *C*. Soient tirées toutes les autres lignes comme dans la figure précédente; nous voyons d'abord que le point d'attouchement *V*, qui partage l'arc *MVS* exposé à la pression du fluide contenu entre les

 filets

filets extrêmes *LM*, *RS*, eſt au-deſſus de la direction de l'équateur du Tourbillon: c'eſt pour cela que la preſſion exercée ſur la partie inferieure *VES*, dont la direction moyenne va de bas en haut, eſt prévalante à celle qui s'exerce ſur la ſuperieure *VBM*, dont la moyenne direction tend de haut en bas. Ainſi le centre *C* ne pouvant pas ſe ſoûtenir ſur la direction *GC*, en ſera détourné vers le ſuperieur *c*, & ſuivra la route *gc* au-deſſus de *GC*. Et comme cette inégale preſſion, dont l'inferieure eſt la plus forte, commence dès que l'angle *BCO* devient aigu, on voit que *CG*, *cg* prolongées doivent ſe couper du côté de *G*, *g*, d'où la Planète vient, & que par conſéquent le point d'interſection ſera le nœud boreal, puiſque ce ſera dans ce point, comme nous le verrons, que l'angle *BCO* étant droit va devenir aigu.

LXXX.

Mais au contraire, ſi tout le reſte demeurant le même, on ſupoſe le cas où la Planète ſe meut de *C* vers *G*, & où l'angle *BCG* eſt obtus; on prouve par un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons fait dans §. LXXVIII que la Planète ſera obligée de deſcendre vers le pole auſtral du Tourbillon, & que ſon centre décrira la route *cγ*, qui étant prolongée du côté d'où elle vient, coupera *GC* dans un point vers *N*, qui ſera le nœud auſtral. Car ce ſera ici où l'angle *BCG*, de droit qu'il eſt, commence à ſe changer en angle obtus.

Il faut remarquer pour l'une & l'autre eſpece de ſphéroïdes, que l'axe de rotation étant incliné ſur le plan de l'orbite, il arrive deux fois dans chaque révolution annuelle, que les angles *GCB* & *BCO* deviennent droits, je veux dire, que la direction du centre de la Planète ſoit perpendiculaire à la poſition de l'axe *BA*, ſavoir, une fois lorſque la Planète parvient à l'endroit de ſon orbite, où ſon axe de rotation prolongé rencontre, ou coupe l'axe de l'équateur ſolaire vers le pole boreal, & une fois encore, lorſqu'après une demi-révolution ces deux axes prolongés ſe rencontrent vers le pole auſtral.

LXXXI.

LXXXI.

C'eſt donc dans ces deux points que les angles *BCG*, *BCO* ſont droits ; ils ſont par conſéquent comme le paſſage où la direction de l'action du fluide ſur la ſurface du ſphéroïde change d'obliquité, & fait que la partie, qui donnoit plus de priſe à cette action, commence à devenir celle qui en donne moins, & réciproquement la partie qui y étoit moins expoſée, va l'être plus que l'autre : cela eſt évident, en faiſant attention au parallèliſme que l'axe de rotation conſerve pendant ſa révolution autour du Soleil.

De là il paroit que les nœuds des Planètes à l'égard de l'équateur du Soleil ſe trouvent dans les points où les Planètes parviennent à leurs ſolſtices; puiſque c'eſt viſiblement dans ces points, que l'axe du Tourbillon & l'axe de rotation d'une Planète ſont dans un même plan, & que les angles *BCG*, *BCO* deviennent droits: en conſiderant au moins l'orbite de la Planète comme un cercle parfait, dont le centre ſeroit dans celui du Tourbillon; mais étant véritablement une Ellipſe, quoique fort aprochante du cercle, nous verrons plus bas que cela ſera que les nœuds ſeront un peu éloignés des points ſolſtitiaux.

LXXXII.

Juſqu'ici nous avons conſideré le mouvement de la Planète comme ſe faiſant dans un fluide calme & en repos, dont la ſeule oppoſition doit la faire écarter de la direction qu'elle auroit, ſi elle étoit parfaitement ronde, ou ſi ſon mouvement ſe faiſoit dans le vuide; de la même maniere que les vaiſſeaux ſouffrent une dérive, lorſque la tendance de leur route n'eſt pas directement oppoſée à la direction moyenne de la réſiſtance de l'eau; tellement que le lieu d'un vaiſſeau s'éloigne de plus en plus de l'endroit où il ſe trouveroit, ſi on pouvoit éviter la cauſe de la dérive.

Mais puiſque le fluide du Tourbillon a lui-même un mouvement, quoique 230 fois plus lent que celui de la Planète, qui ſe fait de même côté d'Occident en Orient, & dont j'ai démontré que l'effet eſt de la diriger inſenſiblement à prendre une conformité de direction commune dans le plan de l'équateur ſolaire, il eſt ſenſible que plus la Planète s'écarte de cette direction à cauſe de l'inégalité de preſſion qu'elle rencontre par devant, plus auſſi ſera-t-elle obligée par cette autre cauſe, de regagner le deſſus, & de ſe raprocher de l'équateur du Tourbillon.

La premiere de ces deux cauſes, qui dépend de l'inclinaiſon de l'axe *BA* de la Planète ſur la direction de ſa route, va en augmentant depuis le moment que les angles *BCG*, *BCO* ſont devenus droits, juſqu'à ce qu'ils deviennent le plus inégaux qu'ils peuvent, l'un devenant le plus obtus & l'autre le plus aigu, autant que l'autre cauſe, qui cherche à redreſſer la dérive, le leur permet; c'eſt-à-dire, depuis le nœud juſqu'à la limite de la Planéte, ou depuis l'interſection de l'équateur & de l'orbite juſqu'au point de leur plus grand éloignement.

Ce point paſſé, le parallèliſme de l'axe *BA* fait que les angles *BCG*, *BCO* ſe raprochent chacun de l'angle droit, par où il arrive que l'inégalité de preſſion du fluide contre les deux parties *VBM*, *VES* diminue, pendant que l'autre action tend continuellement à remettre la Planète ſur la direction du fluide; elle ſera donc repouſſée en chemin faiſant vers le plan de l'équateur ſolaire, qu'elle traverſera dans le nœud oppoſé où derechef l'axe *BA* eſt perpendiculaire à la direction du mouvement de la Planète ſur ſon orbite; par conſéquent nulle inégalité d'impreſſion du fluide contre les deux parties *VBM*, *VES*.

Après que la Planète a paſſé ce nœud oppoſé, il eſt auſſi ſenſible qu'elle continuëra l'autre moitié de ſa route de la même maniere & ſuivant la même loi, qu'elle a fait la premiere: enſorte que l'une s'écartant, ou faiſant ſa dérive vers le pole auſtral, ſelon l'eſpece du ſphéroïde, l'autre la fera néceſſairement vers le pole boreal; parce qu'après un demi-tour de révolution, les parties de la ſurface expoſées aux impreſſions du fluide

de changent de ſituation : celle qui en recevoit le plus, ayant été d'un côté par raport à la direction du fluide, ſera celle qui en recevra le moins, & réciproquement.

LXXXIII.

Voilà les deux cauſes contraires l'une à l'autre, qui doivent regler la ſituation du plan de l'orbite, & lui donner une certaine inclinaiſon par raport au plan de l'équateur ſolaire. Et comme la quantité de la *dérive* (il me ſera permis d'apeller ainſi la déviation cauſée par l'oppoſition du fluide, ſemblable à celle de l'eau contre le vaiſſeau) dépend entierement, en partie de la figure du ſphéroïde plus ou moins differente de l'uniformité d'une ſphére, & en partie de la plus ou moins grande obliquité de l'axe du mouvement diurne ſur le plan de l'orbite; puiſqu'il ne ſe feroit point de dérive, comme nous l'avons déja dit, ſi cet axe étoit perpendiculairement érigé ſur ce plan, quand même le ſphéroïde differeroit beaucoup de la ſphéricité parfaite: comme donc, dis-je, ces deux circonſtances, la figure du ſphéroïde & la poſition de l'axe, ſont ſans doute différentes dans les différentes Planètes, il ne faudra plus demander pourquoi les inclinaiſons des orbites ſont différentes entr'elles; car chacune des Planètes étant dans un état particulier par raport à ces deux circonſtances, il eſt évident que l'inclinaiſon de ſon orbite lui doit être auſſi particuliere, je veux dire, différente des autres; il ſeroit donc inutile d'expliquer plus amplement la cauſe de ce phénomène.

Cependant, pour dire encore quelque choſe ſur la quantité de l'inclinaiſon des orbites; nous avons vû que la réſiſtance qu'opoſe le fluide du Tourbillon au mouvement des corps céleſtes eſt ſi inſenſible, que leur viteſſe n'en ſouffre aucune diminution perceptible, peut-être pas même pendant toute la durée du Monde: Nous avons vû pareillement, que le mouvement circulant du Tourbillon, avec une viteſſe 230 fois plus petite que celle de la Planète dans la région où elle ſe trouve, ne peut

non

non plus ni accelerer ni retarder la vitesse qu'elle doit acquerir dans les differents endroits de son orbite elliptique, en vertu de la regle de KEPLER, mais que tout ce que le Tourbillon circulant peut produire, c'est de diriger peu à peu le mouvement progressif des Planètes à prendre sa direction commune d'Occident en Orient.

Ainsi réflechissant sur la foiblesse des deux causes que je viens d'expliquer, qui concourent à déterminer les inclinaisons des orbites, & qui influent seulement sur les directions & non point sur les vitesses; il est très-probable, que l'inclinaison de chaque orbite n'a pas été produite dès la premiere révolution, mais qu'il a fallu un grand nombre de révolutions, avant que l'inclinaison soit parvenuë à sa quantité fixe & permanente, telle qu'on l'observe aujourd'hui.

LXXXIV.

Une autre circonstance digne d'attention, c'est que l'orbite étant une Ellipse, qui a le Soleil dans un de ses foyers, duquel toutes les ligne droites tirées aux points de la circonference, exceptéles deux apsides, font des angles obliques avec les tangentes, il est clair, que pendant le temps que la Planète est à monter depuis le perihèlie jusqu'à l'aphèlie, la direction du fluide du Tourbillon contre la surface anterieure de la Planète, fait un angle obtus avec la ligne de la distance au Soleil, & que cet angle devient aigu dès qu'elle a passé l'aphèlie jusqu'à son retour au perihèlie.

Mais comme les orbes elliptiques aprochent beaucoup des cercles véritables, ces angles obtus & aigus ne différent que très-peu des angles droits; d'où on doit conclurre que les deux points de l'orbite où se fait l'équilibre de l'impression du fluide sur la Planète, c'est-à-dire, les deux nœuds, ne se trouvent pas exactement dans les deux points solstitiaux, mais toûjours fort près: en sorte que l'on peut être assûré, que les Planètes arrivent à leurs solstices, ou un peu avant, ou un peu après qu'elles passent par les nœuds.

LXXXV.

LXXXV.

Au moins cela ſe vérifie très-bien par l'obſervation faite du nœud boreal de l'orbite de la Terre par raport à l'équateur du Soleil, qui ſe trouve, le Soleil étant dans le 8e. degré de ♊, éloigné du ſolſtice d'été ſeulement de 22 degrés. Il ſeroit à ſouhaiter que Mrs. les Obſervateurs priſſent la peine de déterminer les lieux des ſolſtices des autres Planètes, comme ils ont fait ceux des nœuds ſur l'équateur ſolaire, pour voir ſi dans chacune des Planètes les nœuds & les points ſolſtitiaux ne ſe ſuivent pas de bien près: une telle obſervation donneroit un grand poids à ma conjecture ſur la véritable cauſe de l'inclinaiſon des orbites planètaires, ſupoſé que pour chaque Planète on trouve une proximité conſtante entre ces deux points; il faudroit, par exemple, que Mars paſſant par ſon nœud qui eſt entre le 14e. & le 15e. degré de ♊, ne fût pas bien loin de ſon ſolſtice, ſoit qu'il l'eût déja paſſé, ou qu'il fût près de le paſſer.

LXXXVI.

A cette occaſion je ne dois pas paſſer ſous ſilence une des plus importantes utilités qu'on retireroit de mon ſyſtème, s'il avoit le bonheur d'être agréé: cette utilité conſiſteroit en ce qu'on ſeroit en état de décider la fameuſe queſtion ſur la véritable figure de la Terre, ſi elle eſt un ſphéroïde allongé ou applati. Les ſentiments des Philoſophes de nôtre temps, touchant cette queſtion, ſont partagés depuis 40 ou 50 ans. On allegue de part & d'autre des preuves ſolides: Mrs. HUGUENS, NEWTON & pluſieurs grands Géomêtres qui les ſuivent, prétendent que la diminution de la peſanteur des corps terreſtres vers l'équateur de la Terre, cauſée par la force centrifuge de ces corps, qui réſulte du mouvement journalier de la Terre, laquelle force eſt plus grande dans ces endroits que dans les lieux plus proches des poles, eſt un argument invincible que la Terre eſt plus élevée vers l'équateur que vers les poles; à quoi ils adjoûtent l'ex-

 périen-

périence de l'accourciſſement des pendules à ſecondes, qu'il faut leur donner dans les pays voiſins de l'équateur, marque évidente, à ce qu'ils penſent, d'une plus grande diminution de peſanteur.

D'autres grands Hommes ſoûtiennent le contraire, ſe fondant principalement ſur la meſure actuelle de la Terre, faite en différents endroits & en divers pays, avec toute l'exactitude poſſible; l'expérience ayant conſtamment montré que les degrés d'un même méridien avoient plus de longueur dans les lieux de moindre latitude que dans les plus ſeptentrionaux, & que leur longueur diminuoit, à meſure qu'on aprochoit du pole. Ce qui eſt une preuve géométriquement certaine, que le méridien a la forme d'une Ellipſe, dont le grand axe paſſe par les poles de la Terre, & que par conſéquent la figure de la Terre eſt un ſphéroïde oblong.

On ne ſauroit preſque douter de l'exactitude avec laquelle ces meſures ont été priſes en France, ſi on lit les Ouvrages qu'on en a publiés, & qu'on réflechiſſe ſur les ſoins & les précautions extraordinaires employées dans ce pénible travail. La piece que M. CASSINI a donnée ſur la figure de la Terre dans les Mémoires de 1713, pag. 188, mérite une attention particuliere, par la ſolidité de ſes raiſonnements, pour établir le ſphéroïde allongé; & il ne ſemble pas que cet illuſtre Auteur ait été ébranlé dans ſon ſentiment par la ſeconde édition des *Principes Phil.* de M. NEWTON, qui parut la même année 1713, où M. NEWTON ne perſiſte pas ſeulement dans ſon opinion contraire, fondée ſur l'inégalité des pendules à ſecondes, mais il donne encore, pag. 383, une liſte (qu'on ne trouve point dans la premiere édition,) de la meſure d'un degré pris conſécutivement ſur le méridien, par où il prétend faire voir que leurs longueurs vont en augmentant depuis l'équateur juſqu'au pole; comme ſi c'étoit une affaire décidée, que l'accourciſſement des pendules fût une marque infaillible que les parties de la Terre ſont plus élevées vers l'équateur que vers les poles, au lieu qu'on n'en peut conclurre autre choſe, tout au plus, ſinon que la Terre eſt un ſphéroïde moins allon-

allongé, qu'elle ne le seroit si elle étoit encore dans son état primitif; cela veut dire, sans le mouvement diurne: ce que M. DE MAIRAN a très-bien expliqué dans ses excellentes Recherches géométriques sur la diminution des degrés en allant de l'équateur vers les poles: *Voyez les Mém. de l'Acad. de* 1720, *pag.* 231.

LXXXVII.

Enfin M. CASSINI, bien-loin de changer de sentiment après la seconde édition de l'ouvrage de M. NEWTON, nous a donné une nouvelle dissertation dans les Mémoires de 1718, p. 245, où non seulement il confirme ce qu'il avoit avancé touchant la figure oblongue de la Terre, & la précision extraordinaire avec laquelle fut prise la mesure des degrés du Méridien, mais il pousse l'exactitude jusqu'à déterminer en toises l'axe de la Terre, le diamétre de l'équateur & l'intervalle des deux foyers de l'Ellipse generatrice du sphéroïde allongé. *V. p.* 255.

Or ce grand Astronome, qui lui-même s'étoit employé à ce travail, de concert avec Mrs. MARALDI & DE LA HIRE, également habiles dans l'art d'observer, auroit-il bien avancé avec tant d'assûrance un fait, s'il n'en avoit pas été convaincu par des opérations réïtérées & vérifiées par un grand nombre d'autres?

Un surcroît de preuve se tire présentement de ma Théorie, qui décide en faveur du Sphéroïde allongé: car de ce que j'ai démontré aux §§. LXXIX, LXXX, il suit nécessairement que quand on observe qu'une Planète dans le temps de son solstice d'été est aux environs de son nœud ascendant, il faut que cette Planète ait la figure d'un sphéroïde oblong; mais parmi grand nombre d'observations que le même M. CASSINI, diligent observateur tant pour le Ciel que pour la Terre, a faites avec une assiduité infatigable, pour déterminer le mouvement des taches du Soleil, il s'en trouve une dans les Mémoires de 1703 p. 109, & les suites dans les pages suivantes, où la description exacte de deux taches qui parcouroient à peu-près le même pa-

rallele ſur le diſque du Soleil, & peu éloigné de ſon équateur, eſt entierement conforme à ma penſée; car il n'y a qu'à jetter les yeux ſur la Figure que l'obſervateur a fait graver pour tracer la route qu'ont tenuë ces deux taches, depuis le 24 Mai 1703 juſqu'au 3 Juin ſuivant.

Cette route étant ſenſiblement une ligne droite, ſi on conçoit une parallele tirée par le centre du diſque, cette parallele repréſentera l'équateur du Soleil, & il eſt viſible que du côté d'Occident elle ira au deſſous de l'écliptique marquée dans la Figure, faiſant enſemble un angle de 8 degrés, qui eſt l'inclinaiſon du plan de l'écliptique ou de l'orbite de la Terre ſur le plan de l'équateur ſolaire; de ſorte que l'interſection de ces deux lignes ſur le diſque, c'eſt-à-dire, de l'équateur & de l'écliptique, déſigne le nœud aſcendant de cette derniere par raport à l'équateur ſolaire. Par ce nœud, ſi par la penſée on tire du centre du Soleil une ligne droite juſqu'à l'orbite terreſtre, le point où cette droite la rencontre ſera le nœud aſcendant de la Terre.

C'eſt donc par le nœud aſcendant ou boreal que la Terre paſſa le 28 Mai 1703, jour marqué par M. CASSINI, p. 112, pour le paſſage de la tache par le milieu de ſon parallele, le Soleil étant alors dans le 8me degré de ♊, c'eſt-à-dire, 22 degrés ou à peu-près autant de jours avant le ſolſtice d'été.

D'où je dois inferer, ſuivant ma théorie, que la figure de la Terre eſt à la vérité celle d'un ſphéroïde allongé, conformément au réſultat des obſervations faites en France par des meſures actuelles. Je me flatte que cette conformité ne déplaira pas à Mrs. les obſervateurs, d'autant qu'elle détruit le ſoupçon de quelque inexactitude gliſſée dans leurs operations, prétexte unique de ceux qui ſont pour le ſphéroïde aplati de la Terre.

LXXXVIII.

Pour faire comprendre plus diſtinctement les differents effets que produit l'oppoſition du fluide du Tourbillon ſur les ſphéroïdes des deux differentes eſpèces; je tâcherai de mettre clairement de-

devant les yeux tout ce que j'ai démontré ci-dessus par les Figures 2 & 3. J'employerai pour cela deux nouvelles Figures qui représenteront, pour l'un & l'autre sphéroïde, ce qui lui doit arriver dans son cours, pendant une révolution entiere autour du Soleil. Je suposerai, pour subvenir à l'imagination, que l'orbite est circulaire, & que le Soleil est dans le centre; car il ne s'agit ici que d'exposer à la vûë comment se fait l'inclinaison des plans des Orbites par raport au plan de l'équateur solaire.

LXXXIX.

Soit le centre du Soleil *S*, l'équateur du Tourbillon *EFHG* concentrique, & dans un même plan avec l'équateur de la révolution du Soleil autour de son axe *BSA*, qui est perpendiculaire au plan de ces deux équateurs; *B* le pole boreal ou superieur du Soleil; *A* le pole austral ou inferieur. Concevant qu'une Planète, par exemple la Terre, se trouve d'abord sur l'équateur du Tourbillon dans le point du solstice d'été *E*, & qu'elle soit déterminée à se mouvoir autour du Soleil, nous comprendrons aisément, par ce qui a été expliqué ci-dessus, que la Terre décriroit parfaitement l'équateur du Tourbillon, je veux dire que cet équateur & l'orbite de la Terre seroient un même cercle, si la figure du Globe terestre étoit parfaitement sphérique, parce que l'uniformité de cette figure n'admettroit aucune cause exterieure, qui pût détourner la Terre de sa route une fois commencée, de même qu'un Vaisseau sphérique sur mer étant poussé suivant une certaine direction, ira toûjours dans la même direction, sans souffrir la moindre dérive. TAB. L. Fig. 4. & 5.

Mais la Terre ayant la figure de sphéroïde, il est sensible que pendant sa révolution autour du Soleil, elle présente à l'opposition de la matiere du Tourbillon une moitié de sa surface, qui change continuellement de position, & partant aussi de figure par raport à la direction, à cause que l'axe de rotation de la Terre *b a* conserve son parallèlisme, pendant que les directions du fluide opposé changent à tout moment de situation, puisque ces di-

directions ne sont autre chose que les tangentes de l'orbite. Ainsi les changements de direction causent l'inégalité de l'action du fluide sur la surface antérieure de la Terre.

Cette surface est partagée en deux parties inégales, l'une au-dessus du point le plus avancé *V* (Voyez fig. 2 & 3) l'autre au-dessous; ce qui cause de part & d'autre des impressions de forces inégales, qui font écarter la Terre, en forme de dérive, de la route qu'elle tiendroit, si elle étoit parfaitement ronde; c'est pour cela qu'elle quittera l'équateur du Tourbillon pour décrire un autre grand cercle, dont voici les conditions.

X C.

TAB. L. *Fig.* 4. Considerons en premier lieu la Terre comme un sphéroïde aplati, & suposons la placée dans le point *E*. D'abord il est clair que dans cette situation l'axe de rotation de la Terre *b a*, & l'axe de révolution du Soleil *B A*, étant prolongés, se rencontreront dans la partie superieure en *G*, & formeront le triangle rectangle *G S E*, dont l'angle *S G E* est de 23°. 30′, mesure de la plus grande déclinaison du Soleil. Il est clair aussi, que le plan du triangle *G S E* est perpendiculaire sur le plan de l'équateur du Tourbillon; d'où il suit, que s'imaginant tirée *E e* tangente de l'équateur du Tourbillon en *E*, cette tangente sera perpendiculaire à *E G*, & fera par conséquent avec l'axe de rotation *b a*, deux angles droits *e E b*, *e E a*.

Ainsi le fluide du Tourbillon s'oposant également à la partie boreale & australe de la surface qui se présente à sa direction, l'équilibre du mouvement sur l'équateur se maintiendroit parfaitement, & la Terre n'en sortiroit jamais, si l'angle *e E b* demeuroit toûjours droit. Mais comme l'axe de la Terre *b a* conserve sensiblement sa situation parallèle, on voit que dès qu'elle part du point solstitial d'été *E*, pour aller vers *F*, cet angle *e E b* diminuë de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle soit parvenuë dans son point équinoxial de l'automne, où l'angle fait par l'axe de la Terre & la ligne de direction, sera le plus petit ou le

plus

plus aigu: D'où, en vertu de ce que nous avons démontré ci-dessus (§. LXXVII) pour le sphéroïde aplati, il faut que l'opposition du fluide sur la partie boreale de la surface, soit la prévalente, ce qui fera dériver la Terre vers le pole austral du Tourbillon; ensorte qu'après le premier quartier de sa révolution, au lieu de se trouver en *F*, elle se trouvera en *L*, où l'angle *fLb* fait par la direction *fL* & l'axe *Lb* est le plus aigu.

Mais comme depuis l'endroit *L* cet angle recommence de croitre, en devenant successivement moins aigu jusqu'en *H*, qui est le point du solstice d'hyver, où l'axe de rotation de la Terre *ba* prolongé rencontre l'axe du Tourbillon en *a*, & où par conséquent la direction *bH* redevient perpendiculaire à l'axe *ba*. C'est pourquoi pendant le temps que la Terre est à parcourir le second quartier de sa révolution *LH*, l'avantage de l'action du fluide sur la partie superieure de la surface du sphéroïde aplati diminuë jusqu'à son entiere extinction au point *H*, où l'action sur la superieure & l'inferieure est dans son équilibre parfait, parce que le fluide s'opose à l'une & à l'autre d'une maniere égale & semblable.

Mais puisque l'autre action du Tourbillon, entant qu'il ne cesse de circuler continuellement d'Occident en Orient, poursuit toûjours la Terre, & tend à la remettre dans sa direction commune, comme nous l'avons expliqué ci-dessus tout au long, il est visible qu'après qu'elle a passé le point *L*, où elle a souffert sa plus grande dérive, elle doit se raprocher ensuite de l'équateur du Tourbillon, de la même maniere qu'elle s'en étoit écartée en parcourant le premier quartier.

X C I.

Il ne reste donc plus qu'à considerer la route que doit prendre la Terre, en parcourant les deux autres quartiers de son orbite. Or il est d'abord manifeste que tout se fait ici à rebours, c'est-à-dire que l'angle *hHb*, de droit qu'il étoit, commence à devenir obtus, dès que la Terre part du point solstitial d'hyver *H*,

&

& que cet angle augmente jusqu'au point *M*, où l'angle *gMb* est le plus obtus qu'il est possible ; depuis *M* cet angle décroit jusqu'en *E*, où il redevient droit.

Ainsi en apliquant nôtre raisonnement de l'article precedent à la circonstance presente, on verra par le §. LXXVIII, que l'opposition du fluide ayant ici l'avantage du côté de la surface inferieure de la Terre, la dérive se doit faire vers le pole superieur ; donc les deux derniers quartiers *HM*, *ME*, se formeront de la même maniere que les deux premiers *EL*, *LH*, par raport à leur figure, mais avec differentes positions par raport au plan de l'équateur *EFHG*, en ce que la premiere moitié de l'orbite *ELH* s'écarte de ce plan vers le pole austral, autant que la seconde s'en écarte vers le pole boreal ; si bien que le plan de l'orbite doit couper nécessairement le plan de l'équateur, qui est aussi celui du Soleil, selon nôtre théorie, dans la ligne *EH* qui passe par le centre de cet astre *S*.

Tout ce qui pourroit faire quelque peine, ce seroit de savoir pourquoi l'orbite entiere *ELHM*, formée ainsi par les dérives, est justement sur un plan, pouvant être, à ce qu'il semble, une courbe à double courbure ; mais on levera cette difficulté, si on se souvient de ce que nous avons expliqué ci-dessus, touchant la difference qu'il y a entre la force qui produit du mouvement dans un corps, & celle qui en change seulement la direction, où il a été démontré que la moindre oposition, ou une force insensible, est déja capable de changer peu à peu la direction d'un corps mis en mouvement par une force très-grande, sans pourtant que la courbe, que ce corps est obligé de décrire par l'action de cette grande force, change de nature. Ici il en est de même : la figure des orbites est causée par la gravitation des Planètes vers le Soleil, contre-balancée par les forces centrifuges, & cette gravitation a pour cause la force du Torrent central, qui est une force très-grande, par raport à laquelle l'opposition du fluide contre le mouvement des Planètes est une force comme infiniment petite, qui n'en change que la direction, c'est-à-dire qui a causé insensiblement leur dérive, laissant

ſant pour le reſte aux orbites leur figure, & aux Planètes leur viteſſe, telle qu'elles auroient ſi elles ſe mouvoient dans un grand vuide, comme le ſupoſe M. NEWTON: mais on démontre géométriquement, que la gravitation, dirigée toûjours vers le Soleil, fait que chaque orbite eſt ſur un plan, qui paſſe par le centre du Soleil; elle le ſera donc encore après qu'il lui ſera ſurvenu la dérive reglée & permanente, par où l'orbite ne perd rien de ſa figure, mais change ſeulement de poſition, paſſant du plan de l'équateur du Tourbillon ſur un autre plan qui coupe le premier, comme je l'ai dit, dans le centre du Soleil, ſous un angle *FSL* ou *GSM*, meſure de l'inclinaiſon plus ou moins grande, ſelon qu'éxige le ſphéroïde plus ou moins applati.

XCII.

Quelque petit que ſoit cet angle, même pour l'orbite de la Terre, qui eſt celle de toutes les orbites qui a la plus grande inclinaiſon, ſavoir de $7\frac{1}{2}$ degrés, il ne faut pourtant pas croire que cette inclinaiſon ait été acquiſe dès la premiere révolution de la Terre autour du Soleil; car cela marqueroit un effet trop ſenſible pour une cauſe ſi foible, telle que nous avons ſuppoſé être la force de l'oppoſition du fluide, incapable d'alterer ou de retarder la viteſſe des Planètes, mais capable ſeulement d'en changer, par la longueur du temps, les directions comme nous l'avons inſinué pluſieurs fois.

Rien ne nous empêche donc de concevoir que l'inclinaiſon des orbites ait été produite, en naiſſant inſenſiblement, & en prenant à chaque révolution un nouveau petit degré de dérive, juſqu'à parvenir, après un grand nombre de révolutions, à l'inclinaiſon totale que l'on obſerve aujourd'hui dans les orbites, & qui eſt permanente, ſans pouvoir prendre de nouvelles augmentations, étant empêchée par le mouvement du Tourbillon d'Occident en Orient, qui s'efforce ſans ceſſe de rendre aux Planètes la direction commune dans le plan de ſon équateur, comme nous l'avons expliqué aſſés amplement.

C'eſt-là le cours ordinaire des effets de la Nature, qui ne produit rien ſubitement, mais par ſucceſſion de degré en degré, quoique tantôt plus tantôt moins vite, ſelon l'intenſité de la force qu'elle employe, & la diverſité des circonſtances.

XCIII.

TAB. L. *Fig. 5.* Après tout cela, on voit que ſi la Terre avoit véritablement la figure de ſphéroïde aplati, le point *E* du ſolſtice d'eſté ſeroit le nœud deſcendant, & ſon oppoſé le nœud aſcendant. Mais en donnant à la Terre la figure de ſphéroïde allongé, il n'y a qu'à accommoder à cette hypothèſe le raiſonnment que nous avons fait juſqu'ici depuis §. XC, & on trouvera un effet entierement contraire par raport à la nature des nœuds.

Car on s'aperçoit clairement (§.LXXIX,) que la Terre étant dans ſon ſolſtice d'été *E*, ou aux environs, ſa ſurface allongée vers les poles ſera la cauſe d'une dérive boreale, qu'elle ſubira en parcourant les deux premiers quartiers de ſon orbite *EL*, *LH*, comme réciproquement la dérive doit être auſtrale depuis environ le ſolſtice d'hyver *H*, en achevant de parcourir les deux derniers quartiers *HM*, *ME*; en ſorte que dans ce cas c'eſt le point *E* qui ſera le nœud aſcendant, & *H* le deſcendant.

Voilà donc déterminés, par notre raiſonnement, les nœuds, pour le ſphéroïde allongé, à peu près comme l'expérience le confirme pour la Terre, fondée ſur les Obſervations alleguées de M. Cassini, qui aſſigne le nœud aſcendant vû du Soleil, au 8e. degré de ♐, & par conſéquent le deſcendant au 8e. degré de ♊, aſſés près des ſolſtices, qui ſeroient peut-être préciſément dans les ſolſtices mêmes, ſi l'action du fluide du Tourbillon ſolaire ſur la ſurface de la Terre n'étoit pas troublée un peu par ſon propre Tourbillon, qui intercepte en partie cette action, & par d'autres cauſes accidentelles & particulieres, dont nous avons fait mention ci-devant.

Après cette heureuſe conformité de nôtre théorie, avec les obſervations céleſtes, peut-on plus long-temps refuſer à la Terre la figu-

N.° CXLVI.

Fig. 4.

F b f a B e b S b a a A h b g a G G

Fig. 5.

F b f a B e b b a S a A g h b g a G G

figure de sphéroïde oblong, fondé d'ailleurs sur la dimension des degrés de la méridienne, entreprise & exécutée par le même M. CASSINI, avec une exactitude inconcevable ?

XCIV.

Le parallèlisme de l'axe de rotation des Planètes étant suposé être constant & parfait, il est visible que les nœuds de leurs orbites, ou leurs intersections avec l'équateur du Tourbillon, seroient entierement immobiles, & répondroient toûjours aux mêmes endroits du firmament par raport au Soleil; mais le paralèllisme est sujet à une variation, quoique très-petite, qui ne se fait sentir qu'après un grand nombre de révolutions. Il est facile d'en rendre raison par nôtre théorie: car la Planète, par exemple nôtre Terre, circulant autour des poles de l'écliptique avec sa propre vitesse, pendant que le fluide du grand Tourbillon circule de même côté, mais autour des poles de l'équateur solaire, & avec une vitesse 230 fois plus petite; c'est comme si un globe, flotant dans une eau calme, étoit obligé par une force extérieure de se mouvoir d'Occident en Orient, autour d'un centre pris à quelque distance hors du globe. Or il est aisé de concevoir que la résistance de l'eau, exercée sur la surface anterieure du globe, se fera en sens contraire d'Orient en Occident, & que cette résistance agit plus fortement contre l'hémisphère le plus éloigné du centre de circulation, que contre le plus proche, parce que celui-là, faisant un plus grand chemin en circulant que celui-ci, frape l'eau avec plus de vitesse; le globe sera donc déterminé à pirouetter sur lui-même à contre-sens de son mouvement progressif, c'est-à-dire, d'Orient en Occident, autour d'un axe perpendiculaire sur le plan de la circulation.

On en pourroit faire l'expérience semblable à celle que M. POLENI a faite, mais dans un autre dessein, voulant démontrer que le mouvement diurne des Planètes ne peut pas être causé par le mouvement du grand Tourbillon, pris à la façon

de DESCARTES. *Voyés* POLENI *de Vorticibus Cœlest.* p. 72 & 73. De-là il devient clair, comme quoi la Terre, représentée par ce globe, pendant qu'elle fait sa révolution annuelle, doit tourner sur elle-même contre l'ordre des signes, autour d'un axe perpendiculaire au plan de son orbite; par conséquent aussi l'axe oblique du mouvement diurne tournera lui-même sur cet axe perpendiculaire; d'où il suit que les poles de l'équateur terrestre paroitront décrire de petits cercles autour des poles de l'écliptique, dans la direction d'Orient en Occident.

X C V.

C'est de ce troisiéme mouvement de la Terre, que dépend (comme il est très-facile de le comprendre) le reculement des intersections de l'équateur & de l'écliptique, que l'on nomme, dans le Système de COPERNIC, *Précession des équinoxes*, parce que ces deux points reculent continuellement sur l'écliptique vers les signes précédents, ce qui produit dans les étoiles fixes & dans tous les points immobiles du Ciel, un mouvement aparent contraire d'Occident en Orient autour des poles de l'écliptique.

C'est donc ainsi que le parallèlisme de l'axe de rotation diurne de la Terre, & de toutes les Planètes qui ont cet axe oblique sur le plan de leurs orbites, ne se conserve pas exactement; mais puisque la résistance du fluide du grand Tourbillon, selon ce que nous avons démontré, doit être extrêmement foible, il faut que la variation de ce parallèlisme soit aussi très-insensible, & que le mouvement aparent qui en résulte dans les fixes soit très-lent. Comme en effet les étoiles fixes, vûës de la Terre, n'avancent dans leur longitude que de 50 secondes par an, ce qui demanderoit un temps de 25920 années pour une révolution entiere du Firmament.

Une autre chose à laquelle on n'a pas encore assés pensé, c'est peut-être que les poles de ce mouvement si tardif ne se trouvent pas précisément dans les poles de l'écliptique, comme on l'a cru jusqu'ici; en voici ma raison: il est vrai que la résistance du fluide

est

eſt directement opoſée à la direction du mouvement annuel, qui ſe fait ſur le plan de l'écliptique, & qu'à cet égard, ſi la réſiſtance agiſſoit ſeule contre le mouvement, ce qui arriveroit ſi le fluide du Tourbillon étoit tout-à-fait calme & en repos, il ne faut pas douter que le troiſiéme mouvement de la Terre, dont il eſt ici queſtion, ne ſe feroit exactement autour de l'axe perpendiculaire au plan de l'écliptique: mais le fluide du grand Tourbillon ayant lui-même ſon mouvement circulant, ſuivant la direction de l'équateur ſolaire, differente un peu de la direction de la réſiſtance; il eſt certain que de ces deux actions compliquées il réſulte une direction moyenne, quoique beaucoup plus aprochante de celle de l'écliptique, comme de la plus forte, que de celle de l'équateur ſolaire: d'où on peut raiſonnablement conclurre, que l'axe du troiſiéme mouvement eſt tant ſoit peu oblique ſur le plan de l'écliptique; or cette obliquité doit auſſi cauſer néceſſairement une petite variation aparente dans les latitudes des Fixes, mais incomparablement moins ſenſible que celles qu'on remarque dans leurs longitudes.

XCVI.

Cette variation de latitude paroit paradoxe à la plûpart des Aſtronomes, qui ne ſe mettent pas toûjours en peine des cauſes phyſiques, contents de ce qu'ils croyent ſavoir par obſervation. Cependant pluſieurs des plus fameux Aſtronomes, comme *Tycho* BRAHE lui-même, & KEPLER qui cite l'autorité du premier, favoriſent le changement de latitude des étoiles fixes: *Si comparetur* (dit KEPLER Epiſt. Aſtron. pag. 724) *Ecliptica (id eſt orbita Telluris ſub fixis) ſecum ipſa, ſecundum diverſa ſæcula, deprehendit ſane* BRAHEUS *ex mutatis fixarum latitudinibus Eclipticam hodiernam conceſſiſſe ad latera Eclipticæ priſtinæ.* Mais ſelon mon explication, il falloit dire que le mouvement aparent des fixes d'Occident en Orient ſe fait autour des poles, qui ne ſont pas préciſément dans les poles de l'écliptique, (c'eſt-à-dire, de l'orbite de la Terre,) car de cette maniere on conçoit la petite

variation de latitude, ſans qu'il ſoit beſoin que le plan de l'orbite change de place. Le plus ſimple, dans l'explication des cauſes de la Nature, eſt toûjours préférable à ce qui a moins de ſimplicité.

X C V I I.

Pour revenir maintenant aux nœuds des orbites avec l'équateur du Soleil, il faut dire, ſelon ma théorie, qu'ils ont auſſi un petit mouvement contre l'ordre des ſignes, & cela, à cauſe qu'ils ont une connexion eſſentielle, comme je l'ai fait voir, avec les points des ſolſtices; par conſéquent auſſi avec les équinoxiaux, qui en ſont éloignés de trois ſignes. En effet, il y a des Aſtronomes, qui donnent 51″ par an au mouvement retrograde des nœuds de l'orbite de la Terre avec l'équateur du Soleil, qui eſt à peu près la quantité de retrogradation annuelle des équinoxes; ce qui ſert de confirmation de la dépendance eſſentielle entre ces nœuds & les ſolſtices; choſe qui mérite d'être vérifiée ulterieurement par des obſervations exactes, afin de s'aſſûrer que c'eſt un fait general, qui regarde toutes les Planetes principales; ce qui rendroit ma conjecture tout-à-fait certaine.

X C V I I I.

Quoiqu'au reſte la déclinaiſon des limites, ou, ce qui revient au même, l'élevation des plans des orbites ſur le plan de l'équateur du Soleil, doive être conſtante & invariable, il pourra néanmoins arriver qu'on y appercevra avec le temps quelque petite variation, mais qui ne ſera qu'aparente; dont la cauſe doit être attribuée à ce changement inſenſible de latitude des étoiles fixes dont nous venons de parler. On rencontre dans l'Aſtronomie pratique une infinité d'autres minuties, qui réſultent des obſervations, que l'on prend ſouvent pour des réalités, quand ce ne ſont que de ſimples apparences, dont un ſyſtème phyſique general, quelque ſolide qu'il ſoit, n'eſt pas toûjours reſponſable.

X C I X.

XCIX.

Si je ne craignois d'être trop long dans cette quatrieme partie de mon Discours, où je me suis principalement attaché au sujet de la question, je pourrois m'étendre à d'autres phénomènes, qui ne sont pas précisément compris dans la question, mais qui y ont beaucoup de raport; tel est, par exemple, le mouvement de la Lune autour de la Terre, où on pourroit demander pareillement, d'où vient que ce mouvement ne se fait pas dans le plan de l'équateur de la Terre; car ce que les orbites des Planètes principales sont à l'égard de l'équateur du Soleil, l'orbite de la Lune & celles des autres Satellites le sont par raport à l'équateur de leurs Planètes principales; & comme celles-ci ont le grand Tourbillon general pour guide de leur mouvement autour du Soleil, ainsi les Satellites sont dirigés par les Tourbillons particuliers qui les envelopent, & qui environnent les Planètes principales dont ils sont Satellites.

Je dis que les Satellites sont *dirigés* par les Tourbillons particuliers, & non point entrainés, par la même raison que j'ai exposée tout au long pour les Planètes principales; car les uns & les autres de ces corps ont, selon ma théorie, leur mouvement d'une impression primitive, en sorte que le fluide du Tourbillon n'y contribuë toûjours que la commune direction d'Occident en Orient.

C.

Cependant, s'il m'est permis de communiquer encore en peu de pages mes pensées, sur ce qui peut être la cause physique, de ce que la circulation de la Lune autour de la Terre ne se fait pas selon le plan de l'équateur terrestre; je pense que cette cause est differente de celle qui fait l'inclinaison des orbites planètaires principales sur l'équateur du Soleil. La difference consiste dans la diverse façon du grand Tourbillon, & du Tourbillon particulier de la Terre; toutes les parties du premier font leurs circulations sur des cercles paralleles au plan de l'équateur solaire, parce que, selon

ce

ce que j'ai établi, le mouvement du Tourbillon entier & de toutes ses parties, tire son origine d'une même cause primitive, qui a commencé de faire tourner le Soleil sur son axe; le Soleil & son Tourbillon font ensemble une masse fluide totale, & n'ont qu'un même plan pour leur équateur, que les Planètes principales ne quitteroient jamais, si leur figure étoit parfaitement sphérique, ou que leur axe de rotation fût perpendiculaire sur le plan de l'équateur solaire.

Mais il en est autrement d'un Tourbillon particulier, par exemple, de celui de la Terre; car enclavé comme il est dans le grand Tourbillon general, il n'a pas la liberté de tourner avec une égale facilité dans toutes les distances de ses couches autour de l'axe de la Planète qu'il environne, ainsi qu'il le feroit s'il étoit déhors & indépendant du grand Tourbillon; mais il n'est pas mal aisé de concevoir que les couches proches de l'extrémité du Tourbillon terrestre, s'accommodent insensiblement au courant du grand Tourbillon, comme du plus fort, pendant que les couches intérieures & bien proches de la surface de la Terre conservent la direction autour de son axe de rotation; c'est pourquoi les couches d'entre deux, participant de l'un & de l'autre de ces deux effets, auront chacune leur propre direction, les plus éloignées se conformant plus à la direction de l'écliptique, ou plûtôt de l'équateur du Soleil, & les moins éloignées à la direction de l'équateur de la Terre, selon la difference distance de chacune.

C I.

De-là nous voyons la raison pourquoi la Lune, quand même elle seroit supposée parfaitement sphérique, doit se tenir si pres de l'écliptique, que son orbe n'incline sur celle-ci que de 5 degrés, au lieu que l'équateur de la Terre fait avec l'écliptique un angle de 23 $\frac{1}{2}$ degrés. C'est que le courant du fluide du Tourbillon de la Terre prend sans doute, dans la région de la Lune une direction que la Lune elle-même est obligée de prendre

dre sur un plan bien moins élevé sur l'écliptique que sur l'équateur de la Terre; marque certaine que la Lune elle-même est fort proche des confins du Tourbillon terrestre.

Si la région de la Lune étoit beaucoup au-dessous de celle qu'elle occupe presentement, ou que le Tourbillon de la Terre s'étendit beaucoup au de-là des termes que lui a prescrits la Nature, nous verrions peut-être que l'orbe de la Lune seroit tout-à-fait sur le plan de l'équateur terrestre, ou en déclineroit fort peu.

C I I.

Ma conjecture se fortifie considerablement par ce qu'on a observé sur les 5 Satellites de Saturne : c'est que les orbes ou les cercles des quatre premiers se trouvent tous sur un même plan qui est aussi le plan de son anneau ; cette uniformité ne laisse pas douter un moment, que ce plan ne soit aussi exactement le plan de l'équateur de Saturne. Or le 5me. Satellite (qui a sa distance au centre de Saturne trois fois plus grande que celle du 4me.) circule sur un orbe ; dont le plan décline beaucoup de celui des 4 premiers & de l'anneau, & s'éloigne moins de l'orbite de Saturne, que ne fait le plan commun de ceux-ci, puisque selon la suputation de M. CASSINI (*Voyez les Mém. de* 1717, *p.* 153 *&* 155) l'inclinaison véritable du cercle du 5me. Satellite par raport à l'orbite de Saturne est de 13° 8′, & l'inclinaison véritables des cercles des 4 autres Satellites & du plan de l'anneau avec l'orbite de Saturne est de 31° conformément à ce que donne M. HUGUENS pour l'obliquité de l'axe de Saturne (*V. Cosm. p.* 108) la difference est de 17° 52′, dont le cercle du 5me. Satellite s'écarte moins de l'orbite, que les cercles des autres & l'anneau.

Que doit-on conclure de tout cela ? sinon que le Tourbillon particulier de Saturne s'étend considerablement au de-là de son 5me. Satellite, mais non pas tant que la direction du fluide dans la région de ce Satellite ne commence déja à pencher vers la direction de l'orbite même de Saturne, peu differente

de la direction du grand Tourbillon, l'angle de leurs plans n'étant que d'environ *6* degrés.

Si ſuivant la conjecture de M. Huguens (*Coſm. p. 99*) il y avoit encore d'autres Satellites autour de Saturne, que le temps découvrira peut-être, ſur-tout entre les deux extrêmes, qui laiſſent entr'eux un intervalle trop grand pour avoir une juſte proportion avec les intervalles des autres, il n'y a pas à douter que le cercle de celui qui ſeroit entre le 5me & le 4me, n'eut une inclinaiſon avec l'orbite de Saturne moyenne entre 13° 8′ & 31°; comme au contraire un Satellite plus éloigné que le cinquiéme ne manqueroit pas à coup ſûr d'avoir ſon inclinaiſon moindre que 13° 8′.

CIII.

J'avouë cependant qu'une cauſe accidentelle, qu'on ne prévoit pas, pourroit démentir en aparence ma conjecture touchant un ſixiéme Satellite qui ſeroit entre les deux extrêmes; pouvant arriver que l'inclinaiſon de ſon cercle ſe trouvât hors des inclinaiſons des deux cercles voiſins. Nous en avons un exemple viſible dans le ſecond Satellite de Jupiter, dont le cercle décline un peu de ceux des trois autres, chacun deſquels circule autour de Jupiter, dans un plan commun & parallèle aux bandes de cette Planète, ce que feu M. Cassini a obſervé le premier (V. les Mém. depuis *1666* juſqu'à *1699*, Tom. VIII) quoique ſans déterminer alors de combien l'inclinaiſon du ſecond differoit de celle des trois autres Satellites.

La vérité de ce Phénomène extraordinaire fut confirmée enſuite par les obſervations de M. Maraldi (V. Mém. de *1729*, p. *399*) en vertu deſquelles il donne 4° 33′ à l'inclinaiſon du cercle du ſecond Satellite à l'égard de l'orbite de Jupiter, & la fait d'un degré & demi plus grande que celle des autres.

Pour rendre quelque raiſon plauſible de la bizarrerie de ce phénomène, je remarque que Saturne & Jupiter, à cauſe de l'énorme groſſeur de leur corps par raport à la Terre, doivent avoir

avoir auſſi leurs Tourbillons particuliers d'une étenduë beaucoup plus vaſte que celui de la Terre, tellement qu'à une diſtance aſſés grande, depuis la ſurface de ces gros corps, la direction du mouvement de leurs Tourbillons ne ſouffre point d'altération ſenſible par l'influence du Tourbillon general, mais qu'ils ſont obligés de ſuivre la direction commune du mouvement de rotation de ces deux Planètes, comme le Tourbillon general lui-même ſuit la direction de la rotation du Soleil.

C'eſt ce qui fait, comme je l'ai déja expliqué, que les quatre premiers Satellites de Saturne & ſon Anneau circulent ſelon le plan de ſon équateur, le ſeul cinquiéme s'en écartant, parce qu'il eſt à une diſtance, où le Tourbillon de Saturne commence à être déréglé un peu par l'action du grand Tourbillon ſolaire. Le Tourbillon de Jupiter ayant ſans doute la plus grande étenduë entre tous les Tourbillons particuliers, il faut convenir que tous ſes quatre Satellites ſont compris dans un eſpace autour de lui, juſqu'où l'action du Tourbillon Solaire ne ſauroit pénétrer, puiſque le plus éloigné des Satellites, auſſi-bien que le premier & le troiſieme, circule exactement ſelon le plan prolongé de l'équateur de Jupiter. Ainſi je penſe que de ce que le ſecond Satellite décline ſeul de l'équateur de Jupiter, on ne peut pas donner pour cauſe, celle qui fait décliner le cinquieme Satellite de Saturne de la direction commune de ſes compagnons.

C I V.

C'eſt pourquoi il faut recourir à une cauſe accidentelle, qui agiſſe en particulier ſur le ſecond Satellite de Jupiter, ſans que cette cauſe regarde les trois autres : mais je n'en trouve point de plus ſimple ni de plus naturelle, que celle-là même qui fait dériver les Planètes principales de la direction du grand Tourbillon, qu'elles prendroient ſi elles étoient parfaitement ſphériques.

Il n'y a donc qu'à dire, que les Satellites de ces deux grandes

Zz 2 Planè-

Planètes ſont aparemment des Globes parfaits, excepté le ſecond de Jupiter, qui peut bien être ſphéroïde ou moins globe que les trois autres; raiſon ſuffiſante pourquoi ſon cercle autour de Jupiter décline un peu de l'équateur de cet Aſtre, pendant que les trois autres obſervent exactement (à cauſe de leur ſphéricité) en circulant, la ſituation commune avec le plan de l'équateur, ſans ſouffrir aucune déviation ſenſible, qui par cela même ſont vrai-ſemblablement des globes parfaits, à l'imitation des quatre premiers Satellites de Saturne.

Je ne décide rien ſur la figure du cinquieme, ni ſur celle de la Lune (que M. NEWTON dans ſes *Princ. Natur.* Part. III, prop. 38, fondé ſur l'hypothèſe d'attraction prend pour un ſphéroïde oblong, dont il veut que l'axe ſe dirige toûjours vers la Terre) ayant déja fait voir que l'inclinaiſon de leurs orbes peut avoir lieu, quand même ces deux corps ſeroient parfaitement ſphériques; ſavoir, parce qu'ils ſe trouvent ſi avant vers les extrémités des Tourbillons de Saturne & de la Terre, où la direction de leurs cours peut être alterée par la violence du grand Tourbillon Solaire, dont la direction eſt differente de la leur.

F I N.



JOHAN-

N°. CXLVII.

JOHANNIS BERNOULLI
SOLUTIONES NOVORUM QUORUMDAM PROBLEMATUM MECHANICORUM.

Excerpta ex litteris ad Filium DANIELEM Petropolin *datis d.* 3 Jun. *St. n.* 1730.

PROBLEMA.

SIt ACK triangulum materiale rectangulum in K, quod super plano horizontali DH sine omni frictione moveri possit. Sit etiam corpus grave m, quod super hypothenusa AC positum sua gravitate descendat, pariter sine frictione; quo fiet ut, descendente corpore, triangulum jugiter ab eo pressum retrocedere cogatur. Quaeritur tum corporis, tum trianguli velocitas, tum etiam via quam corpus ex motu composito describit, atque utriusque lex accelerationis? *Comment. Acad. Petrop.* Tom. V. pag. 11. TAB. II. *Fig.* 1.

DEFINITIO.

Corpus aliquod vi acceleratrice *animari* dicitur, quando ab ea continuo ad motum urgetur, vel sollicitatur secundum quamcunque directionem.

LEMMA I.

Si corpori alicui, cujus massa A, & vis acceleratrix qua animatur p, superaddatur massa B nullam habens vim acceleratricem; animabitur massa composita vi acceleratrice $= pA:(A+B)$ [Vid. *Act. Lips.* 1714 † ubi haec fusius exposui].

† N°. XCVI, pag 170, *Tom. II.*

LEMMA II.

TAB. LI. *Fig.* 2. Si corpus aliquod C animatur, simul duabus acceleratricibus uniformibus, secundum diversas directiones CR & CS, quæ vires sint ut ipsæ lineæ CR & CS, compleaturque parallelogrammum SR; movebitur corpus secundum diagonalem CT, eodem modo ac si una tantum vi uniformi expressa per CT animaretur. Et tres istæ longitudines CR, CS, CT eodem tempore percurrerentur, si corpus singulis istis viribus seorsim animaretur, eruntque velocitates acquisitæ in R, S, T, ut ipsæ lineæ CR, CS, CT.

Patet ex compositione virium mortuarum.

LEMMA III.

Duo corpora animata diversis viribus acceleratricibus p & P, si in motu sint constituta temporibus, sive æqualibus, sive inæqualibus; erunt eorum velocitates ultimo acquisitæ in ratione composita ex subduplicata virium & spatiorum percursorum s & S, hoc est ut $\sqrt{p} \times \sqrt{s}$ ad $\sqrt{P} \times \sqrt{S}$. Demonstratur in *Act. Lips.* 1713 *.

Sequitur nunc SOLUTIO *Problematis; prævia tamen præparatione.*

TAB. LI. *Fig.* 1. Ex puncto quolibet E in hypothenusa AC trianguli rectanguli ACK erigatur recta verticalis EG, quæ repræsentet vim naturalem acceleratricem gravium, quam vocabo g; super ea formetur triangulum rectangulum EFG, cujus latus EF sit perpendiculare ad AC, alterum GF eidem AC parallelum; ductæ jam intelligantur FN, NL, LR, RS, ST, TV, &c. in infinitum, ea nimirum lege, ut prima, tertia, quinta &c. horizonti DH, secunda vero, quarta, sexta, &c. hypothenusæ AC sint parallelæ. Hinc omnia triangula EGF, EFN, ENL, ELR, &c. sunt inter se & ipsi triangulo CAK similia.

Sit

* N°. XC, §. 4, pag. 517, *Tom. I.*

Sit itaque hujus trianguli altitudo $AK = a$, basis $KC = b$, hypothenusa $AC = \surd(aa + bb) = c$. Invenietur per analogias $GF = ga : c$, $NL = gabb : c^3$, $RS = gab^4 : c^5$, $TV = gab^6 : c^7$, &c. & ita porro: $EN = gbb : cc$, $ER = gb^4 : c^4$ $ET = gb^6 : c^6$, &c. atque ita deinceps; $FN = gab : cc$, $LR = gab^3 : c^4$, $ST = gab^5 : c^5$ &c. & sic deinceps; $FE = gb : c$, $LE = gb^3 : c^3$, $SE = gb^5 : c^5$, $VE = gb^7 : c^7$, &c. & sic semper. Quæ series procedunt singulæ in progressione geometrica descendente in ratione cc ad bb. His præmissis, ita arguo: Cum pondus m, quod nunc in E esse concipimus, continuo premat æqualiter hypothenusam AC, sitque ejus vis acceleratrix GE seu g, qua nimirum ad descensum verticalem animatur, atque in hac directione, si nihil obstaret, actu descenderet: sed cum triangulum pro parte obstet descensui, & inde a pressione corporis aliquam vim acceleratricem secundum directionem horizontalem in se recipiat; videndum est quanta illa sit, tum etiam quantam retineat corpus secundum directionem hypothenusæ, & qualis retrocedente triangulo oriatur in corpore vis acceleratrix per compositionem utriusque, quamque ideo viam AP corpus describat a puncto A ad horisontalem DH. In hunc finem, concipiatur vis GE resolvi in GF & FE; illa GF sola esset acceleratrix secundum directionem hypothenusæ, si triangulum ACK esset immobile, utpote a cujus invincibili obstaculo, vis altera normalis FE tota destrueretur; sed quia triangulum est mobile, patet vim FE non omnino destrui, sed tantum imminui, & quidem in ea ratione in qua aggregatum massæ trianguli & massæ corporis (quod aggregatum massarum vocabo M) majus est quam massa solius corporis m. Unde si triangulum ACK cedere posset secundum directionem FE, foret, per LEMMA I, vis acceleratrix totius systematis, hoc est, tam trianguli quam corporis in hac directione, $= \frac{m}{M}$ FE, manente interim etiam in corpore priore vi acceleratrice secundum directionem AC & expressa per GF. Sed quia triangulum non cedit secundum FE, propter oppositionem plani immobilis horizontalis DH: resolvenda

venda eſt vis acceleratrix $\frac{m}{M}$ FE, quatenus eſt in corpore, in FN & NE; & habebitur $\frac{m}{M}$ FN & $\frac{m}{M}$ NE, quarum illa $\frac{m}{M}$ FN animat ſyſtema, adeoque & ipſum triangulum ad retrocedendum ſecundum directionem horizontalem; hæc autem $\frac{m}{M}$ NE porrò reſoluta in NL & LE, dat $\frac{m}{M}$ NL & $\frac{m}{M}$ LE, ex quibus illa $\frac{m}{M}$ NL contribuit cum priore GF ad motum corporis in directione AC, hæc vero $\frac{m}{M}$ LE [quæ contribuit ad animandum corpus *m* in directione LE, ipſi autem aſſociatur maſſa trianguli] ſimili modo tractanda eſt ut antea cum FE factum eſt; erit namque per LEMMA I, $\frac{m}{M} \times \frac{m}{M} \times$ LE, ſeu $\frac{mm}{MM}$ LE, nova pars vis acceleratricis, qua totum ſyſtema, hoc eſt corpus & triangulum, ſecundum LE ſolicitaretur, ſi planum immobile DH non obſtaret; reſolvatur ergo hæc vis $\frac{mm}{MM}$ LE in LR & RE, eritque $\frac{mm}{MM}$ LR, & $\frac{mm}{MM}$ RE, quarum illa $\frac{mm}{MM}$ LR dat novam partem vis acceleratricis priori adjiciendam ad animandum ſyſtema, ipſumque adeo triangulum in directione horizontali; hæc vero $\frac{mm}{MM}$ RE ulterius reſoluta in RS & SE dat $\frac{mm}{MM}$ RS & $\frac{mm}{MM}$ SE, quarum illa $\frac{mm}{MM}$ RS eſt iterum nova pars vis acceleratricis in corpore ad illud animandum in directione AC, ſed altera $\frac{mm}{MM}$ SE, ope LEMMATIS I, tractata dabit etiam novam partem vis acceleratricis nempe $\frac{mmm}{MMM}$ ST, qua triangulum in directione horizontali animatur: atque ita deinceps procedatur in infinitum. Quo facto liquet, omnes particulares acceleratrices ſecundum GF, NL, RS, TV, &c. ſimul ſump-

tas

tas dare vim totalem acceleratricem, qua corpus m secundum directionem hypothenusæ AC animatur, motuque uniformiter accelerato descendit; omnes vero particulares secundum FN, LR, ST &c. simul sumptas, dare pariter vim acceleratricem totalem, qua triangulum, vel si mavis totum systema retro urgetur secundum directionem horizontali DH parallelam, ac proin etiam motu uniformiter accelerato movetur. His itaque in unum collectis, habebimus has duas progressiones; erit nempe vis acceleratrix totalis in corpore m secundum AC, $= GF + \frac{m}{M} NL + \frac{mm}{MM} RS + \frac{mmm}{MMM} TV +$ &c. Et vis totalis acceleratrix totius systematis seu trianguli secundum DH $= \frac{m}{M} FN + \frac{mm}{MM} LR + \frac{mmm}{MMM} ST +$ &c. Substitutis jam valoribus supra inventis linearum GF, NL, RS, nec non linearum FN, LR, ST &c. obtinebitur vis prior pro accelerando corpore secundum AC $= \frac{ga}{c} + \frac{m}{M} \times \frac{gabb}{c^3} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^4}{c^5} + \frac{mmm}{MMM} \times \frac{gab^6}{c^7} +$ &c. Atque vis altera pro accelerando systemate secundum DH $= \frac{m}{M} \times \frac{gab}{cc} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^3}{c^4} + \frac{mmm}{MMM} \times \frac{gab^5}{c^6} +$ &c. Quæ duæ progressiones sunt manifeste geometricæ & descendentes in ratione Mcc ad mbb, adeoque sunt summabiles: invenitur nimirum summa progressionis prioris $= gacM : (ccM - bbm)$ ac summa posterioris $= gabm : (ccM - bbm)$. Quod erat inveniendum pro utriusque lege accelerationis.

COROLLARIUM I.

Quoniam $\frac{gacM}{ccM - bbm} : \frac{gabm}{ccM - bbm} = cM : bm$; erit vis acceleratrix corporis in directione hypothenusæ, ad ejusdem ut & trianguli vim acceleratricem in directione horizontali, in ratione composita ex ratione hypothenusæ ad basin trianguli, & ratione massæ totius systematis ad massam corporis.

COROLLARIUM II.

Hinc, quia corpus animatur ſimul duabus viribus acceleratricibus, una ſecundum hypothenuſam, altera ſecundum horizontalem, quæ ſe habent ut cM ad bm, ſi capiatur CP ita ut $cM : bm = c$, ſeu $AC : CP = \frac{mb}{M} = \frac{m}{M} \times CK$, ducaturque AP, erit, per *Lemma II*, AP via, quam corpus utraque vi animatum, realiter deſcribit. Quod erat inveniendum pro ſecundo.

COROLLARIUM III.

Cum ſit $CP = mb : M$, erit $KP = (Mb - mb) : M$, adeoque $CP : KP = m : M - m$; hoc eſt, ut maſſa corporis ad maſſam trianguli, & cum, per idem *Lemma II*, eo tempore, quo corpus ab A ad P deſcendit, triangulum ipſum retrocedat, per intervallum CP, ita ut apex trianguli C futurus ſit in eodem puncto P; manifeſtum eſt, ſi intelligatur tota quantitas materiæ trianguli concentrata in ſupremo trianguli apice A, fore CP, cui æqualis erit diſtantia quantitatis materiæ collectæ a perpendiculari AK, ad KP quæ eſt diſtantia corporis ab eadem perpendiculari AK verſus plagam oppoſitam ei verſus quam reperitur apex A, ut m ad $M - m$; hoc eſt, in ratione reciproca maſſarum corporis & trianguli, idque cum ſemper ſe habeat, ubicunque ſumatur punctum P in recta AP, liquet centrum commune gravitatis materiæ trianguli concentratæ & corporis deſcendere in eadem ſemper perpendiculari AK; per conſequens, etiam ſi materia per totum triangulum diffuſa ſit, tamen commune centrum gravitatis totius ſyſtematis durante motu in eadem ſemper linea verticali deſcendere. Quam quidem proprietatem ex alio etiam principio generaliſſimo demonſtrare poſſum.

COROLLARIUM IV.

Cum corpus aliquod grave, quod nempe vi acceleratrice naturali

turali g animatur, libere descendens per altitudinem AK seu a, acquirat velocitatem trianguli ultimo acquisitam, postquam nempe apex C percurrit spatium CP, faciendum est per *Lemma III*, ut $\sqrt{g} \times \sqrt{a}$ ad $\sqrt{(gabm : (ccM - bbm))} \times \sqrt{(mb : M)}$, ita $\sqrt{a}$ ad quartam $mb\sqrt{(a : (ccMM - bbmM))}$, quæ erit = velocitati finali trianguli: ut vero habeatur velocitas corporis in P, postquam nempe re ipsa spatium AP percurrit, quærenda primo est longitudo AP seu $\sqrt{(AK^2 + PK^2)}$ & reperietur $\sqrt{(MMaa + MMbb - 2Mnbb + mmbb)} : M = \sqrt{(MMcc - 2Mmbb + mmbb)} : M$. Nunc faciendum est, per partem secundam *Lemmatis* secundi, ut CP ad AP, hoc est ut $mb : M$ ad $\sqrt{(MMcc - 2Mmbb + mmbb)} : M$, seu ut mb ad $\sqrt{(MMcc - 2Mmbb + mmbb)}$, ita velocitas inventa trianguli, quæ est $mb\sqrt{(a : (ccMM - bbMm))}$ ad velocitatem quæsitam realem corporis in P, quæ itaque erit $\sqrt{((MMacc - 2Mmabb + mmabb) : (ccMM - bbMm))}$; quod erat inveniendum pro primo.

COROLLARIUM V.

Hinc confirmatur conservatio virium vivarum: multiplicando enim quadratum velocitatis finalis trianguli per ipsius massam, provenit vis viva trianguli $= (abbmmM - abbm^3) : (ccMM - bbmM)$; atque multiplicando quadratum velocitatis actualis corporis m in puncto P per massam ipsius, habebitur vis viva corporis $(accMMm - 2abbMmm + abbm^3) : (ccMM - bbmM)$, adeoque summa utriusque $= (accMMm - abbMmm) : (ccMM - bbMm) = am$; hoc est = vi vivæ solius corporis m si libere ex A in K caderet. *Q. E. D.*

COROLLARIUM VI.

Etiam hoc, curiositatis gratia, solvi potest Problema; qualem nempe inclinationem dare conveniat hypothenusæ AC, ita ut, manentibus massis tam corporis quam trianguli, ut & altitudine AK, triangulum velocissime retro pellatur, ipsumque adeo

 corpus

corpus in puncto P habeat minimam possibilem velocitatem? In hunc finem, ex vi acceleratrice trianguli, quæ est $gabm : (ccM - bbm)$, seu [substituta $aa + bb$ pro cc] $gabm : (aaM + bbM - bbm)$ faciendum est maximum, supponendo litteram b variabilem, reliquas vero omnes invariabiles: hoc pacto enim invenitur per communem regulam de maximis & minimis, $b = a\sqrt{(M : (M - m))}$; proinde $\sqrt{(M - m)} : \sqrt{M} = a : b$; hoc est, sinus totus debet esse ad tangentem anguli KAC in subduplicata ratione massæ trianguli & corporis. Unde sequitur, angulum KAC semirecto semper majorem esse debere. Et nominatim, si M sit duplum ipsius m, id est, si massa trianguli sit æqualis massæ corporis, erit $a : b = 1 : \sqrt{2}$, seu ut latus quadrati ad diagonalem; id quod facit ut angulus KAC, ceu ex Tabulis tangentium habetur, sit quamproxime 54 grad. 44 min. qui etiam est angulus quem facere debet manubrium gubernaculi cum carina navis, ut hæc quampromptissime gyrari possit, sicuti docui in meo *Manuario Nautico*, Cap. V. art. 17 †, nec non angulus obliquitatis sub quo globus aliquis elasticus impingere debet in duos alios, qui junctim sumti habeant massam ipsi æqualem, ita ut hi quam celerrime a se invicem recedant. Vid. *Differt.* meam, Cap. XI. art. 14 *.

S C H O L I O N.

Non inconsultum duco ostendere, quomodo alia hujusmodi Problemata per methodum nostram hic expositam solvi possint. Sit, exempli gratia, idem triangulum ACK gravitatis quidem expers, sed datam quantitatem materiæ nullius gravitatis in se continens; quod moveri possit super plano inclinato DH ad horizontem. Hypothenusa CA supponitur horizontalis, latus AK perpendiculare ad basin CK, incumbat vero hypothenusæ AC corpus grave E, libertatem habeat fluendi super AC sine omni frictione; sicuti triangulum materiale non grave ACK supponitur fluere posse liberrime super plano declivi

TAB. LI. *Fig.* 3.

† XCI. pag. 39, 40. *Tom. II.* * N°. CXXXV. pag. 63. supra.

clivi DH. Quæritur, si hoc triangulum a pondere corporis incumbentis pressum descenderit, ac simul cum eo ipsum quoque corpus, qualem quovis in loco velocitatem habeat tam corpus quam triangulum?

SOLUTIO.

Quod attinet ad motum corporis E, haud difficulter intelligitur, illum continuo fieri in eadem verticali GE. Sed ut determinemus vim acceleratricem, qua descendit triangulum super plano declivi DH; rem ita præstabimus. Per GE exponatur gravitas, seu vis naturalis acceleratrix corporis E, quæ ut ante dicatur $= g$; resolvatur ea in GF parallelam plano DH & in EF eidem normalem. Sit quoque hypothenusa $AC = c$, $AK = a$, $CK = b$; massa corporis $= m$, massa totius systematis $= M$, adeoque massa trianguli $= M - m$. Erit ob similia triangula GEF & ACK, $GF = ga : c$ & $EF = gb : c$. Concipiamus tantisper cessare vel demtam esse vim GF, & solam agere vim FE; habebimus casum præcedentem, ubi DH tanquam linea horizontalis, & FE tanquam vis verticalis considerari debet; hinc ergo per solutionem præc. inveniemus vim acceleratricem trianguli ACK secundum directionem DH; cui nunc ea, quam negleximus, iterum addi debet quæ ex GF resultat, utpote quæ cum parallela sit plano eidem DH, tota impenditur ad pellendum systema in directione DH; cognita sic velocitate trianguli, cognoscitur etiam velocitas realis corporis in E secundum directionem GE. Retentis itaque iisdem litteris ponendum est $gbm : cM$ pro g, in $gabm : (ccM - bbm)$, quod vim acceleratricem trianguli denotabat in præcedenti casu, & prodibit $gabbmm : (c^3 MM - bbcMm)$ pro vi acceleratrici, qua triangulum animatur, resultante tantum ex FE in præcedenti casu; huic nunc addendum est, quod insuper acquirit a $GF = ga : c$, quod ideo est $gam : cM$; unde emergit trianguli vis acceleratrix totalis $= gabbmm : (c^3 MM - bbcMm) + gam : cM = gacm : (ccM - bbm)$. Quare faciendo hic

etiam, per *Lem. III*, ut $\sqrt{ga}$ ad $\sqrt{(gabbmm:(ccMM-bbMm)+gam:M)}$ ita $\sqrt{a}$, seu velocitas naturalis acquisita ex casu libero per altitudinem æqualem ipsi AK, ad velocitatem trianguli postquam apex C percurrit spatium super DH æquale ipsi c seu hypothenusæ AC, quæ itaque velocitas erit $= c\sqrt{(am:(ccM-bbm))}$. Est autem CA ad AK, seu c ad a, ut modo inventa trianguli velocitas super plano DH ad actualem seu realem velocitatem corporis in directione verticali GE; unde velocitas corporis $= a\sqrt{(am:(ccM-bbm))}$. Quod erat inveniendum pro determinandis velocitatibus.

C o r o l l a r i u m.

Etiam ex hac, ut ex præcedente solutione a priori instituta mirifice confirmatur conservatio virium vivarum; etenim vis viva trianguli $= accm(M-m):(ccM-bbm)$, & vis viva corporis $= a^3mm:(ccM-bbm)$, quarum summa [instituto calculo] invenitur $= am$, quemadmodum fieri par est, ut conservetur vis viva, quæ esset in corpore m libere descendente per altitudinem verticalem æqualem ipsi AK. Reducendo velocitates ad communem denominatorem, invenitur velocitas trianguli $= c\sqrt{aM}:\sqrt{(ccM-bbm)}$ & velocitas corporis $= a\sqrt{am}:\sqrt{(ccM-bbm)}$.

N O T A.

Si præterea velimus, ut ipsum quoque triangulum AKC gravitet pro ratione suæ massæ $M-m$; eodem ratiocinio, quo ante in solutione Scholio subjuncta fecimus, utendum est; nisi quod jam per GE exponenda sit gravitas, seu vis naturalis acceleratrix in directione verticali, non tantum corporis E, sed totius systematis; corpus quippe & triangulum in hoc casu communem habent gravitationem naturalem. Hinc ergo jam ipsa GF, seu $ga:c$, designabit partem vis acceleratricis totius systematis & proinde trianguli, quam tantisper cessare vel demtam esse

esse concipiamus, dum altera tantum EF, seu $gb:c$, systema totum, proinde etiam corpus urget normaliter ad planum DH. Atque ita habebimus casum primum, ubi DH tanquam horizontalis & FE tanquam vix acceleratrix verticalis, qua corpus animatur, consideranda est. Quare si in $gabm:(ccM - bbm)$ [quod in illo primo casu exprimebat vim acceleratricem totalem trianguli] ponamus $gb:c$ pro g, orietur $gabbm:(c^3M - bbcm)$ pro vi qua triangulum animatur, resultante tantum ex FE in hoc casu. Ei igitur addenda nunc est vis altera partialis, quam hactenus neglenximus, oriunda ex GF, quam vim modo vidimus esse $ga:c$. Et ita obtinemus pro præsenti casu vim acceleratricem totalem trianguli $= gabbm:(c^3M - bbcm) + ga:c =$ [facta reductione] $gacM:(ccM - bbm)$. Faciendo nunc, per *Lemma III*, ut $\surd ga$ ad $\surd(gaccM:(ccM - bbm)$, ita $\surd a$, seu velocitas naturalis acquisita ex descensu libero per altitudinem æqualem ipsi AK, ad velocitatem trianguli, quam habebit postquam percurrit spatium æquale ipsi c seu hypothenusæ AC; quare ergo velocitas erit $= \surd(accM:(ccM - bbm))$; faciendo nunc porro ut CA ad AK seu c ad a, ita modo inventa velocitas trianguli $\surd(accM:(ccM - bbm))$ ad $\surd(a^2M:(ccM - bbm)$; quæ erit velocitas realis corporis in directione verticali GE. *Q. E. I.*

COROLLARIUM.

Hinc quoque patet conservari quantitatem virium vivarum; nam vis viva trianguli $= accM:(ccM - bbm) \times (M - m)$ $= (accMM - accMm):(ccM - bbm)$, & vis viva corporis $= a^2Mm:(ccM - bbm)$, quæ simul sumtæ faciunt $(accMM - accMm + a^2Mm):(ccM - bbm) =$ [ob $cc - aa = bb$] $(accMM - abbMm):(ccM - bbm) = aM =$ vi vivæ quam acquireret totum systema grave, si libere ex altitudine verticali & æquali ipsi AK, seu a, caderet. *Q. E. D.*

JOHAN-

N°. CXLVIII.

JOHAN. BERNOULLI,

DEMONSTRATIO METHODI ANALYTICÆ,

Qua usus est pro determinanda aliqua Quadratura exponentiali per seriem, traditam olim in Actis Eruditorum A. 1697. pag. 131 *.

I.

PRincipia calculi exponentialium, a me primum inventa, ac postea quoque publici juris facta in *Actis anni 1697 Mense Martio*, pro ea qua fuerunt fœcunditate, uberrimam dederunt Eruditis materiam provehendi pomœria Geometriæ sublimioris, per incrementum hoc novum calculi infinitesimalis, antea non satis, vel omnino non cognitum.

II.

Inter exempla curvarum exponentialium, quæ ibi tractaveram, occurrit aliqua ex classe harum curvarum, cujus natura exprimitur hac æquatione $x^x = y$, nominando coordinatas x & y; vid. pag. 130 & 131 †; ubi postquam varias ostendissem affectiones, inservientes partim constructioni ipsiusmet curvæ, partim ducendis tangentibus, partim etiam *Maximorum* vel *Minimorum* quorundam determinationi, quæ omnia circa insolitam hanc materiam non spernenda videbantur, tandem in mentem venit aliquid dicere de assignanda quadratura, hoc est, de inveniendo [in hac curva] $\int y\,dx$ seu $\int x^x\,dx$. Quod quomodo perageretur, tunc quidem ostendere non erat ex instituto meo; quocirca contentus fueram, unicum, quasi in transitu, exponere casum, qui præ cæteris ob insignem sui singularitatem videbatur mereri

* N°. XXXVI. pag. 185. *Tom. I.* † Pag. 184, 185. *Tom. I.*

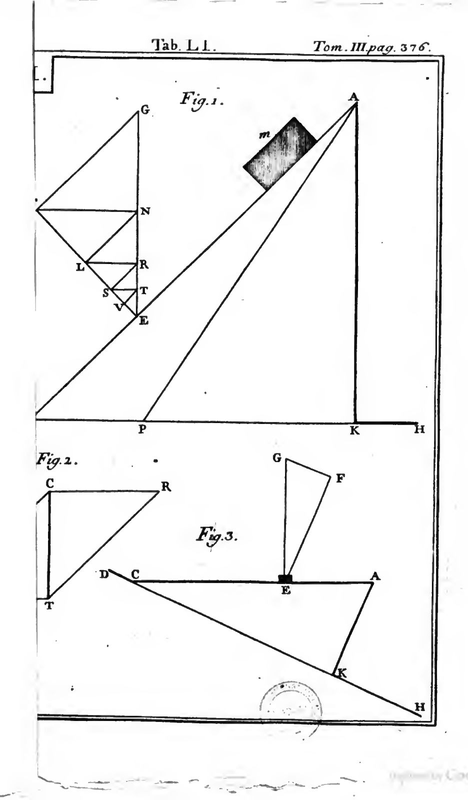
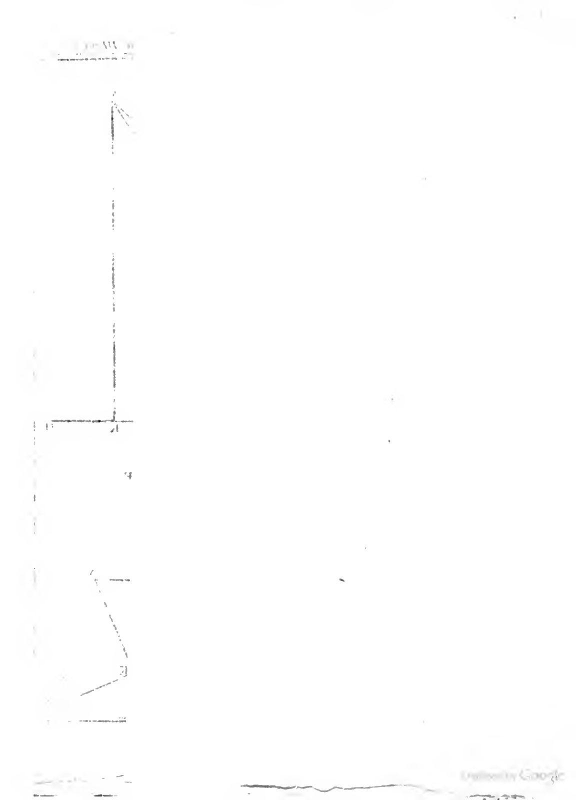


Fig. 1.
A
G
m
N
L
R
S
T
V
E
P
K
H
Fig. 2.
C
R
T
Fig. 3.
G
F
D
C
E
A
K
H



mereri aliquam attentionem, suppressa tamen in hunc usque diem demonstratione.

III.

Casus autem, de quo hic sermo, ita habet: Sit abscissa $x = 1$; adeoque etiam ordinatim applicata y seu $x^x = 1$; erit, ut tum jam inveneram & insinuaveram, area curvæ hisce ordinatis respondens, hoc est $\int x^x\, dx = 1 - 1:2^2 + 1:3^3 - 1:4^4 + 1:5^5$ — &c... &c. Quæ series mirabili adeo celeritate convergit, ut terminus decimus $1:10^{10}$ nonnisi unicam decimam millesimam millionesimam particulam constituat unitatis, seu termini primi.

IV.

Sicuti summus tum temporis Geometra LEIBNITIUS, cum quo frequens litterarum commercium colueram, ita quoque alii Viri insignes, hujus seriei concinnitatem & elegantiam mirati, originem ejus, quam sibi non obviam fuisse, ingenue fatebantur, a me edoceri maluerunt, quam ei investigandæ diu frustra insudare. Nec defuere, longo post tempore, qui ex locis non tantum vicinis, sed procul quoque remotis, me convenientes, vel saltem per litteras compellantes, analysin abs me peterent rei hujus, quæ tamen non adeo abstrusa, vel inventu difficilis, rectam viam incedentibus apparebit.

V.

Ut itaque ulteriores prævenirem solicitationes, cum præsertim nuper admodum idem ad me factum fuerit petitum, tandem commodum fore judicavi atque utile ad avertendas importunas preces, si semel pro semper luci publicæ exponerem calculum nullo sane mysterio dignum. En igitur processum. Ex logarithmo posito z invenitur numerus N, formando hanc seriem:

$N = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} +$ &c. id quod jam dudum cognitum eſt, atque nunc tritiſſimum.

V I.

Per naturam logarithmorum, ſcitur eſſe logarithmus ipſius $z^p = plz$ [per l intelligitur logarithmus quantitatis, quæ eandem litteram immediate ſequitur]; unde logarithmus ipſius $x^x = xlx$. Scribendo igitur in ſerie præcedente pro z, zz, z^3, z^4, z^5, &c. eorum valores xlx, x^2lx^2, x^3lx^3, x^4lx^4, x^5lx^5, &c. habebimus ipſum ejus numerum ſeu x^x expreſſum per ſuos logarithmos & logarithmorum potentias; hinc oritur ſequens ſeries: $x^x = 1 + xlx + \frac{x^2lx^2}{2} + \frac{x^3lx^3}{2.3} + \frac{x^4lx^4}{2.3.4} + \frac{x^5lx^5}{2.3.4.5} +$ &c. cujus ſinguli termini multiplicati per dx dabunt elementum $x^x dx$ figuræ quadrandæ.

V I I.

Reſtat ut integrentur ſinguli termini hujus ſeriei $(1 + xlx + \frac{x^2lx^2}{2} + \frac{x^3lx^3}{2.3} + \frac{x^4lx^4}{2.3.4} + \frac{x^5lx^5}{2.3.4.5} + \&c)\,dx$, quod fit, ſi unus quiſque ſeparatim tractetur, ac debito modo convertatur in plures alios, qui bini & bini ſumpti ex ipſa formatione reddantur integrabiles; ſicuti hoc olim ita præſtiti in formatione meæ ſeriei univerſalis, omnes integrationes generaliſſime complectentis: vid. *Acta Erud. Menſe Nov. A.* 1694 *. Ita exempli gratia, ſi ſecundus terminus $(xlx)\,dx$ ſub hac facie exponatur $(xlxdx + \frac{1}{2}xxdlx) - \frac{1}{2}xdx$, cui revera æqualis eſt $xlxdx$, ideo quia $dlx = dx : x$, proinde $\frac{1}{2}xxdlx$ deſtruitur per $-\frac{1}{2}xdx$; erit igitur terminus $(xlx)\,dx$ abſolute integrabilis ſub hac facie (*x*

* N°. XXI, pag. 125, *Tom. I.*

$(x\,lx\,dx + \frac{1}{2}xx\,dlx) - \frac{1}{2}x\,dx$ expreſſus; ejus namque integrale eſt $= \frac{1}{2}xx\,lx - \frac{1}{4}xx$; ſimili modo cum reliquis erit procedendum.

VIII.

Iſta itaque alterna ſignorum poſitio, qua quantitates ſub alia facie poſitæ deſtruunt præcedentes, ſi probe obſervetur, termini dx, $x\,lx\,dx$, x^2lx^2dx, $x^3lx^3\,dx$, &c. exponentur, ut ſequens refert Tabula;

$$dx = (dx)$$

$$x\,lx\,dx = (x\,lx\,dx + \tfrac{1}{2}xx\,dlx) - \tfrac{1}{2}x\,dx.$$

$$x^2\,lx^2dx = (x^2lx^2dx + \tfrac{2}{3}x^3\,lx\,dlx) - (\tfrac{2}{3}x^2lxdx + \frac{2}{3^2}x^3\,dlx) + \frac{2}{3^2}x^2\,dx$$

$$x^3lx^3dx = (x^3lx^3dx + \tfrac{3}{4}x^4lx^3dlx) - (\tfrac{3}{4}x^3lx^2dx + \frac{3\cdot 2}{4^2}x^4lxdlx) + (\frac{3\cdot 2}{4^2}x^3lxdx + \frac{3\cdot 2}{4^3}x^4dlx) - \frac{3\cdot 2}{4^3}x^3\,dx$$

$$x^4lx^4dx = (x^4lx^4dx + \tfrac{4}{5}x^5lx^3dlx) - (\tfrac{4}{5}x^4lx^3dx + \frac{4\cdot 3}{5^2}x^5lx^2dlx) + (\frac{4\cdot 3}{5^2}x^4lx^2dx + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{5^3}x^5lx\,dlx) - (\frac{4\cdot 3\cdot 2}{5^3}x^4lxdx + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{5^4}x^5dlx) + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{5^4}x^4dx.$$

$$x^5\,lx^5\,dx = (\ \&c.$$

IX.

Hæc ita continuabuntur, quouſque libuerit, quorum ſi capiuntur integralia per partes ſingulis parentheſibus (...) incluſas, reſultabunt ſequentia:

$$\int dx \quad = x.$$

$$\int x\,lx\,dx = \tfrac{1}{2}xx\,lx - \frac{1}{2^2}xx.$$

$$\int x^2lx^2dx = \tfrac{1}{3}x^3lx^2 - \frac{2}{3^2}x^3\,lx + \frac{2}{3^3}x^3$$

$$\int x^3lx^3dx = \tfrac{1}{4}x^4lx^3 - \frac{3}{4^2}x^4lx^2 + \frac{3.2}{4^3}x^4lx - \frac{3.2}{4^4}x^4.$$

$$\int x^4lx^4dx = \tfrac{1}{5}x^5lx^4 - \frac{4}{5^2}x^5lx^3 + \frac{4.3}{5^3}x^5lx^2 - \frac{4.3.2}{5^4}x^5\,lx$$

$$+ \frac{4.3.2}{5^5}x^5.$$

$$\int x^5lx^5dx = \&c.$$

X.

Lex progreſſionis terminorum cum ſatis ſit evidens, ſuperfluum foret explicare, quomodo hæc Tabula ſit ulterius extendenda; hoc tantum faciendum ſupereſt, ut integremus ex hac Tabula terminos ſeriei, in Artic. VII expoſitæ $\int(1 + x\,lx + \frac{x^2lx^2}{2} + \frac{x^3lx^3}{2.3} + \frac{x^4lx^4}{2.3.4} + \frac{x^5lx^5}{2.3.4.5} + \&c.)\,dx$, quæ erit æqualis quæſito $\int x^x dx$. In hunc finem multiplicentur valores terminorum $\int dx$, $\int x\,lx\,dx$, $\int x^2lx^2dx$, $\int x^3lx^3dx$, &c. per has fractiones reſpective ſumtas $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$ &c. eritque, poſitis columnis, quæ ſunt verticales, in ſitum horizontalem, area vel $\int x^x dx =$

$$x + \frac{1}{2}x^2lx + \frac{1}{2.3}x^3lx^2 + \frac{1}{2.3.4}x^4lx^3 + \frac{1}{2.3.4.5}x^5lx^4 + \&c.$$

$$- \frac{1}{2^2}x^2 - \frac{1}{3^2}x^3lx - \frac{1}{2.4^3}x^4lx^2 - \frac{1}{2.3.5^2}x^5lx^3 - \&c.$$

$$+ \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{4^3}x^4lx + \frac{1}{2.5^3}x^5\,l\,x^2 + \&c.$$

$$- \frac{1}{4^4}x^4 - \frac{1}{5^4}x^5\,l\,x - \&c.$$

$$+ \frac{1}{5^5}x^5 + \&c.$$

XI.

X I.

Hinc primo obtutu ultro patefcit, in cafu, quo $x = 1$, terminos omnes, in quibus reperiuntur lx, ejufque potentiæ lx^2, lx^3, lx^4, &c. evanefcere, ex natura logarithmorum, qua fit ut logarithmus unitatis fit $= 0$. Deftructis itaque iftis terminis: fuperftites remanebunt initiales tantum termini ferierum horizontalium, qui proinde [fcribendo ubique unitatem pro x, x^2, x^3, &c.] formabunt hanc feriem $\int x^x\,dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \&c.$ *Q. E. D.*

X I I.

S C H O L I U M.

Modus Artic. VIII adhibitus, refolvendi terminos $x\,lx\,dx$, $x^2\,lx^2\,dx$, $x^3\,lx^3\,dx$, &c. per alternam additionem & fubtractionem æquivalentium, ad id inftitutam ut integrabiles fiant, ficuti oftenfum eft Artic. IX; modus, inquam, ifte poteft reddi generalis, explicando nempe, quo artificio integrari poffit terminus $x^m\,lx^e\,dx$, ubi m & e funt exponentes dati qualefcunque quantitatum x & lx. En ipfum proceffum $x^m\,lx^e\,dx =$

$$(x^m\,lx^e\,dx + \frac{1}{m+1}x^{m+1}\,dlx^e) - (\frac{e}{m+1}x^m\,lx^{\overline{e-1}}\,dx + \frac{e}{(m+1)^2}x^{m+1}\,dlx^{\overline{e-1}}) + (\frac{e.\overline{e-1}}{(m+1)^2}x^m\,lx^{\overline{e-2}}dx + \frac{e.\overline{e-1}}{(m+1)^3}x^{m+1}\,dlx^{\overline{e-2}}) - (\frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{(m+1)^3}x^m\,lx^{\overline{e-3}}dx + \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{(m+1)^4}x^{m+1}\,dlx^{\overline{e-3}}) + \&c.$$

Æqualitas ifta nititur deftructione terminorum fecundi & tertii, quarti & quinti, fexti & feptimi, atque fic porro; quo fit ut reipfa primus tantum terminus fuperftes maneat, æqualis utique ei, qui ad integrandum proponitur, dum interim progreffio terminorum ea arte eft facta, ut bini quilibet junctim fumti, & fignis parentheticis (...) inclufi, fiant integrabiles. Etenim integratione rite inftituta;

habetur $\int x^m lx^e\,dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} lx^e - \frac{e}{(m+1)^2} x^{m+1} lx^{e-1}$ $+ \frac{e.e-1}{(m+1)^3} x^{m+1} lx^{e-2} - \frac{e.e-1.e-2}{(m+1)^4} x^{m+1} lx^{e-3} +$ &c.

XIII.

Corollarium.

Quotiescunque exponens e est numerus integer affirmativus, liquet seriem abrumpi, atque tot acquirere terminos, quot sunt unitates in $e+1$. Sed, si series terminorum numero infinitorum pro quocunque casu admittere velimus, alia insuper suppetit methodus construendi ejusmodi series haud sane inconcinnas, quæ exprimunt valorem ipsius $\int x^m lx^e\,dx$. Rem ita exequor: Pono $(m+1)\, lx = y$, erit $x^{m+1} = ny$ [per ny intelligo numerum ipsius y, sicuti semper per lx mihi intelligitur logarithmus ipsius x,] unde $lx^e = \frac{1}{(m+1)^e} y^e$. Est autem, ut dudum constat, $ny = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{2.3.4}y^4 +$ &c. Differentiando hanc seriem, habetur $d(ny)$ seu $(m+1)$ $x^m dx = dy(1 + y + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{2.3.4}y^4 +$ &c.$)$; multiplicando membrum prius per $\frac{1}{m+1} lx^e$ & alterum per æquale $y^e : (m+1)^{e+1}$ prodibit $x^m lx^e\,dx = \frac{dy}{(m+1)^{e+1}} \times (y^e + y^{e+1}$ $+ \frac{1}{2}y^{e+2} + \frac{1}{2.3}y^{e+3} + \frac{1}{2.3.4}y^{e+4} +$ &c.$)$; sumtis autem actu ipso integralibus terminorum singulorum, obtinebimus $\int x^m lx^e\,dx$ $= \frac{1}{(m+1)^{e+1}} \times \left(\frac{y^{e+1}}{e+1} + \frac{y^{e+2}}{e+2} + \frac{y^{e+3}}{2(e+3)} + \frac{y^{e+4}}{2.3(e+4)} + \frac{y^{e+5}}{2.3.4(e+5)}\right.$ $+$ &c.$)$ $=$ [substituto loco y ejus valore $(m+1)\, lx$] $\frac{lx^{e+1}}{e+1} + \frac{(m+1)^1 lx^{e+2}}{e+2} + \frac{(m+1)^2 lx^{e+3}}{2(e+3)} + \frac{(m+1)^3 lx^{e+4}}{2.3.(e+4)} +$ &c.

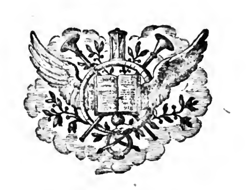
Habe-

Habemus igitur jam aliam feriem, compofitam quidem femper ex terminis numero infinitis, nihilominus tamen æqualem illi alteri fupra inventæ $x^{m+1} \times \left(\frac{1}{m+1} lx^{e} - \frac{e}{(m+1)^2} lx^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{(m+1)^3} lx^{e-2} - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{(m+1)^4} lx^{e-3} + \&c \right)$ quæ conftat femper terminis numero finitis, modo e fit numerus integer & affirmativus.

X I V.

Quod fupereft, Lectorem benevolum fcire volo, hæc a me jam olim aliquot annis ante finem fuperioris feculi communicata fuiffe in privatis meis literis ad Illuftr. LEIBNITIUM, nunc vero demum edenda, ob rationem Artic. IV dictam, fine qua lucem forfan nunquam vifura fuiffent. Multa enim apud me premo, hifce digniora, quæ tamen tanti non facio, ut in publicum emitti mereantur.





JOHAN.

N°. CXLIX.

JOHANNIS BERNOULLI

LECTIONES MATHEMATICÆ,

DE

METHODO INTEGRALIUM, ALIISQUE;

CONSCRIPTÆ

IN USUM

ILL. MARCHIONIS *HOSPITALII*;

Cum Auctor Parisiis ageret

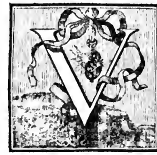
Annis *1691* & *1692*.



LECTIONES MATHEMATICÆ DE METHODO INTEGRALIUM, ALIISQUE.

LECTIO PRIMA.

De Natura & Calculo Integralium.



IDIMUS in præcedentibus * quomodo quantitatum *Differentiales* inveniendæ sunt: nunc vice versa quomodo differentialium *Integrales*, id est, eæ quantitates quarum sunt differentiales, inveniantur, monstrabimus. Et quidem jam ex supra dictis notum est, dx esse differentialem ipsius x, & xdx differentialem ipsius $\frac{1}{2}xx$, vel $\frac{1}{2}xx$ + vel — quantitate constanti; $xxdx$ differentialem ipsius $\frac{1}{3}x^3$, aut $\frac{1}{3}x^3$ + vel — &c.

* *Intelligit Auctor Lectiones in calculum differentialem quæ præcesserunt, quasque supprimendas duxit, siquidem omnia, quæ in Lectionibus istis continentur, ab* Illustr. HOSPITALIO *relata fuerunt in Librum suum quem inscripsit*, Analyse des infiniment petits, *qui in omnium manibus versatur.*

— &c. Et $x^3 dx$ differentialem ipsius $\frac{1}{4}x^4$ sive $\frac{1}{4}x^4$ + vel — quant. const.

etiam adx differentialem ipsius - - ax, &c.
$axdx$ - - - - - - - - - $\frac{1}{2}axx$, &c.
$axxdx$ - - - - - - - - - $\frac{1}{3}ax^3$, &c.
ax^3dx - - - - - - - - - $\frac{1}{4}ax^4$, &c.
&c. &c.

Ex quibus hæc Regula formari potest

$$ax^p dx \textit{ differentialis est quantitatis } . \frac{a}{p+1}x^{p+1}$$

Igitur si alicujus quantitatis differentialis quantitas integralis sumenda sit; ante omnia considerandum est, an quantitas proposita sit productum alicujus differentialis in multiplum suæ absolutæ ad certam quandam potestatem elevatæ: quod signum est ejus Integralem per hanc regulam inveniri posse. Ex. gr. si quantitatis $dy\sqrt{(a+y)}$ integralis invenienda sit, video primo, dy, multiplicatam esse per multiplum suæ absolutæ $1a+1y$ ad potestatem $\frac{1}{2}$ elevatæ: dein quæro per hanc Regulam ipsius integralem videlicet $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{(\frac{1}{2}+1)}$, id est, $\frac{2}{3}(a+y)\sqrt{(a+y)}$.

Sic invenitur integralis ipsius $xdx\sqrt[3]{(aa+xx)}$ quæ est $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+1}$ $(aa+xx)^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{8}(aa+xx)\sqrt[3]{(aa+xx)}$; ipsius $dy:\sqrt{(a+y)}$ integralis $= 2\sqrt{(a+y)}$; ipsius $dx:x$ integralis $= \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}\times 1 = \infty$.

Notandum est occurrere nonnunquam quantitates, quarum Integrales non posse inveniri per hanc Regulam primo intuitu videtur, sed post quandam variationem facile inveniuntur, ut in sequentibus casibus.

I. Si pro $dx\sqrt{(aaxx+x^4)}$ scribatur $xdx\sqrt{(aa+xx)}$ invenitur integrale: nempe $(\frac{1}{3}aa+\frac{1}{3}xx)\sqrt{(aa+xx)}$. Et si pro $dx\sqrt{(a^3+3aax+3axx+x^3)}$ scribatur $(adx+xdx)\sqrt{(a+x)}$ invenitur integralis $\frac{2}{5}(aa+2ax+xx)\sqrt{(a+x)}$.

II. Et vice versa occurrit, ut nonnunquam una vel aliquot litteræ involvendæ sint sub signo radicali, priusquam integrale sumi possit, ut in sequenti exemplo $(3ax^3dx+4x^4dx)\sqrt{(ax+xx)}$.

Hujus

Hujus integrale per Regulam sumi posse non videtur, sed si involvatur una x, provenit $(3axxdx + 4x^3 dx)\sqrt{(ax^3 + x^4)}$ cujus nunc integrale per regulam invenitur $= \frac{2}{3}(ax^3 + x^4)\sqrt{(ax^3 + x^4)}$.

III. Si occurrit fractio cujus denominator est, vel quadratum, vel cubus, vel alia potestas; Radix sumenda est pro quantitate absoluta, ut in hac $xdx : (a^4 + 2a^2x^2 + x^4)$ pro quantitate absoluta sumendum est $aa + xx$ & habebitur $-1 : (2aa + 2xx)$. Si pro quantitate absoluta sumeretur $a^4 + 2aaxx + x^4$, integrale fractionis per Regulam haberi non posset.

IV. Si duarum quantitatum separatim sumptarum integrale inveniri nequit; accidit interdum, ut ex conjunctis haberi possit. Ex. gr. $adx : \sqrt{(2ax + xx)} + xdx : \sqrt{(2ax + xx)}$; neutrius habetur integrale seorsim sumtæ, sed additarum $(adx + xdx) : \sqrt{(2ax + xx)}$ integrale est $\sqrt{(2ax + xx)}$.

V. Fractio aliquando integralem habere non videtur; sed si ejus numerator & denominator per eandem quantitatem multiplicentur, ejus tunc integralis facile haberi potest. Ut $(adx + xdx) : \sqrt{(3a + 2x)}$; multiplicetur numerator & denominator per x habebitur $(axdx + xxdx) : \sqrt{(3ax^2 + 2x^3)}$, cujus integrale est $\frac{1}{3}\sqrt{(3axx + 2x^3)}$.

VI. Vicissim, interdum numerator & denominator dividendi sunt per eandem quantitatem, ut integrale haberi possit. Ex. gr. $axxdx : \sqrt{(aax^2 + x^4)}$; dividatur uterque terminus per x & habebitur $axdx : \sqrt{(aa + xx)}$; cujus integrale secundum Regulam est $a\sqrt{(aa + xx)}$.

VII. Contingit quoque, ut quantitatis propositæ integrale per Regulam haberi non possit; sed si alia quantitas, cujus integrale habetur, isti addatur, provenit quædam, cujus integrale sumi potest; si itaque ab hoc auferatur integrale quantitatis additæ, remanebit integrale quæsitum. Verbi gr. $xdx\sqrt{(a + x)}$; sit sumendum ejus integrale, quod quia simpliciter fieri non potest, addatur quantitati propositæ hæc $adx\sqrt{(a + x)}$, & habebitur $(adx + xdx)\sqrt{(a + x)}$; cujus integrale per Regulam invenitur $= \frac{2}{5}(a + x)^2\sqrt{(a + x)}$; ab hoc si auferatur in-

tegrale ipſius $adx\sqrt{(a+x)}$ quod eſt $\frac{2}{3}a(a+x)\sqrt{(a+x)}$ remanebit $\frac{2}{5}(a+x)^2\sqrt{(a+x)} - \frac{2}{3}a(a+x)\sqrt{(a+x)}$ pro integrali quantitatis propoſitæ $xdx\sqrt{(a+x)}$. Eodem modo invenitur integrale ipſius $xxdx\sqrt{(a+x)}$. Habetur enim integrale ipſius $(aa+2ax+xx)dx\sqrt{(a+x)}$, ut & quantitatis $aadx\sqrt{(a+x)}$ & per modo inventum ipſius $2axdx\sqrt{(a+x)}$, habebitur itaque etiam integrale reliqui $xxdx\sqrt{(a+x)}$. Pari ratione invenietur integrale quantitatis $x^3dx\sqrt{(a+x)}$ vel $x^4dx\sqrt{(a+x)}$ & quantitatis ipſius $x^p dx\sqrt{(a+x)}$. Sic etiam, ſi proponatur quantitas ex pluribus membris conſtans; ejus integrale habetur per partes, qualis eſt $(2ax^3+x^4)dx\sqrt{(a+x)}$ quæro primum integrale prioris membri $2ax^3dx\sqrt{(a+x)}$, & demum poſterioris $x^4dx\sqrt{(a+x)}$, quorum ſumma dabit integrale totius.

MONITUM.

Et hi ſunt præcipui caſus, qui occurrere poſſunt in ſumendis integralibus. Plures quidem, & vel infiniti alii reſtant, quorum ope ad integralia pervenitur; ſed, tum quia omnes in memoriam non cadunt, tum etiam quia plerique ad allatos reduci poſſunt, adeo ut & per hos ad optatum perveniri poſſit; vel denique quia attente conſideranti mille ſolvendorum modi, variique caſus pro datarum quantitatum natura ſponte ſeſe offerunt; impoſſibile non minus quam inutile eſſet, ſi plures alios præter appoſitos afferre vellemus: id annotaſſe ſufficiat, ſi dixerimus quod ab Integralium inventione illuſtriora quæque Matheſeos Problemata & Theoremata dependeant, tum ea quæ jam inventa ſunt, tum quæ adhuc inveniri deſiderantur; qualia ſunt quadraturæ ſpatiorum, rectificationes curvarum, cubificationes ſolidorum, methodus tangentium inverſa, vel inventiones naturæ curvarum ex proprietatibus tangentium datis &c: non minus quam ea quæ ad Mechanica ſpectant, ut ſunt; modus inveniendi centri gravitatis, percuſſionis, oſcillationis &c. Habentur quoque per inventionem Integralium evolutiones curvarum,

rum, modusque earum naturas determinandi, & evolutionis ope ipsas curvas rectificandi, sicuti fecit Dn. TSCHIRNHAUS in suis Causticis. Sed ut tam facile est cujuscunque quantitatis propositæ reperire differentiale, ita, e contrario, tam difficile est assignare integrale cujuscunque differentialis, adeo ut interdum, nequidem certo asserere possimus an quantitatis propositæ integrale possit sumi, nec ne; id saltem affirmare audeo, quod cujuscunque quantitatis integræ & rationalis multiplicatæ vel divisæ per $x^p \surd (aa - xx)$, $x^p \surd (ax - xx)$, $x^p \surd (aa + xx)$ integrale vel haberi possit, vel ad quadraturam circuli aut hyperbolæ sit reducibile; ut in sequentibus docebimus. Omnino itaque & caute animadvertendum est, num quantitas proposita, ex qua integrale elici debet, possit, vel per multiplicationem, vel per divisionem, vel etiam per extractionem radicis, redigi ad quantitatem in qua habeatur unum horum signorum radicalium ductum in quantitatem rationalem & integram. Hoc si fieri potest, prompte asseverandum, quod integrale quantitatis datæ haberi possit; vel secus, quod id dependeat & reduci possit ad quadraturam circuli, aut hyperbolæ. Ut si, ex. gr. proponatur hæc quantitas, cujus integrale sit sumendum $(a^3 + axx - x^3)\, dx \surd \left(\frac{a+x}{x}\right)$. Primo intuitu quidem videtur hujus integrale, nec sumi posse, nec relationem habere ad quadraturam circuli. Si enim pro quantitate absoluta accipiatur id quod est post signum radicale, nempe fractio $(a+x):x$, erit & ejus differentialis fractio, ita ut inde, juxta Regulam, nihil concludi possit. Ad hoc itaque evitandum, multiplico numeratorem & denominatorem fractionis irrationalis per numeratorem & productum numeratoris in seipsum, per residuum quantitatis rationale, ita ut exinde fiat fractio, cujus numerator est pure rationalis, & denominator irrationalis; erit nempe, $(a^3 + axx - x^3)\, dx \surd \left(\frac{a+x}{x}\right) =$ huic quantitati $(a^4 + aaxx + a^3x - x^4)\, dx : \surd (ax + xx)$, quæ mihi indicat, quod suum integrale, vel haberi, vel ad qua-

quadraturam hyperbolæ redigi queat; quo pacto autem id cognoſci poſſit & fiat, infra dabuntur Regulæ.

Quod ſupereſt, antequam ad Calculi Integralis uſum & applicationem perveniamus, oſtendemus alium modum Integralia ſumendi, qui interdum uſui venire poteſt, & qui methodum generalem non parum compendioſam reddit. Etenim aliquando, ob quantitatum propoſitarum prolixitatem, illico non patet, an illa reduci poſſit ad unum allatorum caſuum; adeoque an integrale habeat, vel non: hic autem modus quantitatem ad pauciora redigit membra, ut exinde nullo labore integrale quæſitum reperiatur. Hoc vero fit ponendo quantitatem quæ ſub ſigno radicali includitur, vel quantitatem quæ pro abſoluta ſumitur, æqualem literæ cuidam ſoli, & convertendo quantitatem datam, ſecundum hanc poſitionem, in aliam, quæ conſtat ex puris his literis ſubrogatis: hujus quantitatis, quæ plerunque multo brevior evadit, ſumatur integrale; quod iterum converti poteſt in integrale quæſitum, ſubſtituendo valorem litteræ aſſumtæ. Hoc melius per Exemplum patebit: Sit quantitas cujus integrale quæritur $= (ax + xx)dx \sqrt{(a+x)}$; pono in hunc finem $\sqrt{(a+x)} = y$; erit $x = yy - a$, proinde $dx = 2y\,dy$; totaque quantitas $(ax + xx)dx\sqrt{(a+x)}$ $= 2y^6\,dy - 2ay^4\,dy$, cujus nunc integrale facile, & abſque omnibus ambagibus, ſtatim invenitur $= \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5$, vel, ſubſtituto valore ipſius y, habetur $\frac{2}{7}(x+a)^3\sqrt{(x+a)} - \frac{2}{5}a(x+a)^2\sqrt{(x+a)}$.

Eodem modo invenitur integrale quantitatis $(aa + 2xx)dx : \sqrt{(aa+xx)}$, ponendo $\sqrt{(aa+xx)} = y$; erit $x = \sqrt{(yy-aa)}$ & $dx = y\,dy : \sqrt{(yy-aa)}$; proinde quantitas $(aa + 2xx)dx : \sqrt{(aa+x^2)} = (2y^3 - aay)\,dy : \sqrt{(y^4 - aayy)}$. Hujuſque integrale eſt $= \sqrt{(y^4 - aayy)}$.

Non ſecus ſi habetur $(a-x)dx : \sqrt{(2ax-xx)}$; ponatur $\sqrt{(2ax-xx)} = y$; erit $x = a \pm \sqrt{(aa-yy)}$, $dx = \mp y\,dy : \sqrt{(aa-yy)}$ & $(a-x)dx : \sqrt{(2ax-xx)} = dy$, cujus integrale eſt $= y$ $= \sqrt{(2ax-xx)}$.

Hæc itaque Regula in infinitis aliis applicari poteſt; & quidem in illis caſibus, qui ob prolixitatem quaſi pro deſperatis haberi

beri possunt : nam præterquam quod ista Regula quantitatem propositam aliquando multo breviorem reddit, hunc insuper usum obtinet, quod statim ob oculos ponat, an ex quantitate ita mutata integrale sumi possit.

Omnibus his modis integralia inveniendi, addi potest & sequens, qui ob magnam suam utilitatem & facilitatem omnibus fere cæteris præferri potest. Modus autem iste circa illas duntaxat quantitates versatur, quæ cum signis irrationalibus conjunctæ sunt. Tota itaque illius praxis consistit in hoc, ut quantitates irrationales in rationales convertantur, ita ut tota quantitas proposita induat rationalitatem, ex qua dein integrale, si fieri potest, facile sumitur. Non parum ergo conducunt ad hoc Quæstiones *Diophanteæ*, quæ in hujusmodi occasionibus insignem opem ferunt, ceu in exemplis clarius patebit: Sit ex. gr. $a^3dx : x\sqrt{(ax - xx)}$ sumendum integrale, quod per nullum præcedentium modorum fieri potest, per hunc vero id ita præstabitur : Quia $\sqrt{(ax - xx)}$ est quantitas irrationalis; ut rationalis reddatur, oportet ut $ax - xx$ sit quadratum : sit itaque $ax - xx = aaxx : mm$; erit ex hac suppositione $x = amm : (mm + aa)$ & proinde $\sqrt{(ax - xx)} = aam : (mm + aa)$, $dx = 2a^3 mdm : (mm + aa)^2$, adeoque tota quantitas proposita $a^3dx : x\sqrt{(ax - xx)}$ erit $= 2a^3dm : mm$, cujus integrale facile habetur, nempe $= - 2a^3 : m$. Substituto nunc valore ipsius $m = \sqrt{(aax : (a - x))}$, habebitur $\sqrt{((4a^5 - 4a^4x) : x)} = 2aa \sqrt{((a - x) : x)} =$ integrali ipsius $a^3dx : x\sqrt{(ax - xx)}$. Pariter si integrale sumendum est ex $dx\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)} : x$ oportet ut $xx + 2ax + aa$ sit cubus : sit ergo $x + a = y^3$, erit $x = y^3 - a$ & $dx = 3yydy$, & $\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)} = yy$; erit ideoque tota quantitas $dx\sqrt[3]{(xx + 2ax + aa)} : x = 3y^4dy : (y^3 - a)$, cujus si integrale haberi potest, habebitur etiam integrale quantitatis datæ.

LECTIO SECUNDA.

De Quadratura Spatiorum.

INter varios usus, quos ex Calculo Integralium quærimus; primus fere ac præcipuus est, qui occurrit in quadrandis spatiis. Considerantur autem spatia ut divisa in infinitas partes, quarum unaquæque pro differentiali spatii haberi potest; ita ut si integrale hujus differentialis, id est, summa harum partium habeatur, exinde quoque innotescat quadratura quæsita. Partes autem istæ infinitesimæ, in spatiis planis, considerari possunt diversis modis, prout commodissime permittunt omnes circumstantiæ planorum. Vel enim, quod communissimum est, dividuntur plana per infinitas parallelas, ut *Fig. I*, vel per infinitas rectas in puncto coëuntes, ut *Fig. II*; vel per infinitas tangentes ut *Fig. III*; vel per infinitas ad curvam normales ut *Fig. IV*. Hæ divisiones planorum generales sunt, & quælibet cuilibet spatio accommodari potest. Spatium enim, utcunque divisum, constat ex omnibus suis partibus. Plerunque autem is dividendi modus seligitur qui cum natura, vel generatione spatii quam aptissime convenit, & per quem brevissime & facillime ad quadraturam pervenitur. Insolitum etenim, & contra bonæ methodi leges esset, si quis quadraturam Parabolæ quæreret per divisionem quam monstrat *Fig. II*; & e contra ingentem laborem frustra subiret, si quis quadrare vellet quascunque Spirales ope divisionis parallelæ, qualis exstat in *Fig. I.* Natura enim Parabolæ, Paraboloideorum, & hujusmodi curvarum poscit dividentes parallelas; Spiralium autem generatio convergentes potius adhibendas esse monstrat. Aliæ insuper divisiones speciales in usum vocari possunt, prout id cujusdam curvæ natura vel proprietas quam aptissime suadet. Spatium ex. gr. ABCD conchoidale considerari potest, ut divisum in infinita trapezia, quorum latera convergunt in centro E. Verum interim est, quod interdum occurrant spatia, quæ æque facile uno

TAB. LII. Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

TAB. LII. Fig. 5.

uno vel altero modo divisa intelligi, & ad calculum revocari possunt; ut id apparet in Circulo & Hyperbola, in quibus spatium circulare & hyperbolicum, vel secundum applicatas parallelas, vel secundum lineas a centro ad curvam divergentes æque commode dividi potest.

Quocunque demum modo (ut tandem ad quadraturas ipsas perveniamus) spatia divisa concipiantur; si exinde area totius haberi cupiatur, oportet ut unius partium indefinite parvarum quæratur valor, qui non nisi litteris determinatis & unica tantum specie indeterminatarum consistat; quod semper haberi potest per naturam & generationem curvæ; & hujus quantitatis, tanquam differentialis, inveniendum est integrale; quod designabit quadraturam spatii.

Si divisiones spatii sunt parallelæ, differentiale spatii, supposita abscissa x & applicata y, erit ydx, rectangulum nempe inter applicatam & differentiale abscissæ. Si itaque AC sit curva data, habebit y certam rationem ad x, ita ut ydx in puris x pronuncietur. Ex. gr. Sit AC Parabola, & proinde $ax = yy$, vel $y = \sqrt{ax}$; erit $ydx = dx\sqrt{ax}$; hujus itaque integrale, quod est $\frac{2}{3}x\sqrt{ax}$, vel $\frac{2}{3}xy$, erit spatium quæsitum. TAB. LII. *Fig. 6.*

Si divisiones coëunt in puncto, differentiale spatii est $\frac{1}{2}ydx$; triangulum nempe, cujus unum latus est y, & altitudo, arcus infinite parvus, puncto concursus tanquam centro, per extremitatem minoris y descriptus, qui pro recta linea habendus est; hic autem arculus certam semper relationem habet ad y, pro data natura curvæ. Sit, v. gr., ABC spatium logarithmicum spirale; quia itaque y angulum constantem facit ad curvam, habebit dy ad dx rationem constantem: Sit ut a ad b; erit $dx = bdy : a$; proinde $\frac{1}{2}ydx = ybdy : 2a$; hujus ergo integrale $byy : 4a$ est æquale spatio. TAB. LII. *Fig. 7.*

Eodem modo ratiocinandum est in aliis divisionum modis. Si autem integrale ipsius ydx vel $\frac{1}{2}ydx$ sumi non potest, tentatis omnibus methodis quas supra dedimus, signum est spatium propositum quadrabile non esse; vel saltem illius quadraturam nondum haberi. Hoc nobis contingit in inquisitione quadraturæ

 Circuli

Circuli & Hyperbolæ; ubi pervenimus ad valorem ydx, cujus integrale hucuſque invenire nequimus. Aliorum tamen ſpatiorum, quorum differentialia ydx exprimuntur per quantitatem rationalem, ductam, vel diviſam in applicatam Circuli vel Hyperbolæ, quadratura ſemper, vel omnino habetur, aut ſaltem ad quadraturam Circuli vel Hyperbolæ reduci poteſt; id quod ſupra promiſimus, nunc effectui dabimus. Videamus autem prius quoſdam modos, quibus differentiale ſpatii circularis vel hyperbolici

TAB.LII. Fig. 8. exprimi poteſt. Sit ADC ſemicirculus, $AC = 2a$, $AB = x$, ergo $DB = \sqrt{(2ax - xx)}$, & proinde differentiale ſpatium $BDdb = dx\sqrt{(2ax - x)}$, cujus integrale dat ſegmentum ABD.

Sit $BE = x$, erit $BD = \sqrt{(aa - xx)}$; ſpatium differentiale $BDdb = dx\sqrt{(aa - xx)}$.

Sit AB iterum x, erit portiuncula curvæ $dD = adx : \sqrt{(2ax - xx)}$, proinde triangulum $DEd = aadx : 2\sqrt{(2ax - xx)}$; cujus integrale dat ſectorem AED.

Sit $BE = x$, erit $dD = adx : \sqrt{(aa - xx)}$ & triangulum $DEd = aadx : 2\sqrt{(aa - xx)}$.

TAB.LII. Fig. 9. Sit ABD ſemicirculus, $AD = a$, $AB = x$; erit $BD = \sqrt{(aa - xx)}$, proinde $BC = xdx : \sqrt{(aa - xx)}$ & triang. $ABC = xxdx : 2\sqrt{(aa - xx)}$, cujus integrale = ſegmento AB.

TAB.LII. Fig. 10. Sit nunc, ABC Hyperbola æquilatera, $BD = 2a$, $BF = x$; erit $AF = \sqrt{(2ax + xx)}$, & ſpatium differentiale $AFfa = dx\sqrt{(2ax + xx)}$, cujus integrale = ſpatio AFB.

Sit $EF = x$, ergo $AF = \sqrt{(xx - aa)}$ & diff. ſp. $AFfa = dx\sqrt{(xx - aa)}$.

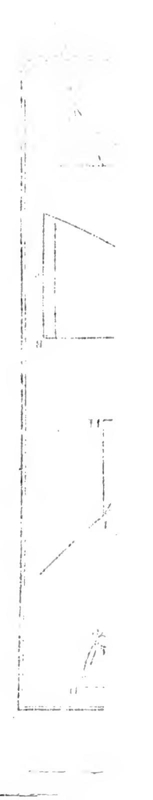
Sit $EH = x$, erit $HI = \sqrt{(aa + xx)}$ $EI = \sqrt{(aa + 2xx)}$ ideoque triang. $EKI = \frac{1}{2}aadx : \sqrt{(aa + xx)}$, cujus integr. = ſp. EBI.

Si $HI = x$ provenit triang. $EKI = \frac{1}{2}aadx : \sqrt{(xx - aa)}$.

Omnes hæ diverſæ expreſſiones, eandem quadraturam Circuli videlicet, & Hyperbolæ, ſed diverſo modo ſumptam includunt; ſi itaque differentiale cujuſdam ſpatii ad unam harum formularum redigi poteſt, poterit dari Circulus, vel Hyperbola, aut ſegmentum Circuli vel Hyperbolæ ſpatio dato æquale; omnia autem

N°. CXLIX.

Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
A
B
C
D
E
Fig. 6.
C
y
x
A
B
dx
A
x
y
D
Fig. 10.
E
H
B
K
I
A
a
F
f
Fig. 8.
F
E
C
Fig. 9.
B
C
A
D



autem iſta ſpatia, quorum differentiale exprimitur per quantitatem rationalem, multiplicatam, vel diviſam, per applicatam Circuli vel Hyperbolæ, id eſt, vel per $\sqrt{(ax - xx)}$, vel per $\sqrt{(aa - xx)}$, vel per $\sqrt{(ax + xx)}$, vel per $\sqrt{(aa + xx)}$, vel per $\sqrt{(xx - aa)}$ &c. omnia inquam iſta ſpatia aut quadrabimus, aut Circulo vel Hyperbolæ æquabimus. Quod ita fit. Si quantitas rationalis propoſiti differentialis conſtat uno, vel pluribus membris; obſervandum eſt, num quid addi vel demi poſſit quantitati datæ, ita ut integrale exinde poſſit ſumi; hoc facto, ſi additi vel dempti etiam habeatur integrale, innoteſcet quoque integrale quantitatis datæ; ſi vero additum, vel demptum, ſit differentiale ſpatii circularis vel hyperbolici, patet & integrale quæſitum ad hujuſmodi ſpatium redigi poſſe. Ex. gr. Quæritur integrale ex hac quantitate $xdx\sqrt{(2ax + xx)}$. Ad hoc faciendum, procedatur hoc modo: $xdx\sqrt{(2ax + xx)} = (adx + xdx)\sqrt{(2ax + xx)} - adx\sqrt{(2ax + xx)}$; quia nunc integrale prioris habetur, & poſterioris indicat quadraturam Hyperbolæ, erit quæſito ſatisfactum.

Si vero quid addendum demendumve ſit non innoteſcat; id tamen per Regulam generalem ſolvi poteſt, quæ vult ut ante omnia ſignum radicale transferatur in denominatorem, ut numerator omnino rationalis evadat; dein membrum numeratoris, ubi littera indeterminata plurimas habet dimenſiones, ad plures adhuc dimenſiones elevetur, ſicut & radix ſurda, quæ,

 quo-

NB. Hujuſmodi quantitas $\frac{a^3 dm \pm aamdm}{bm \pm mm}$ poteſt conſtrui per Logarithmicam. Si nimirum quæratur per quotam poteſtatem ipſius m, multiplicandus ſit numerator & denominator, ita ut numerator evadat multiplex vel ſubmultiplex ipſius denominatoris differentiati. Ita etiam hæc quantitas reduci poteſt ad Logarithmicam, nempe $\frac{adm}{am + mm}$; eſt enim æqualis huic quantitati $\frac{adm + omdm}{am + mm}$ quæ jam reduci poteſt ut ante; non minus etiam reducitur $\frac{adm}{aa - mm}$, ſed oportet ut prius in præcedentem convertatur, ſupponendo $m = n + a$.

quotiescunque membrum superius multiplicatur per dimensionem quandam indeterminatæ, ista per duplam dimensionem multiplicatur; sic enim fractio semper æqualis manebit: multiplicatio itaque eousque continuari debet, donec litteræ indeterminatæ plurima dimensio in radice unitate excedat membrum ejusdem litteræ plurimæ dimensionis in numeratore; & tunc huic membro, in talem formam reducto, addatur vel de illo dematur quantitas talis ut de summa integrale sumi possit; id quod semper fieri potest. Hoc facto, idem peragi debet cum hac addita vel dempta, sed cum signo contrario, cui adjungitur proxime sequens: & ita tandem descenditur ad ultimum membrum ex quo necessario potest integrale sumi, aut Circulo vel Hyperbolæ æquari; id quod melius per exemplum apparet.

Sit quantitas cujus integrale quæritur $= (aax + x^3)\,dx\sqrt{(xx - aa)}$. Hoc sic perficitur; $(aax + x^3)\,dx\sqrt{(xx - aa)}$ $= \frac{(x^5 - a^4x)dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = (A)\,\frac{x^9dx - \frac{4}{5}aax^7dx}{\sqrt{(x^{10} - aax^8)}} - (B)\,\frac{a^4xdx}{\sqrt{(xx - aa)}} +$ $[\frac{\frac{4}{5}a^2x^5dx}{\sqrt{(x^6 - aax^4}}](C)\,\frac{\frac{4}{5}a^2x^5dx - \frac{8}{15}a^4x^3dx}{\sqrt{(x^6 - aax^4)}} + (D)\,\frac{\frac{8}{15}a^4xdx}{\sqrt{(xx - aa)}}$. Quantitas itaque proposita $(aaxdx + x^3dx)\sqrt{(xx - aa)} = A + B + C + D$: Verum A & C habent integralia, per constructionem, ut & B & D residua, quæ per se patent; ideoque totius quantitatis integrale inventum est.

Eodem modo, si proponatur quantitas cujus integrale inveniendum est $(2ax - xx)\,dx\sqrt{(2ax - xx)}$, habeo primo per multiplicationem hanc æquationem $(2ax - xx)\,dx\sqrt{(2ax - xx)} =$

$$\frac{(4aaxx - 4ax^3 + x^4)dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = (A)\frac{(x^7 - \frac{7}{4}ax^6)dx}{\sqrt{(2ax^7 - x^8)}} + (B)\frac{(-\frac{9}{4}ax^5 + \frac{15}{4}a^2x^4)dx}{\sqrt{(2ax^5 - x^6)}}$$
$$+ (C)\frac{(\frac{1}{4}aax^3 - \frac{3}{8}a^3x^2)dx}{\sqrt{(2ax^3 - x^4)}} + (D)\frac{(\frac{3}{8}a^3x - \frac{3}{8}a^4)dx}{\sqrt{(2ax - xx)}} + (E)\frac{\frac{3}{8}a^4dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

Potest autem integrale sumi ex quantitate A, B, C, D, & residuum E ostendit adhibendum esse Circulum, ut patet ex supra dictis; ideoque integrale quantitatis datæ reductum est ad quadraturam Circuli. *Q. E. F.*

Invenien-

Inveniendum sit integrale ex quantitate $a^4dx : xx\sqrt{(xx+aa)}$. Sit $x=aa:m$; erit $dx=-aadm:mm$. Æquatio inventa convertetur in hanc, $-aamdm:\sqrt{(a^4+a^2m^2)}$, cujus integrale est $\mp\sqrt{(a^4+aamm)}$: substituto valore habetur $\mp\sqrt{(a^4+a^6:xx)}$. Eodem modo si proponatur $aadx:(aa+xx)^{\frac{3}{2}}$; esto $aa+xx=mm$, erit $xx=mm-aa$ & $dx=mdm:\sqrt{(mm-aa)}$, & tota quantitas $aadx:(aa+xx)^{\frac{3}{2}}=aadm:mm\sqrt{(mm-aa)}$, cujus integrale per modum præcedentem facile invenitur.

LECTIO TERTIA.

Variarum Curvarum Quadratura.

HÆc, quæ hactenus dicta sunt de spatiis, facile accommodari possunt solidis: Plana quippe, quæ dividunt solida in partes infinitas, considerari possunt, ut lineæ quæ spatia dividunt; siquidem id conceptui non repugnat, si modo plana ista per litteram constantem divisa ponantur, ex qua positione emergent lineæ constituentes spatium, quod, respectu quadraturæ suæ, eandem magnitudinem habet quam obtinet solidum propositum, respectu suæ cubificationis. Corporibus itaque cubificandis seorsim non immorabimur; sed saltem varia spatia tum quadranda, tum Circulo vel Hyperbolæ adæquanda, ut calculi hujus usus pateat, promiscue proponamus. Ubi primo notandum; quod si pro integrali differentialis spatii propositi proveniat quantitas negativa, id indigitet non esse spatium immediate super abscissa contentum, quod per hanc quantitatem exprimatur; sed esse spatium oppositum, id est, illud quod residuo axi insistit. Sit ex. gr. DGE Hyperboloides, cujus natura est [supposito BF $=x$, FG$=y$; constans quædam $=a$] $a^3=xxy$, ergo $y=a^3:x^2$ & $ydx=a^3dx:xx$. Hujus autem integrale $=-a^3:x$. Hoc, quia est negativum, ostendit non esse æquale spatio ABFGD, sed reliquo GFCE: quod vel exinde patet, quod quo majus x est, quantitas $a^3:x$ evadat minor; ut ideo pro hoc non sit TAB. LIII. Fig. 11.

fit ſumendum ſpatium ABFGD, quippe quod creſcente x & ipſum creſcit. Hoc ut in poſterum obſervetur dixiſſe ſufficit: ſequuntur nunc quædam Problemata.

TAB. LIII. Fig. 12. I. Sit BCE, curva quædam, $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$: natura curvæ eſt hæc $a^7 x - a^8 = x^6 yy$, quæritur quadratura ſpatii, vel ſaltem Circulus ipſi æqualis? Quod ſic fit: Per datam æquationem eſt $y = a^3 \sqrt{(ax - aa)} : x^3$, ideoque $y dx = a^3 dx \sqrt{(ax - aa)} : x^3$; ſit $x = aa : m$, erit ergo $dx = - aadm : mm$, $x^3 = a^6 : m^3$ & $\sqrt{(ax - aa)} = a \sqrt{((a - m) : m)}$; proinde tota quantitas propoſita $a^3 dx \sqrt{(ax - aa)} : x^3 = - dm \sqrt{(am - mm)}$, cujus integrale, quia eſt quantitas negativa, oſtendit, non ſpatio BCD, ſed reliquo FDCE eſſe æquale. Si itaque ſuper AB deſcribatur ſemicirculus AGB, & ſumatur $BH = m = aa : x$, erit ſegmentum BHG = ſpatio FDCE; ex quo ſequitur totum ſpatium BCEF æquale eſſe ſemicirculo AGB, & proinde ſegmentum AHG = ſpatio BCD. Ubi obiter notandum, quod ſi $BD = \frac{1}{3} AB$, DC ſit omnium applicatarum maxima.

In hoc Problemate, ſi ſupponatur $a = x$, erit $x^6 yy = 0$, & per conſequens $y = 0$; ex quo concluditur, curvam Problemati ſatisfacientem inchoare in puncto B. Si vero $x = \infty$, $x - a = x$, & $a^7 x = x^6 yy$, $a^7 = x^5 yy$; reducta æquatione in proportionem $x^5 : a^5 = aa : yy$; quia itaque x^5 eſt infinities major quam a^5, erit aa quoque infinities major quam yy; ergo y in hoc caſu $= 0$, id eſt, curva BCE & recta ABF occurrunt invicem in infinito.

TAB. LIII. Fig. 13, 14. & 15. II. ADK [*Fig.* XIII.] eſt Curva Conchoidalis; quæritur ſpatium ABGD? Sit $AB = GD = BC = a$, $HC = x$, $HI = dx$, $HB : BC = HI : IG$; erit ergo $IG = adx : \sqrt{(xx - aa)}$; $CG : CD = GI : DF$; proinde $DF = (ax + aa) dx : x \sqrt{(xx - aa)}$. Verum $(DF + GI) \times \frac{1}{2} DG =$ trapezio FG, ideoque trapezium $FG = (2a^2 x + a^3) dx : 2x \sqrt{(x^2 - a^2)}$. Hujus itaque integrale æquale eſt ſpatio ABGD: ſumitur autem hoc modo: $(2a^2 x + a^3) dx : 2x \sqrt{(x^2 - a^2)} = a^2 dx : \sqrt{(x^2 - a^2)} + a^3 dx : 2x \sqrt{(x^2 - a^2)}$. Integrale prioris habetur,

betur, facta Hyperbola æquilatera MNO [*Fig. XIV*,] cujus ſemidiameter NQ $= a$, QP $= x$, erit ſpatium QMN $=$ Integr. $\frac{1}{2} a^2 dx : \surd (x^2 - a^2)$; reſtat igitur ut integrale ſumatur ex $a^3 dx : 2x \surd (x^2 - a^2)$. Ad hoc præſtandum ſit $xx - aa = xx - 2mx + mm$, erit $x = (aa + mm) : 2m$, $dx = (mmdm - aadm) : 2mm$, $\surd (xx - aa) = (aa - mm) : 2m$, & tota quantitas $= a^3 dx : 2x \surd (xx - aa) = a^3 dm : (aa + mm)$. Si itaque fiat curva cujus abſciſſa $= m$ & ordinata $z = a^3 : (aa + mm)$, erit ſpat. $=$ integrali $a^3 dm : (aa + mm)$, vel zdm. Ut itaque hoc ſpatium habeatur, quæratur ejus complementum NOR $=$ integr. $mdz = (aa - az) dz : \surd (az - zz) = \frac{1}{2} aadz : \surd (az - zz) + (\frac{1}{2} aa - az) dz : \surd (az - zz)$. Prioris integrale eſt quadruplum ſectoris Circuli, cujus diameter $= a$, & abſciſſa $= z$; poſterioris vero integrale $= \frac{1}{2} a \surd (az - zz)$; proinde integrale ipſius $zdm = mz -$ quadr. ſect. $- \frac{1}{2} a \surd (az - zz)$.

Erit itaque ſpatium Conchoidale æquale ſpatio hyperbolico, rectilineo, & circulari.

NB. Integrale ipſius $a^3 dx : 2x \surd (xx - aa)$ aliter haberi ſic poteſt. Sit $x = aa : n$, erit $dx = - aadn : nn$, $\surd (xx - aa) = a \surd (aa - nn) : n$, ideoque $a^3 dx : 2x \surd (xx - aa) = - aadn : 2\surd (aa - nn)$. Integrale hujus habetur, ſi fiat quadrans circuli TRW [*Fig. XV*] & abſcindatur SR $= n = aa : x$ & erit, ob ſignum $-$, ſector TRV integrale quantitatis $a^3 dx : 2x \surd (xx - aa)$; ideoque ſpatium conchoidale $=$ ſpatio hyperbolico QMN [*Fig. XIV*] + Sect. TRV [*Fig. XV*].

III. Data eſt curva AC, cujus natura eſt [poſito AB $= x$, TAB. LIII. *Fig. 16.*
BC $= y$,] $a^5 xxyy - x^9 = a^6 y^3$; quæritur ſpatium ABC? Sit $y = xx : m$ & formabitur æquatio in hanc, $a^5 m - m^3 x^3 = a^6$; erit ideoque $x = a \sqrt[3]{(aam - a^3)} : m$ & $y = aa \sqrt[3]{(aam - a^3)^2} : m^3$; proinde quoque $dx = a^3 dm : 3m \sqrt[3]{(aam - a^3)^2} - adm \sqrt[3]{(aam - a^3)} : mm$ & $ydx = a^5 dm : 3m^4 - (a^5 m - a^6) dm : m^5 = a^6 dm : m^5 - 2a^5 dm : 3m^4$; horum integralia, quæ ſunt $- a^6 : 4m^4 + 2a^5 : 9m^3$ dabunt ſpatium quæſitum, vel, ſubſtituto valore ipſius $m = xx : y$, habebitur ſpatium ABC $= - a^6 y^4 : 4x^8 + 2a^5 y^3 : 9x^6$. *Q. E. F.*

TAB. LIII. Fig. 17. 18. 19

IV. Datur alia curva DEB, [*Fig. XVII*] $AC = x$; $CE = y$. Natura ejus eſt $y^4 - 6aayy + 4xxyy + a^4 = 0$; quæritur ſpatium curvilineum? Quod ſic peragitur. Per æquationem invenitur $x = \sqrt{(-y^4 + 6aayy - a^4)} : 2y$. Sit $(y^4 - 2aayy + a^4) : 4yy = mm$, erit $(yy - aa) : 2y = m$, ac etiam $(aa - yy) : 2y = m$. Per priorem ſuppoſitionem eſt $y = +m + \sqrt{(mm + aa)}$; per alteram vero $y = -m + \sqrt{(mm + aa)}$. Invenitur pro $x = \sqrt{(-y^4 + 6aayy - a^4)} : 2y = \sqrt{(aa - mm)}$, $dy = +dm + mdm : \sqrt{(mm + aa)}$, vel $dy = -dm + mdm : \sqrt{(mm + aa)}$; proinde $xdy = \pm dm \sqrt{(aa - mm)} + mdm \sqrt{(aa - mm)} : \sqrt{(mm + aa)}$. Integrale prioris habetur, ſi fiat circulus ABE [*Fig. XVIII*] cujus radius $AD = a$, $CD = m$, erit ſegmentum BCDE integrale ipſius $\pm dm \sqrt{(aa - mm)}$, quod addendum, vel auferendum eſt, prout y majus vel minus eſt quam a, ab integrali poſterioris $mdm \sqrt{(aa - mm)} : \sqrt{(aa + mm)}$ quod ſic invenitur. Sit $aa + mm = nn$, erit $mdm = ndn$; $\sqrt{(aa - mm)} = \sqrt{(2aa - nn)}$; $\sqrt{(aa + mm)} = n$; proinde tota quantitas $mdm \sqrt{(aa - mm)} : \sqrt{(aa + nn)} = dn \sqrt{(2aa - nn)}$; cujus integrale ſic invenitur: Conſtruatur circulus FGH [*Fig. XIX*] cujus radius $FK = a\sqrt{2}$, $IK = n$, erit GIKH integrale quæſitum. Summa itaque, vel differentia, horum ſegmentorum eſt æqualis ſpatio quæſito.

TAB. LIV. Fig. 20.

V. Datur curva BDE, in qua $AC = x$, $CD = y$, $AB = a$; natura curvæ exprimitur per hanc æquationem $a^3 : (xx + aa) = y$; quæritur ſpatium curvilineum AD? Hoc duplici modo ſolvi poteſt: *Primus*. Sit $xx + aa = mm$, erit $x = \sqrt{(mm - aa)}$, $dx = mdm : \sqrt{(mm - aa)}$, & $y = a^3 : (xx + aa) = a^3 : mm$ proinde $ydx = a^3 dm : m\sqrt{(mm - aa)}$: hujus nunc integrale ſumitur ut ſupra in Conchoide factum †. *Secundus*. Quærendum eſt complementum ſpatii curvilinei; quod ita fit. $a^3 : (xx + aa) = y$; ergo $a^3 = xxy + aay$, & $\sqrt{(a^3 - aay)} : \sqrt{y} = x$, proinde $xdy = ady \sqrt{(a - y)} : \sqrt{y} = (aa - ay)dy : \sqrt{(ay - yy)} = \frac{1}{2}aady : \sqrt{(ay - yy)} + (\frac{1}{2}aady - aydy) : \sqrt{(ay - yy)}$. Integrale poſterioris æquale eſt $a\sqrt{(ay - yy)}$; prioris vero habetur, ſi conſtruatur circulus AKB ſuper diametro AB, & producatur

† Pag. præced. ab init.

N.º CXLIX

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 19.

tur DG parallela ipſi AC uſque ad K; erit quadruplum ſectoris KHA integrale ipſius $\frac{1}{2} aady : \surd(ay - yy)$. Spatium itaque FAGDE æquale eſt 4 ſect: KHA + rectang. AB × KG. Notetur quod ſi ſumatur AC = AB $\surd\frac{1}{3}$, punctum D ſit punctum flexus curvæ BDE.

VI. Iiſdem poſitis ſit $axx : (xx + aa)$, erit $axx = xxy + aay$; proindeque $x = \surd aay : \surd(a - y)$, & $xdy = ady \surd y : \surd(a - y) = aydy : \surd(ay - yy) = (-\frac{1}{2} aady + aydy) : \surd(ay - yy) + \frac{1}{2} aady : \surd(ay - yy)$.

Integrale prioris eſt $= - a\surd(ay - yy)$; pro poſteriori vero fiat circulus AKB cujus diameter ſit AB; erit producta DG ad K quadruplum ſectoris KHA = integrali ipſius $\frac{1}{2} aady : \surd(ay - yy)$; erit ergo ſpatium AGD = 4 ſect: HKA — rectang. AB× KG. Sequitur ex his, quod ſpatia iſta duo ABEF [*Fig. XX* & *XXI*] in infinitum protenſa ſint inter ſe æqualia, utrumque etenim æquatur 4 ſemicirculis AKB. Hoc & verum eſſe conſtat exinde, quoniam hæ duæ curvæ ſunt eadem, & alia differentia inter eas non eſt, niſi quod in priore linea AF ſit pro axe ſumpta, quæ in poſteriore aſymptota eſt BE. TAB. LIV. *Fig.* 21.

LECTIO QUARTA.

Variarum Curvarum Quadratura.

VII. Invenire quadraturam ſpatii curvilinei ABC, vel ABD, cujus natura eſt [poſito AB $= x$, BC vel BD $= y$] $x^3 + y^3 = axy$? Hoc iterum duplici modo ſolvitur. TAB. LVI. *Fig.* 22.

Primus. Sit $y = axx : mm$, æquatio propoſita reducetur ad hanc $m^6 + a^3x^3 = aam^4$, proinde $x^3 = (aam^4 - m^6) : a^3$, & $xxdx = 4aam^3 dm : 3a^3 - 6m^5 dm : 3a^3$; hoc ſi multiplicetur per $a : mm$, provenit $ydx = 4\ aamdm : 3a^2 - 6m^3 dm : 3a^2$; hujus itaque integrale $\frac{2}{3} mm - \frac{1}{2} m^4 : a^2 =$ ſpatio quæſito, vel, ſubſtituto valore ipſius m, habebitur $\frac{2}{3} ax^2 : y - \frac{1}{2} x^4 : y^2$. Hinc ſi $x = y = \frac{1}{2} a$, id eſt, ſi punctum D cadit in E, erit ſpa-

tium A D B $= \frac{5}{24} aa$; a quo fi auferatur triangulum A B E $= \frac{1}{8} aa$, remanebit fpatium A E D $= \frac{1}{12} aa$ vel totum ACEDA $= \frac{1}{6} aa$. Hoc modo, idem aliter quoque inveniri poteft; ponendo $y = mxx : a^2$, mutabitur æquatio naturam exprimens in aliam $a^6 + m^3 x^3 = a^5 m$, ideoque $x^3 = (a^5 m - a^6) : m^3$, & $xxdx = (-2 a^5 m dm + 3 a^6 dm) : 3 m^4$, idcirco $y dx = mxxdx : aa = -2 a^3 dm : 3 m^2 + a^4 dm : m^3$. Sumantur integralia $2a^3 : 3m - a^4 : 2mm =$ fpatio curvilineo; fubftituatur valor ipfius m habebitur $2ax^2 : 3y - x^4 : 2y^2 =$ fpatio A B C.

Secundus modus. Convertatur æquatio curvæ in aliam, in qua litteræ exprimunt relationem A F ad F C, ubi axis erit linea A E bifecans angulum rectum I A B. Sit itaque A F $= s$, F C $= t$, erit ob C B $=$ B L, quia ang. C L B $=$ angulo F A B $= 45$ grad. ideoque triangulum C B L ifofceles, $s = (x + y) \sqrt{\frac{1}{2}}$ & $t = (x - y) \sqrt{\frac{1}{2}}$; per priorem invenitur $x = s\sqrt{2} - y$; fi itaque in æquatione $x^3 + y^3 = axy$ fubftituatur ejus valor, proveniet $2s^3 \sqrt{2} - 6ssy + 3syy\sqrt{2} - asy\sqrt{2} + ayy = 0$, quia autem $t = (x - y)\sqrt{\frac{1}{2}}$, erit $y = x - t\sqrt{2} = s\sqrt{2} - y - t\sqrt{2}$, ideoque $y = (s - t)\sqrt{\frac{1}{2}}$, fubrogetur valor ipfius y in æquatione inventa, id eft

$2s$

N O T A.

Ex æquatione $x^3 + y^3 = axy$, apparet primo x & y habere fimiles pofitiones, id eft, five x confideretur ut abfciffa, & y ut applicata, five y ut abfciffa & x ut applicata, provenire eandem naturam curvæ.

Secundo, Si x fupponatur $= y$; effe etiam $= \frac{1}{2} a$. Et fi $x = 0$, y quoque $= 0$. Unde concluditur, lineam A E angulum rectum I A B, bifecantem effe axem hujus curvæ.

Si in fecundo modo $s = a : \sqrt{2}$, $t = \frac{0}{\sqrt{7a}} = 0$, & fi $s = 0$, $t = \frac{0}{\sqrt{a}} = 0$. Ex quo fequitur A E curvam fecare in A & E. Si s major quam $a : \sqrt{2}$, erit $t = \sqrt{}$ quantitatis negativæ, quod fieri non poteft; ergo E vertex hujus curvæ.

Si s fumatur ex adverfa parte, id eft, fi fumatur $-s$, erit etiam t figno $-$ affectum; quod indicat curvam A D E C, continuatam ab utraque parte, fe ipfam fecare in puncto A, &c.

$$\begin{array}{rcl} 2s^3\sqrt{2} & = & +4s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ -6ssy & = & -6s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}+6sst\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ +3syy\sqrt{2} & = & +3s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}-6sst\sqrt{\tfrac{1}{2}}+3stt\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ -asy\sqrt{2} & = & -ass+ast \\ +ayy & = & +\tfrac{1}{2}ass-ast+\tfrac{1}{2}att \\ \hline 0 & = & s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}ass+3stt\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}att \end{array}$$

Erit ergo $tt=(ass-s^3\sqrt{2}):(3s\sqrt{2}+a)$ & $t=s\sqrt{(a-s\sqrt{2})}:\sqrt{(3s\sqrt{2}+a)}$. Sit nunc $a-s\sqrt{2}=mm$, erit $s=(a-mm):\sqrt{2}$, $ds=mdm\sqrt{2}$, $s\sqrt{(a-s\sqrt{2})}=(am-m^3):\sqrt{2}$, $\sqrt{(3s\sqrt{2}+a)}=\sqrt{(4a-3mm)}$, ideoque tds $[s\sqrt{(a-s\sqrt{2})}ds:\sqrt{(3s\sqrt{2}+a)}]=(-amm+m^4)dm:\sqrt{(4a-3m^2)}=(-am^5+m^7)dm:\sqrt{(4am^6-3m^8)}$. Hujus itaque integrale $=-\tfrac{1}{12}\sqrt{(4am^6-3m^8)}=-\tfrac{1}{12}m^3\sqrt{(4a-3mm)}$ vel, ſubſtituto valore ipſius m, habetur $-\tfrac{1}{12}\sqrt{(a-s\sqrt{2})^3}\sqrt{(a+3s\sqrt{2})}=$ ſpatio AFC, aut potius EFC; nam ſuppoſito AF $=s=0$, ita ut ſpatium AFC ſit nihil, invenitur tamen pro ſpatio quadrando $-\tfrac{1}{12}aa$; id quod manifeſte oſtendit, quod ſit ſpatium EFC intelligendum, ſiquidem & ſupra invenimus quod ECA ſit $=\tfrac{1}{12}aa$. Obiter hic animadvertendum, quod ſumpta AG $=\tfrac{1}{3}$ AE, id eſt, $s=-\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, t deveniat $=\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{3}a}:\sqrt{0a}=\infty$, id eſt, quod GH ſit aſymptota curvæ propoſitæ DAL. Notabile quoque eſt, quod ſpatium ECA ſit = ſpatio KAGH; nam poſito $s=-\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ provenit $-\tfrac{1}{12}\sqrt{(a-s\sqrt{2})^3}\sqrt{(a+3s\sqrt{2})}$ = nihilo, ideoque ſpatium affirmativum ECA æquari debet ſpatio negativo KAGH. Si AF $=a\sqrt{\tfrac{1}{6}}$, erit FC applicatarum maxima.

VIII. Data eſt curva EGB [*Fig. XXIII*], AC $=2a$, AF $=x$, FG $=y$; natura illius explicatur per hanc æquationem $y=\tfrac{1}{2}aa:\sqrt{(2ax-x^2)}-xx:\sqrt{(4aa-xx)}$; quæritur ſpatium DAFGE? Id ita peragitur: $ydx=\tfrac{1}{2}aadx:\sqrt{(2ax-xx)}-xxdx:\sqrt{(4aa-xx)}$; oportet itaque ut horum integralia inveniantur, quorum differentia dabit ſpatium quæſitum DAFGE: TAB. LIV. Fig. 23, 24.

TAB. LIV. Fig. 24. reperiuntur autem illa hoc modo. Construatur semicirculus HLO [*Fig. XXIV*] cujus diameter HO sit = lineæ AC, & fiat HM = AF, ductaque perpendiculari ML, erit sector HNL = integrali ipsius $\frac{1}{4} aadx : \sqrt{(2ax - xx)}$: si vero abscindantur HI & IK æquales ipsi HM, erunt duo segmenta circularia HI, & IK = integrali alterius $xxdx : \sqrt{(4aa - xx)}$; quoniam utrumque est dimidium integralis $xxdx : \sqrt{(4aa - xx)}$. Erit ideoque spatium quæsitum DAFGE [*Fig. XXIII*] = sectori LNH, demptis duobus segmentis HI, IK [*Fig. XXIV*], id est, spatio mixtilineo LNHIK; vel rectilineo LNHIL, si K cadit in L. Hoc autem possibile esse patet, dum ratio HM ad ML sumi potest quavis ratione minor; quo casu punctum K cadet ab hac parte ipsius L; & si sumatur HM = HN, K cadet ab altera parte ipsius L. Oportet igitur ut K cadat alicubi in L. Quia autem K semel tantum cadit in L, inter omnia spatia DAFGE [*Fig. XXIII*] non nisi unum erit quod quadraturam admittit; alioquin, si K non cadit in L, haberetur quadratura segmenti KL; id quod fieri nondum, & forsan nunquam potest. Perperam itaque Dn. TSCHIRNHAUS asseruit, spatia geometrica, aut nullam quadraturam, aut infinitas admittere: vidimus enim in curva proposita, quæ geometrica est, non nisi unicum spatium esse quadrabile.

Si potest inveniri punctum P [*Fig. XXIII*] ita ut ducta PQ parallela asymptotæ CR, spatium BPQ sit = spatio DABGE; habebitur quadratura segmenti circularis KL [*Fig. XXIV*]. Nam Sector *l*NH — Segment. HX — Segm. XZ = o. Sector *l*NH = segm. HX + segm. XZ, demptoque eo quod habent commune; trapez: HXTN = portioni *l*TZ; dempto igitur ab utraque parte triangulo *l*TZ, erit segm. *l*Z = figuræ rectilineæ. *Q. E. D.*

Etsi inter omnia spatia DAFGE, non nisi unum sit quod quadraturam admittat; tamen infinita alia adhuc possunt inveniri quorum summa vel differentia sit quadrabilis. Ex. gr. Detur in linea AC [*Fig. XXIII*] punctum quodvis F ita ut spatium DAFGE non sit quadrabile: Sumta in semicirculo

[*Fig.*

[*Fig. XXIV*] HM = AF, abſciſſiſque ſegmentis HI, IK, quorum ſubtenſæ = HM, cadet punctum K cis vel ultra punctum L. Si cis, inveniatur alia linea Af, ita ut ductis Hm = Af, & HX, XZ utraque = Hm, Z cadat ultra punctum l, & quidem ut arcus KL = lZ; erit Sector HNL — Segm. HI — Segm. IK + Sect. HNl — Segm. HX — Segm. XZ, id eſt, ſumma ſpatiorum DAFGE, $DAfgE$, [*Fig. XXIII*] quadrabilis. Eſt enim hæc ſumma = Figuræ Rectilineæ HIKLN [*Fig. XXIV*] + Segmento KL + Figuræ rectilin. HXTN — triang. TlZ — Segm. lZ; id eſt (quia KL = lZ) = Figuræ rectilin. HIKLN + trapez. HXTN — triang. TlZ.

LECTIO QUINTA.

Inventio Curvarum, quæ unicum habeant ſpatium quadrabile.

AD confirmationem ejus quod diximus, dari ſpatium curvilineum geometricum, quod unico modo ſit quadrabile, & non infinitis, ut Dn. TSCHIRNHAUS aſſerit *; innumera alia ſpatia geometrica, præter illud, quod modo protulimus, conſtrui poſſunt; quæ omnia ſi plures partes quam unicam quadrabiles haberent, exinde quadratura Circuli vel Hyperbolæ ſequeretur. Non abs re itaque erit, ſi modum tradamus conſtruendi has curvas; fortuito etenim ſeſe haud offerunt, ut nec illa quam Lect. 4 propoſuimus, & quæ a Dno. LEIBNITIO ſolvenda proponebatur Dno. TSCHIRNHAUS, caſualiter eidem Dno. LEIBNITIO incidit, ſed poſtquam illam dedita opera ſynthetice conſtruxiſſet, ut analytice denuo reſolvatur, exhibuit; id quod longe difficilius eſt quam ejuſmodi curvarum conſtructio, quæ nullo labore mille modis perfici poteſt, ut ex regula patebit quam damus.

REGU-

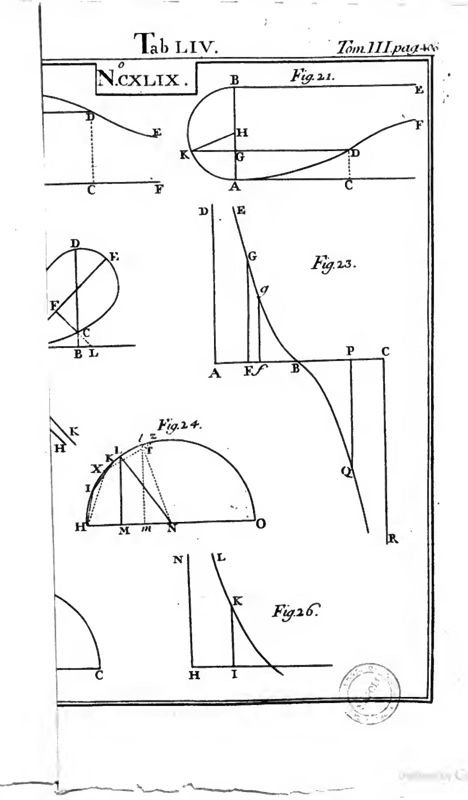
* *Acta Erud.* 1687. Sept. pag. 526. Videantur A°. 1684. Maj. pag. 235, & Dec. pag. 586. 1686. Jun. pag. 292.

REGULA

Pro inveniendis curvis, quarum omnia ſpatia dependent a quadratura Circuli vel Hyperbolæ, præter unicum, quod quadrabile exiſtit.

Id duobus modis peragitur, vel per differentiam duorum ſpatiorum circularium, aut hyperbolicorum, vel per ſummam eorundem. Si differentiam adhibere velimus, eligenda ſunt duo ſpatia circularia aut hyperbolica acceſſione creſcentia, quæ certam relationem ad ſe invicem obtineant, & quarum differentia, ſi aliquouſque perveniant, ſit figura rectilinea. Si vero per ſummam ſpatiorum circularium aut hyperbolicorum rem peragere lubet, talis relatio duobus ſpatiis circularibus vel hyperbolicis accommodanda eſt, ut alicubi eorum ſumma ſit figura rectilinea. Si nunc hujuſmodi duo ſpatia habeantur, eorum differentialium differentia, in illo; ſumma vero, in hoc caſu, applicanda eſt ad rectam ipſi x in Circulo vel Hyperbola ſumptæ æqualem: ſi itaque hæc applicata vocetur y, & æquatio ad rationalitatem reducatur, prodibit nova æquatio exprimens naturam hujus curvæ, quæ generatur per applicationem differentialium differentiæ vel ſummæ: patet autem ex conſtructione, quod ſpatium iſtius curvæ ſit æquale differentiæ vel ſummæ ſpatiorum circularium aut hyperbolicorum; quia vero differentia illa, vel ſumma, unico tantum in caſu quadrabilis eſt, liquet &c. Ut hactenus dicta melius intelligantur, quatuor dabimus exempla, duo per differentiam binorum ſpatiorum circularium & hyperbolicorum, & duo per ſummam eorundem.

TAB. LV. *Fig.* 25. & 26. I. Sit ABC [*Fig. XXV*] Circulus; $AF = a$, $AE = x$; nunc ad libitum ſumo quantitatem pro linea AD, ita tamen ut tandem ſit æqualis ipſi AE, & pro differentia ſpatiorum circularium ſumo ſectorem AFB — ſegmen. ADG; ideoque ſi $AD = AE$, erit differentia iſta triangulum BEF; in omnibus vero aliis differentia eſt ſpatium mixtilineum GBFD, cujus quadratura abſque quadratura ſegmenti GB non habetur. Sit ita-


N.° CXLIX.
Fig. 21.
B
E
D
E
H
F
K
G
D
C
F
A
C
D
E
Fig. 23.
G
g
D
E
F
C
P
C
B L
A
E f
B
K
H
Fig. 24.
l z
L
T
K
X
I
Q
H
M
m
N
O
R
N
L
K
Fig. 26.
H
I
C

itaque $AD = 2xx : a$; erit differentiale segmenti $ADG = 4xdx \sqrt{(4aaxx - 4x^4)} : aa$, differentiale sectoris $AFB = \frac{1}{2} aadx : \sqrt{(2ax - xx)}$. Si itaque fiat curva LK [*Fig. XXVI*] ejus naturæ, ut sumpta $HI = AE = x$, IK sit $= \frac{1}{2} aa : \sqrt{(2ax - xx)} - 4x\sqrt{(4aaxx - 4x^4)} : aa = y$, erit spatium NHIKL = Sectori AFB — Segm. ADG [*Fig. XXV*]. Ut vero minus appareat quod curva ista a natura circuli sit desumpta; æquatio inventa redigenda est ad rationalitatem.

II. Sit nunc ABC [*Fig. XXVII*] Hyperbola æquilatera, $DA = a$, $DF = x$, $DE = xx : a$, erit differentiale spatii $ADFC = dx \sqrt{(aa + xx)}$ & sectoris $ADB = aaxdx : \sqrt{(a^4 + x^4)}$; erit itaque $y = \sqrt{(aa + xx)} - aax : \sqrt{(a^4 + x^4)}$; proinde si sumatur RS [*Fig. XXVIII*] $= RT = a$, erit $SV = y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ & spatium TRSV = triangulo CDF, in eo enim casu B cadit in C. TAB. LV. Fig. 27, & 28.

Duo sequentia Exempla erunt per additionem spatiorum circularium & hyperbolicorum. TAB. LV. Fig. 29 & 30.

III. Sit Circulus ABC [*Fig. XXIX*], $AC = 2a$, $AF = x = AD$, perpendiculari ad AC; erit differentiale Segm. $AFB = dx\sqrt{(2ax - xx)}$; ipsius vero $ADE = adx - dx\sqrt{(aa - xx)}$: construenda ergo est curva GHI [*Fig. XXX*] ita ut si GL est $= AF = x$, LH sit $= a + \sqrt{(2ax - xx)} - \sqrt{(aa - xx)} = y$. Erit GLH = AFB + ADE; proinde, si $GK = a$, erit spatium $GKI = aa$, quia tunc E cadit in B.

IV. Sit BFA [*Fig. XXXI*] Hyperbola, $AD = a$, $DC = x + 2AG$, differentiale spat. $DCFA = dx\sqrt{(aa + xx)}$, diff. spat. $AGB = \frac{1}{2} dx \sqrt{(ax + \frac{1}{4}xx)}$; constructa itaque curva, ut in prioribus factum, ita ut applicata super abscissa x sit $= \sqrt{(aa + xx)} + \frac{1}{2}\sqrt{(ax + \frac{1}{4}xx)} = y$; erit illa curva quæ quæritur, in qua si abscindatur $x = \frac{4}{3}a$, erit spatium curvilineum $= \frac{20}{9}aa$, quia tunc B & F coincidunt. TAB. LV. Fig. 31.

Patet ex his, quod infinita alia spatia inveniri possint, quæ omnia dependent a quadratura Circuli & Hyperbolæ; in unico vero casu quadrabilia sunt. Patet vero quoque, quod si, loco Circuli & Hyperbolæ, adhibeantur alia spatia curvilinea,

construi possint curvæ, quarum areæ dependeant a quadratura spatiorum assumptorum, uno vero modo possint quadrari.

LECTIO SEXTA.

Continuatio ejusdem argumenti.

SAtis, ni fallor, ostensum est quod curvæ, quas hactenus explicuimus, unicum habeant spatium quadrabile; id tamen, ut Dno. TSCHIRNHAUS quadantenus cedamus, non stricte intelligendum est, ac si plane nullam aliam, præter unicam quadraturam admittant; possunt enim segmenta sumi intermedia, & quidem infinita, quæ utique quadrari queunt. Si ergo dicimus unicum duntaxat esse quadrabile; subintellige, inter ea quæ ab initio curvæ abscinduntur, & non inter ea quæ intercipiuntur. Modum enim ostendemus quadrandi infinita spatia intercepta in ejusmodi curvis, quæ generantur ex additione vel substractione duorum spatiorum circularium vel hyperbolicorum; in illis vero curvis, quæ ex aliorum spatiorum additione vel subtractione oriuntur, infinita spatia intercepta quadrari nequeunt, nisi possint sumi duo segmenta æqualia in illis spatiis ex quorum additione vel substractione curvæ sunt genitæ; in quolibet autem spatio duo segmenta æqualia sumere, nondum inventum est; adeo ut etiamsi in Circulo, &, ceu demonstrabimus, in Hyperbola id fieri possit, tamen generaliter omnes curvas, quæ unum spatium quadrabile habent, infinita alia habere Dnus. TSCHIRNHAUS male asseruerit. Quomodo autem infinita spatia, in curvis ex additione vel subtractione spatiorum circularium vel hyperbolicorum genitis, quadrari possint, per exempla supra allata docebimus.

In Exemplo primo * Sector AFB — Segm. ADG [*Fig. XXXII*], id est mixtilineum BGDF, est = spatio LKIHN [*Fig. XXXIII*]; & si AE = AM = $\frac{1}{2}a$, vel $\frac{1}{2}$ AF; erit AD etiam = AM; ideoque, quia tunc G cadit in B, mutabitur mixtilineum FBGD in triangulum FOM; quod ideoque erit

TAB. LV. *Fig.* 32, & 33.

* pag. 408, 409.

æquale

æquale ſpatio LKIHN. Si vero AE majus quam AM; fiet quoque AD majus quam AE; ex quibus manifeſtum eſt, quod quo magis E accedit ad M, eo magis etiam puncta B & G ad ſe invicem accedant; ſi vero E tranſit M, puncta B & G iterum a ſe invicem recedant: neceſſe itaque eſt ut citra & ultra punctum M infinita dentur puncta E & *e*, ita ut ductis DG, *dg*, abſcindantur arcus æquales BG, *bg*, & proinde ſegmenta æqualia GB, *bg*; & quidem, dato uno puncto E, poteſt alterum *e* geometrice inveniri. Hoc bene intellecto, ſumatur AE ad libitum & quæratur exinde A*e*, & fiat HI = AE, & H*i* = A*e*; dico ſpatium LKIHN + ſpat. L*ki*HN eſſe = trapezio rectilineo BGDF + triang. P*d*F — triang. rectilin. *b*P*g*. Nam LKIHN = trapez. rectilin. BGDF + ſegm. BG, & L*ki*HN = triang. P*d*F — triang. rectil. *b*P*g* — ſegm. *bg*. Quia autem duo ſegmenta BG & *bg* ſunt æqualia, ſequitur dictorum ſpatiorum haberi quadraturam.

In Hyperbola idem eodem modo demonſtratur; ſed quia arcus æquales non ſunt uniformes, nec abſcindunt ſegmenta æqualia, ſicut in Circulo; non injucundum erit, ſi demonſtrabimus, quo pacto duo vel plura ſegmenta æqualia, in una eademque Hyperbola, poſſint abſcindi geometrice.

Sit ABCD Hyperbola æquilatera vel inæquilatera; KL, KH ejus aſymptotæ, AB ſegmentum datum, cui aliud æquale inveniendum eſt. A punctis A & B ducantur parallelæ AE, BF ipſi aſymptotæ LK, & ſumpta qualicunque KG, fiat KE : KF = KG : KH, & per puncta G & H agantur parallelæ GC, HD; Dico ſegmentum interceptum CD, dato AB eſſe æquale. Quia enim FB : EA = KE : KF = KG : KH = HD : GC; erit *componendo* & *alternando* FB + EA : HD + GC = EA : GC = KG : KE = HK : KF = GH : EF; ideoque trapez. CH = trapez. AF. Dividatur nunc GH in infinitas partes æquales G*g*, *gg*, &c. & EF etiam in infinitas, E*e*, *ee*, &c. ita tamen ut EF : GH = E*e* : G*g*; ductiſque parallelis GC, *gc*, &c. ut & EA, *ea* &c. Quia nunc E*e* : TAB. LV. Fig. 34.

Gg = EF : GH = KE : KG = GC : EA ; erit rectang. A *e* = rectang. C*g*; pariter demonstratur, quod rectang. *ae* sit = rectang. *cg*, & ita deinceps ; ideoque totum spatium curvilineum AF = toti spatio curvilineo CH; quia vero demonstratum est trapez. AF = trapez. CH, erit quoque segmentum AB = segm. CD. *Q. E. D.*

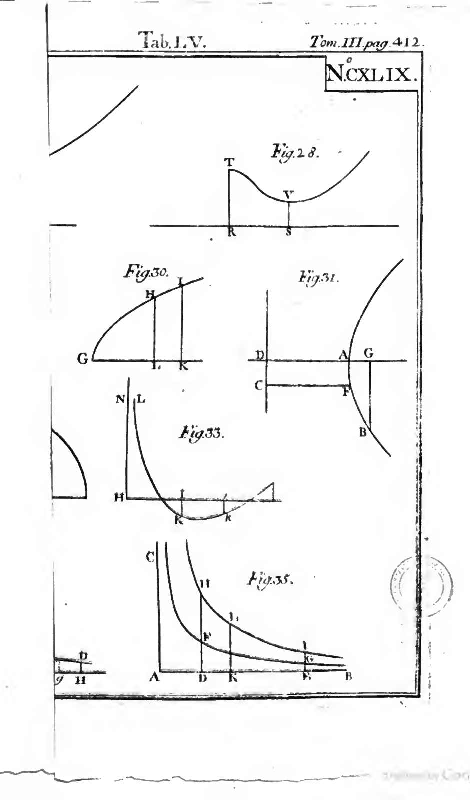
TAB. LV. *Fig.* 35. Ex omnibus, quæ dicta sunt, sequitur, quod si duæ Hyperbolæ FG, HI communes habeant asymptotas AB, AC, earum portiones HE, FE a parallelis interceptæ sint ut HD ad FD: ideoque si fiat AK *eo ordine* media proportionalis inter AD & AE, qui indicatur a ratione FD ad DH, erit HK = FE; id est, si FD = $\frac{1}{2}$ DH, AK debet esse media proportionalis inter AD & AE; si FD = $\frac{1}{3}$ DH, AK debet esse prima duarum mediarum proportionalium inter AD & AE, &c.

LECTIO SEPTIMA.

Quomodo completa reddenda sit Integralis inventa.

EX his satis patere arbitror, quod illa tantum spatia sint infinite quadrabilia quæ generantur ex spatiorum additione vel subtractione, ita tamen ut in his possint duo & plura segmenta æqualia geometrice rescindi; secus enim, non nisi unici habebitur quadratura spatii; ubi nempe additio vel subtractio spatiorum desinit in figuram rectilineam.

Pauca hæc quæ de integralium inventione dicta sunt sufficiant. Observandum interim est quod, quemadmodum differentiale propositum infinita habet integralia, prout unicuique integrali addatur dematurve quantitas constans; ita etiam illud integrale, quod per regulas invenitur, non semper quæsito satisfaciat; sed oporteat, ut prius certa quædam quantitas integrali invento addatur, vel dematur, ut ad finem optatum perveniatur: quia autem non statim innotescit, quænam sit ista quantitas, quæ addi


N.° CXLIX.
Fig. 28.
T
V
R
S
Fig. 30.
H
I
G
L
K
Fig. 31.
D
A
G
C
F
B
N
L
Fig. 33.
H
I
K
k
C
H
Fig. 35.
F
I
G
A
D
K
E
B
D
g
H

addi vel demi debet; operæ prætium erit, ut regula detur, per quam id sciri possit; qualis est sequens.

Spatium, cujus integrale inventum est, supponi debet æquale nihilo; & si tunc integrale, quod ex hac suppositione emergit etiam est $= 0$; signum erit, quod omnibus aliis integralibus nihil, neque addendum, neque auferendum sit. Si vero, ex ista suppositione, integrale adhucdum restat quantitas positiva; hæc ipsa quantitas ab omnibus aliis integralibus auferenda; si vero sit quantitas negativa, in reliquis integralibus addenda erit.

Ut in exemplo superiori, ubi ostendimus quod spatium BGF [*Fig. XVII*] sit æquale segmento KIGH [*Fig. XIX*] — segm. BCDE [*Fig. XVIII*]; hoc autem stricte non ita se habet; sed certum quoddam spatium addendum est, quod ita invenitur. Supponatur spatium BGF $= 0$, erit $m = a$, proinde CD $=$ AD, & IK $=$ FK; differentia itaque istorum segmentorum erit quadrans FKH — quadr. ADE, id est, ipse quadrans ADE, vel semiquadrans FKH: quoniam autem spatium BGF, quando est $= 0$, non potest simul esse æquale semiquadranti FKH; indicium est quod, ad reliquorum spatiorum verum valorem obtinendum, a differentia segmentorum KIGH & DCBE semper sit auferendus semiquadrans FKH. Hinc si CF $= a$, erit spatium BGF $= \frac{1}{2}aa$. Hoc in uno exemplo annotasse satis est; in reliquis idem observari debet. TAB. LIII. Fig. 17. 18. & 19.

LECTIO OCTAVA.

De Methodo Tangentium Inversa.

HÆc ita appellatur, ad distinctionem Methodi tangentium directæ, per quam indifferenter omnium curvarum tangentes determinantur, quæque jam in Calculo differentialium explicata est: ad eam enim nullo Calculo integralium opus habetur.

betur. Methodus autem tangentium inversa est illa, per quam, ex datis tangentium, vel spatiorum curvilineorum, vel curvarum proprietatibus, naturæ ipsarum inveniuntur. Sicuti autem omnium integralium differentialia, sed non omnium differentialium integralia haberi possunt; ita etiam omnium datarum curvarum tangentes facillime determinantur; sed viceversa non æque facile, imo interdum plane non, ex tangentibus natura curvæ indagari potest; adeo ut, quemadmodum in Methodo sumendi integralia, certæ Regulæ exhiberi nequeunt, per quas omnium differentialium integralia inveniantur, sed tantum illæ proponuntur quæ in pluribus, & quidem in innumeris, locum obtinent; sic quoque in methodo tangentium inversa, Regula generalis reddi nunquam possit. Hinc evenit ut variæ formari debeant Regulæ, prout natura rei id exigit, quinimo dici potest, quodlibet fere exemplum suam propriam habere regulam, quæ ut aptissime formetur dependet a sagacitate ejus qui Problema resolvere suscipit; adeo ut certas Regulas præscribere, tam sit inutile, quam impossibile.

Ideoque modum pertractandi hujusmodi Problemata per exempla duntaxat demonstrabimus, in quibus omnibus tamen præcipue observanda sunt sequentia: 1°. Quærenda est ex datis æquatio, quæ consistat in dx & dy. 2°. Omnes quantitates in quibus y & dy reperiuntur, ad unam partem, in quibus vero x & dx ad alteram, si fieri potest, reducendæ sunt. 3°. Ex his quantitatibus reductis, si possibile est, sumendum est integrale, quod naturam curvæ indicabit. His præmissis, sequentia exempla ita resolvuntur.

TAB. LVI. Fig. 36. I. Quæritur qualis sit curva AB, cujus applicata BD semper est media proportionalis inter datam E & subtangentem CD? Sit E $= a$, AD $= x$, DB $= y$, erit per hypothesin CD $= yy : a$; est autem $dy : dx = y :$ CD $= \frac{yy}{a}$; habebitur ergo æquatio hæc $y dx = yy dy : a$ vel $a dx = y dy$; & sumptis utrobique integralibus, habebitur $ax = \frac{1}{2} yy$, vel $2ax = yy$; quod ostendit curvam quæsitam AB esse Parabolam, cujus parameter $= 2a$.

II. Si

II. Si nunc applicata BD est media proportionalis inter subtangentem DC & inter datam E, minus abscissa AD; natura curvæ AB reperitur sic. Quia, per hypoth. $E - AD : BD := BD : DC$, erit $DC = yy : (a - x)$; verum $dy : dx = y : DC = \frac{yy}{a-x}$; ideoque erit $ydx = yydy : (a - x)$, &, reducta æquatione, $adx - xdx = ydy$; sumptisque integralibus $ax - \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}yy$, vel $2ax - xx = yy$; ex quo patet curvam AC esse Circulum, cujus diameter æquatur duplæ E. TAB. LVI. Fig. 37.

III. Indagatur natura curvæ AC, quæ hanc habet proprietatem, ut quadratum applicatæ BC ubique sit medium proportionale inter quadratum datæ E, & spatium curvilineum ABC? Sit $AB = x$, $BC = y$, $E = a$. Est itaque ex hyp. spat. $ABC = y^4 : aa$; proinde ejus differentiale $4y^3 dy : aa = ydx$, & reducta æquatione $4yydy = aadx$; quorum si sumantur integralia, habebitur $\frac{4}{3}y^3 = aax$, vel $y^3 = \frac{3}{4}aax$; ideoque curva quæsita est Parabola cubicalis prima, cujus parameter $= a\sqrt{\frac{3}{4}}$. TAB. LVI. Fig 38.

LECTIO NONA.

Continuatio ejusdem argumenti.

HOc modo invenitur natura omnium curvarum, ex datis tangentium vel spatiorum proprietatibus. Interim tamen occurrunt casus, in quibus integralia, post reductionem æquationis ab una parte ad x & dx & ab altera ad y & dy, vel infinita sunt, vel plane sumi nequeunt; cum nihilominus curva quæsita possit esse geometrica: adeo ut inde nihil concludi queat. In his itaque, & aliis ejusmodi occasionibus, recurrendum est ad alia media; quorum unum erit, ut quærantur integralia ex quantitatibus in quibus x, y, dx & dy promiscue reperiuntur: alterum vero medium est, ut quidem quantitates in quibus sunt x & dx sint separatæ a quantitatibus in quibus y & dy; sed si integralia ex illis sumi non possunt, ut duo spatia formentur, quorum

quorum unius natura exprimitur per quantitates ubi x habetur, alterius vero ubi y exiſtit; & ſi ratio inveniri poteſt inter duo iſta ſpatia, id eſt, ſi parti unius haberi poteſt pars alterius æqualis, ſignum eſt quod curva quæſita ſit geometrica, illiuſque natura inveniri queat; ſi vero unum ſpatium alteri æquari non poſſit, erit curva quæſita ex numero mechanicarum.

Antequam modus primus explicetur, ſumendi nempe integralia ex quantitatibus mixtis ex utroque genere indeterminatarum; oportet ut in anteceſſum hujuſmodi differentialium geneſis conſideretur; quo eo melius, retrogrado ordine, ad cognitionem integralium deveniatur, eorumque generalis formetur idea, quæ deducat ad naturam curvæ quæſitæ. Notum eſt, ex calculo differentialium, quod quantitates quæ hic afferentur habeant illa differentialia quæ ipſis adnectuntur *; ex. gr.

Quant. $y:x$ . . . diff. $(x\,dy - y\,dx):xx$
Qu. $yy:x$ . . . diff. $(2xy\,dy - yy\,dx):xx$
Qu. $y^3:x$ . . . diff. $(3xy^2dy - y^3dx):xx$
- - - - - - - - - - - - - - -
Quant. $y^a:x$ . . . . diff. $(axy^{a-1}dy - y^a dx):xx$

Ex quibus vice verſa ſequitur, quod ſi differentiale quoddam, $ax\,dy - y\,dx$, ſit æquale nihilo; ad inveniendum illius integrale, multiplicandum ſit per $y^{a-1}:xx$; tunc enim quantitas proveniens etiam erit æqualis nihilo, id eſt, $ax\,dy - y\,dx = 0 = (ax\,dy - y\,dx)\times y^{a-1}:xx = 0$, hujus itaque integrale, quod eſt per conſtructionem $y^a:x$, debet eſſe æquale cuilibet quantitati conſtanti, quoniam differentiale eſt $=0$; erit ergo integrale $(ax\,dy - y\,dx) = 0$, ſcilicet $y^a:x =$ quantitati conſtanti b.

His

* Notandum eſt univerſim, quotieſcunque plures habentur differentiales diviſæ per ſuas reſpective integrales, & ſimul ſumptæ æquales nihilo, fore productum ex omnibus integralibus ad dimenſionem æqualem ſuo reſpective coëfficienti elevatis, æquale quantitati conſtanti; ex. gr. ſit $a\,dx:x + b\,dy:y + c\,dz:z +$ &c. $=0$; dico fore $x^a\,y^b\,z^c$ &c. $=$ conſtanti alicui.

His præliminatis, sequentia Problemata facile solvuntur in hunc modum.

I. Quæritur qualis sit curva AB cujus subtangens CD est æqualis duplæ abscissæ AC? Sit $AC = x$, $BC = y$, erit, per hypothesin, $2x : y = dx : dy$; ideoque $ydx = 2xdy$. Si hoc, per Regulam primam, invenire vellemus, æquatio reducenda esset ad hanc $dx : x = 2dy : y$. Quoniam autem utriusque integrale æquatur infinito; ex hoc natura curvæ non habetur; ideoque Problema resolvi debet per hunc alterum modum: $ydx = 2xdy$, ergo $2xdy - ydx = 0 = (2xdy - ydx) \times y : xx$; Hujus itaque integrale, quod, per præcedentia, est æquale $yy : x$, debet æquari constanti cuidam. Sit igitur $yy : x = b$; habebitur $yy = bx$; ex quibus sequitur curvam quæsitam AB esse Parabolam, cujus parameter æqualis est cuilibet assumptæ b. TAB. LVI. *Fig.* 39.

II. Sit nunc subtangens $DC = 3AC$, erit, per hypothesin, $3x : y = dx : dy$, proinde $ydx = 3xdy$, & $3xdy - ydx = 0 = (3xdy - ydx) \times yy : xx$. Hujus autem integrale, per præcedentia, est $y^3 : x$; erit ergo $y^3 : x = bb$, vel $y^3 = bbx$; quæ æquatio est pro Parabola cubicali prima cujus parameter $= b$.

III. Sit generaliter $DC = a \times AC$, erit $ax : y = dx : dy$, ideoque $ydx = axdy$, & $axdy - ydx = 0 = (axdy - ydx) \times y^{a-1} : xx$; cujus integrale est $y^a : x$, ideoque $y^a : x = b^{a-1}$, vel $y^a = b^{a-1}x$; quod denotat curvam ex Paraboloïdeorum genere.

IV. Determinanda est natura curvæ AB, quæ hanc habet proprietatem, ut spatium $ACB = s$, sit semper subtriplum rectanguli circumscripti ADBC. Per hypoth. $3s = xy$, proinde $3ds$, id est, $3ydx = xdy + ydx$; & $2ydx - xdy = 0 = (2ydx - xdy) \times x : y^2$. Hujus ergo integrale, quod est $xx : y$, æquabitur b, vel $xx = by$; quod ostendit curvam AB iterum esse Parabolam. TAB. LVI. *Fig.* 40.

Accidit interdum, ut æquatio proveniens in x, y, dx, & dy, non constet tantummodo duobus membris, sicuti in exem-

plis hactenus allatis; opus itaque est, ut per immutationem quandam & substitutionem litterarum, si fieri potest, ad æquationem bimembralem redigatur; cum qua si more consueto procedatur, devenietur ad æquationem naturam curvæ exprimentem, in qua litteræ immutatæ restituendæ sunt.

TAB. LVI. Fig. 41. V. AB est curva quæsita, AC $= x$, CB $= y$, E $=$ constanti a; subtangens DC ubique est æqualis $(2ax + xx):(a + x)$; quærenda est curvæ natura? Per hypoth. est $\frac{2ax+xx}{a+x} : y = dx : dy$, proinde $ydx = (2axdy + xxdy):(a+x)$ & $2axdy+xxdy = aydx + xydx$. Ponatur nunc $2ax + xx = zz$; erit, propter hanc positionem, $adx + xdx = zdz$. Si itaque, in æquatione inventa, ponatur utrobique valor ipsius x & dx; mutabitur illa in hanc $zdy = ydz$, proinde $zdy - ydz = 0$ $= (zdy - ydz) \times 1 : zz$, cujus integrale est $y : z$, quod ergo æquatur $a : b$, vel $by = az$, & $bbyy = aazz$; &, resubstituto valore ipsius $zz = 2ax + xx$, invenitur $bbyy = 2a^3x + aaxx$, quæ æquatio pro Hyperbola.

LECTIO DECIMA.

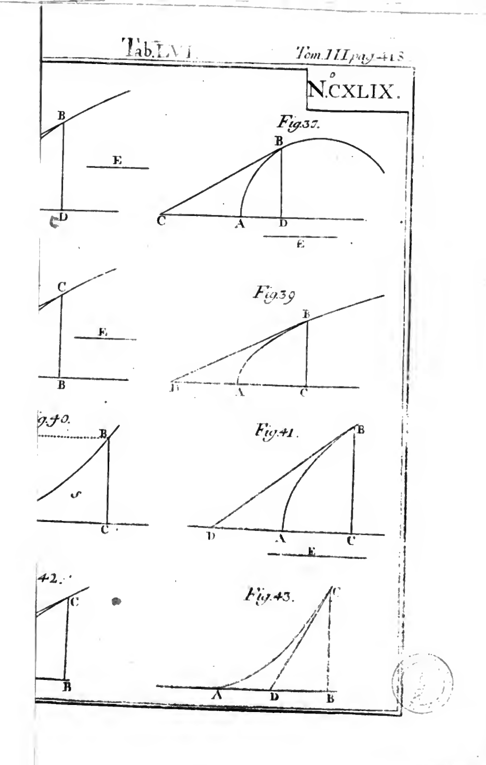
Continuatio ejusdem argumenti.

HActenus exempla protulimus in quibus æquatio ad cyphram est reducenda, & ex ea dein, modo quo diximus, integrale sumendum, quod naturam curvarum monstravit: nunc quædam proponemus, in quibus, si æquatio ad cyphram reduceretur, integrale haberi non posset; ideoque æquatio ita ab utraque parte disponenda est, ut simul ex utroque haberi possit integrale, quod etiam ostendit naturam curvæ.

TAB. LVI. Fig. 42. VI. Invenire qualis sit curva AC ita ut sit $E^2 : BC^2 = BC : DA$? Sit AB $= x$, BC $= y$, E $= a$; per hypoth. est DA $= y^3 : aa$; ideoque DB $= (y^3 + aax) : aa$; est autem dx :

dy

N°CXLIX.


B
E
D
C
A
D
E
Fig.38.
B
C
E
B
Fig.39
B
D
A
C
g.40.
B
C
Fig.41.
B
D
A
C
E
42.
C
B
Fig.43.
C
A
D
B

$dy = DB : BC = \frac{y^3 + aax}{aa} : y$; proinde $(y^3 dy + aaxdy) : aa = ydx$, & $y^3 dy + aaxdy = aaydx$, vel $y^3 dy = aaydx - aaxdy$; ut itaque ex utroque poſſit ſumi integrale, divido utrumque per yy, habebit $ydy = (aaydx - aaxdy) : yy$, quorum integralia ſunt $\frac{1}{2} yy = aax : y$, vel $y^3 = 2aax$; ideoque curva propoſita eſt Parabola cubicalis prima cujus parameter $= a\sqrt{2}$.

VII. Reperire naturam curvæ AC quæ talis eſt ut ſubtangens BD ſit $= \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx}$? Per hypoth. $\frac{2axy - 3x^3}{ay + 3xx} : y = dx : dy$. Invenietur, reducta æquatione, $3xxydx + 3x^3 dy = 2axydy - ayydx$, diviſo per xx habebitur $3ydx + 3xdy = (2axydy - ayydx) : x^4$; ſumptiſque integralibus, erit $3xy = ayy : x$, vel $3xx = ay$, quod Parabolam oſtendit.

Alter nunc oſtendendus eſt modus, qui quotieſcunque æquatio ita diſponi poteſt, ut x & dx ſint ſeparatæ a litteris y & dy, omnino eſt generalis, tam pro curvis mechanicis, quam pro geometricis. Modus autem hic conſiſtit in hoc, ut quantitates quæ cum dx multiplicatæ ſunt, eleventur, ſi ſunt lineares, & deprimantur, ſi ſunt ſolidæ vel altioris generis, ad planum; eodem modo quoque procedendum eſt cum quantitatibus quæ cum dy multiplicatæ ſunt. Elevatio autem iſta, vel depreſſio, fit per multiplicationem, vel diviſionem, quantitatis cujuſdam conſtantis a, aa, a^3 &c. & non per quandam indeterminatam; ſecus res non ſuccederet. Horum itaque planorum differentialia erunt lineæ, quæ ductæ ſunt in dx & dy, quæ, propter æquationem ita inventam, debent eſſe æqualia; proinde ſi iſtæ lineæ applicentur ad ſuas reſpective dx & dy formabuntur duæ curvæ, quorum ſpatia, quia horum differentialia ſunt æqualia, æquabuntur; ideoque, ſi parti unius ſpatii ſuper y formati ſumatur æqualis pars alterius ſpatii ſuper x poſiti, & ſi extremitates iſtarum partium producantur, erit communis ſectio punctum in curva quæſita. Hinc patet, cujus mentionem ſupra fecimus, quod ſi duo iſta ſpatia ſint quadrabilia, vel ſaltem rationem geo-

metrice exprimibilem inter se habeant; curva proposita sit geometrica, cujus natura facile inveniri potest: Si vero, nec quadraturam, nec mutuam rationem geometricam admittant; natura curvæ quæsitæ aliter haberi non poterit, quam concessa quadratura dictorum spatiorum, id est, curva ista erit mechanica. Omnia hæc clarius patebunt per exempla.

TAB. LVII. *Fig.* 44. I. Resumamus exemplum jam superius allatum, videlicet; Quæritur natura curvæ AC in qua subtangens $DB = 2\,AB$; sit $AB = x$, $BC = y$. Per hypoth. erit $2x : y = dx : dy$, proinde $2\,dy : y = dx : x$. Horum autem integrália inveniri non possunt, vel potius sunt infinita; ideoque ut plana evadant, multiplico differentialia per aa, prodibit igitur $2aady : y = aadx : x$. Ad inveniendam per hoc naturam curvæ quæsitæ AC, producatur BA, & per punctum A agatur perpendicularis EF, ita ut AE indefinita repræsentet omnes applicatas BC, id est AG æqualis est BC: erigatur ergo in puncto G perpendicularis $GH = 2aa : y$, & in omnibus aliis punctis idem faciendum; generabitur exinde curva hyperbolica IKH, cujus asymptotæ sunt AD, AG, & semiaxis $AK = 2a$: eodem modo in B ducenda est BL perpendicularis $= aa : x$; idemque peragetur in omnibus aliis punctis; curva quæ inde formabitur NML erit etiam Hyperbola; cujus asymptotæ AF, AB & semiaxis $AM = a\sqrt{2}$. Quoniam itaque $2aady : y$, id est, different. Hyperbolæ IKH æquatur $aadx : x$, id est different. Hyperbolæ NML, erunt omnia differentialia, id est spatium hyperbolicum KG = omnibus differentialibus, id est spatio MB. Restat itaque ad naturam curvæ AC determinandam, ut spatio hyperbolico KG sumatur aliud MB æquale; tunc enim productis LB, HG, erit punctum occursus C in curva quæsita. Per ea autem, quæ supra * dicta sunt, dato spatio hyperbolico ab asymptotis & applicatis contento inveniri potest aliud ipsi æquale; & quidem, hoc in casu, quia $KA : AM = 2 : \sqrt{2}$, vel potius quia si iisdem asymptotis AD, AG, fiat Hyperbola eadem, vel æqualis cum NML, ordinatim applicatæ Hyperbolæ IKH sunt duplæ applicatarum illius; faciendum est $AO^2 : AG^2 = AP :$ AB;

* Lect. VII. pag. 412.

AB; erit ſpatium KG = ſeat. MB. Quia autem $AP : AB = AO^2 : AG^2 = PS^2 : BC^2$; liquet curvam ASC eſſe Parabolam. *Q. E. I.*

Eodem modo, ſi $BD = 3\,AB$, invenitur quod $PS^3 : BC^3 = AP : AB$; & proinde quod ASC ſit Parabola cubicalis; pariter in quacunque poſitione rationis DB ad AB, invenitur ſemper natura curvæ ASC.

II. Quæritur natura curvæ BDC, cujus ſubtangens ſemper ſit æqualis conſtanti a? Per hypotheſin eſt $dy : dx = y : a$; proin $ydx = ady$ & $dx = ady : y$; multiplicato utroque per a, habebitur $adx = aady : y$; ideoque ad curvam conſtruendam, ducantur indefinite normales BI, LH; & ad omnes AB, AN, AO, &c. quæ ipſis y ſunt æquales, applicentur KB, NE, OF, &c. $= aa : y$; fiet curva KEF Hyperbola cujus aſymptotæ AO, AL; & ad AG, AH applicentur GP, HQ &c. $= a$; erit IPQ linea recta & parallela AH. Sumpto igitur ſpatio hyperbolico KN æquali rectangulo AP, & KO æquali AQ; erunt puncta concurſus D, C &c, in curva quæſita. Hinc ſi AG, AH, &c. ſunt arithmetice proportionales, erunt AB, AN, AO &c. geometrice proportionales; quia ſpatia KN, EO, &c. debent eſſe æqualia; proinde curva BDC eſt Logarithmica. TAB. LVII. Fig. 45.

LECTIO UNDECIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

PRoblemata, quæ hactenus propoſuimus, ſoluta ſunt per ipſarum litterarum primo poſitarum extractionem integralium: nunc quædam ſequuntur, in quibus, antequam integralia poſſint accipi, ſubſtitutio litterarum adhibenda eſt, & quidem talis, quæ cuilibet exemplo conveniens eſt: certa enim Regula pro hoc tradi nequit. Habentur tamen quædam Regulæ generales, pro ſeparatione indeterminatarum per ſubſtitutionem facienda.

Sic omnes æquationes differentiales, ubi nulla reperitur littera constans pro supplendis homogeneis, possunt reduci ad alias separabiles; si pro x substituatur zy, & pro dx, $zdy + ydz$; vel contra, pro y, zx & pro dy, $zdx + xdz$.

Item omnes æquationes differentiales, ubi indeterminatæ x & y primam dimensionem non transcendunt, possunt reduci ad separabiles, si omnes quantitates, quibus dx afficitur, ponantur $= z$; quo substituto, omnes deinde, quibus dy afficitur, alii litteræ t ponendæ sunt æquales; donec tandem perveniatur ad æquationem, in qua nulla littera constans invenitur, quæ nempe vicem subeat homogeneæ. Ultima hæc æquatio mutatur demum in separabilem per modum ante dictum.

Idem præstari potest, si ponatur $x = z +$ constante quadam incognita, & $y = t +$ alia quadam constante incognita, eorumque valore substituto in æquatione, si termini ubi reperiuntur cognitæ in utroque membro æquentur nihilo; hoc enim modo invenitur quid pro incognitis constantibus sumendum sit, ut, illis in æquatione evanescentibus, appareat æquatio consistens homogeneis solis indeterminatis; quæ igitur solvi potest ut supra.

Præcipue tamen tentandum, ut, per substitutionem hanc, dimensiones litterarum diminuantur; vel, ut ejus ope indeterminatæ cum suæ speciei differentialibus secerni, & ad partem alteram separatim poni possint.

Primum exemplum quod damus ostendit substitutionem quæ dimensiones litterarum diminuit. Sequens vero per substitutionem monstrat separationem indeterminatarum.

I. Indagatur natura curvæ, in qua si abscissa $= x$, ordinatim applicata $= y$, subtangens est $= (3x^3 - 2axy) : (3xx - ay)$. *Solutio:* Per hypoth. est $dx : dy = \frac{3x^3 - 2axy}{3xx - ay} : y$; proinde $3x^3dy - 2axydy = 3xxydx - ayydx$. Ut dimensiones deprimantur, ponatur $y = mx$, erit $dy = mdx + xdm$; ex æquatione inventa substituatur valor ipsius y & dy, habebitur itaque, reductis reducendis, $3xxdm - 2amxdm = ammdx$; ponatur nunc

$x =$

$x = mn$, erit $dx = mdn + ndm$; proinde in ultima æquatione substituto valore ipsius x & dx, proveniet $3nndm - 3andm = amdn$. Sit $n = aa : r$, erit $dn = - aadr : rr$; æquatio ergo inventa reducetur ad hanc $3adm - 3rdm = - mdr$. Sit $r - a = t$, erit $dr = dt$, habebitur æquatio hæc $3tdm = mdt$, vel $3tdm - mdt = 0 =$ [ut integrale possit sumi, per modum supra explicatum] $(3tdm - mdt) \times mm : tt$; hujus itaque integrale, quod est $m^3 : t$ erit $=$ quantitati constanti b, proinde $m^3 = bt$. Et quidem hæc est æquatio, quæ explicat naturam curvæ quæsitæ. Ut autem illa habeatur in litteris x & y, oportet ut retrogrado ordine substituatur valor litteræ unius post alteram, donec tandem deveniatur ad æquationem, in qua x & y solum reperiuntur. Substitutio autem hæc fit hoc modo: $m^3 = bt =$ [ob $t = r - a$] $br - ba =$ [ob $r = aa:n$] $aab : n - ba =$ [ob $n = x : m$] $aabm : x - ba$; ideoque habebitur $m^3 x = aamb - bax$: quia autem $m = y : x$, æquatio inventa convertetur in hanc $y^3 : : x = aaby : x - bax$, vel reducta æquatione, $y^3 + bax^3 = aabyx$, vel, ut æquatio ubique æquales dimensiones habeat, sit littera constans & ad libitum assumpta $b = 1 : a$; proveniet $y^3 + x^3 = ayx$; quæ designat naturam illius curvæ, cujus supra * quadraturam invenimus.

II. Alterum hoc exemplum, quod damus, propositum fuit Dno. DESCARTES a Dno. de BEAUNE, cujus solutio in ejus operibus non extat, quam tamen invenisse ait in libro Epistolarum †. Solutionem itaque, juxta nostram methodum, hic apposuisse non pænitebit; præsertim cum primo intuitu appareat Problema per hanc methodum (ob indeterminatarum inseparabilitatem) impossibile esse solutu; videbitur autem quod, post levem quandam substitutionem indeterminatæ, facile ab invicem separari, & ob id Problema plenarie solvi possit; supposita tamen quadratura Hyperbolæ: est enim curva ista quæsita mechanica.

Problema autem propositum est tale: Recta AC facit angulum semirectum cum axe AD, & E est linea data constans; quæritur TAB. LVII. *Fig.* 46 47 & 48.

* Lect. IV. pag. 403 & seq. † *Tom. III.* Epist. 71.

quæritur natura curvæ AB, in qua ordinatim applicata BD est ad subtangentem FD, ut data E ad BC? *Solut.* Sit AD $= x$, DB$= y$, E $= a$; erit per hypoth. $dy : dx = a : y - x$; proinde $adx = ydy - xdy$; ex hac igitur æquatione oporteret invenire curvæ naturam, aut sumendo integralia, aut redigendo y cum dy ad unam, x vero cum dx ad alteram partem, ut inde duo plana possint formari, ex quorum comparatione pervenitur ad naturam curvæ; quoniam autem ex æquatione inventa, nec possunt sumi integralia, nec x & dx separari ab y & dy; oportet ut æquatio mutetur in aliam, substituendo valorem alterutrius indeterminatarum. Sit ergo $y - x = z$; erit $y = z + x$, & $dy = dz + dx$; æquatio itaque inventa convertetur in hanc $adx = zdz + zdx$, vel $adx - zdx = zdz$ & $dx = zdz : (a - z)$. Sic igitur duas indeterminatas separavimus; ideoque ad curvam construendam multiplicetur utrumque per a, erit $adx = azdz : (a - z)$. Et, ductis normalibus GT, NH [*Fig. XLVII*] sumatur GN $=$ GH $= a$, & per puncta H, N, ducantur ipsi GT parallelæ HV, MR, sumptoque NR $=$ NG, agatur perpendicularis RS, & asymptotis RM, RS, & per punctum G ducatur hyperbola LKG: si itaque GO $= z$ & GQ $= x$, erit KO $= az : (a - z)$, & quia QI semper æquatur ipsi a; oportet ut spatio hyperbolico KGO sumatur æquale rectangulum HQ, & producantur lineæ IQ, KO; erit punctum concursus P in curva GPW, quæ satisfacit æquationi inventæ $adx = azdz : (a - z)$. Ut autem ex hac construatur curva quæsita AB, nihilo alio opus est quam ut QP producatur ad Z [*Fig. XLVIII*] ita ut PZ sit æqualis abscissæ GQ, erit punctum Z in curva quæsita AB: quia enim PZ $=$ GQ $= x =$ AD, [*Fig. XLVI*] & QP [*Fig. XLVIII*] $= z$, erit QP + PZ $= z + x = y =$ DB [*Fig. XLVI*]. *Q. E. I.* *

Coroll. I. NR [*Fig. XLVII*] est asymptota GPW, & QP $=$ BC [*Fig. XLVI*]; hinc curva quæsita AB, habet etiam asymptotam ipsi AC parallelam.

Coroll. II. Spatium ADB $= xy + ax - \frac{1}{2} yy$.

LEC-

* Vid. N°. IX, pag. 62; N°. XI, pag. 65; & N°. XXVII, pag. 145. *Tom. I.*

LECTIO DUODECIMA.

Continuatio ejusdem argumenti.

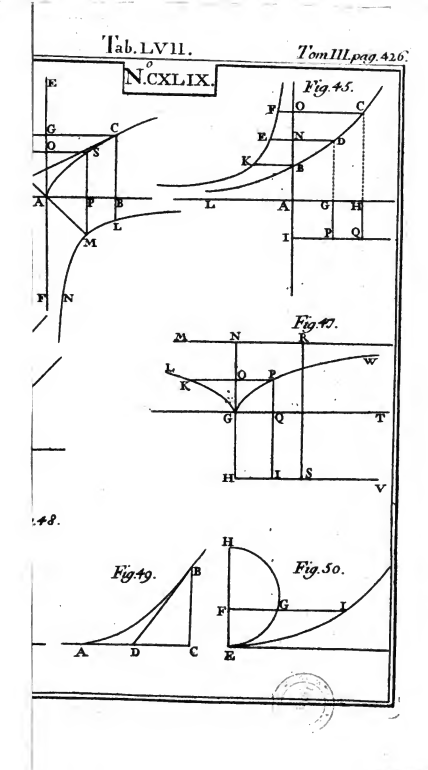
III. INvenire naturam curvæ AB [*Fig. XLIX*], quæ ad tangentem BD sit ubique in data ratione. Problema hoc indeterminatum est, & varias admittit solutiones; nonnunquam enim curva AB est geometrica, nonnunquam mechanica, pro variatione rationis datæ inter curvam AB & inter tangentem BD, ceu melius patebit ex solutione. Sit AC $= x$, BC $= y$, AB $= s$, & ratio AB ad DB ut a ad 1. Per hypoth. est $dy : ds = y : (s : a,)$ proinde $ayds = sdy$, & $ayds - sdy = 0 = (ayds - sdy) \times s^{a-1} : yy$. Hujus itaque integrale, quod est $s^a : y$, erit æquale quantitati constanti. Sit ergo $s^a : y = b$; erit $s^a = by$, vel $s = \sqrt[a]{by}$ & $ds = \frac{bdy}{a\sqrt[a]{(by)^{a-1}}}$. Ut jam calculus eo facilior evadat, sit $a = 2$, habebitur $ds = bdy : 2\sqrt{by}$, est autem $ds^2 = dx^2 + dy^2$, erit ergo $bdy^2 : 4y = dx^2 + dy^2$, &, reducta æquatione, $bdy^2 - 4ydy^2 = 4ydx^2$ vel $dy\sqrt{(b - 4y)} = 2dx\sqrt{y}$, & $dx = dy\sqrt{(b - 4y)} : 2\sqrt{y} = (bdy - 4ydy) : 2\sqrt{(by - 4yy)} = (\frac{1}{4}bdy - ydy) : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)} = (\frac{1}{8}bdy - ydy) : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)} + \frac{1}{8}bdy : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; ideoque proveniet $x = \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)} +$ integ. $\frac{1}{8}bdy : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; hoc autem integrale habetur si fiat semicirculus EGH, [*Fig. L*] cujus diameter EH $= \frac{1}{4}b$, & EF $= y$, erit arcus EG $=$ Int. $\frac{1}{8}bdy : \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; est autem etiam FG $= \sqrt{(\frac{1}{4}by - yy)}$; proinde AC, vel x, vel FI $=$ FG $+$ GE, seu GE $=$ GI, id est curva EI in hac, vel AB, in priori Figura, est Cyclois. Sit nunc $a = \frac{3}{2}$, erit $ds = bdy : a\sqrt[a]{(by)^{a-1}} = bdy : \frac{3}{2}\sqrt[3]{by}$, ideoque $ds^2 = dx^2 + dy^2 = bbdy^2 : \frac{9}{4}\sqrt[3]{bbyy}$ & reducta æquatione invenitur $dx = dy\sqrt{(4bb - 9\sqrt[3]{bbyy})} : 3\sqrt[3]{by}$. Ut integrale hujus haberi possit, ponatur $by = m^3$, erit

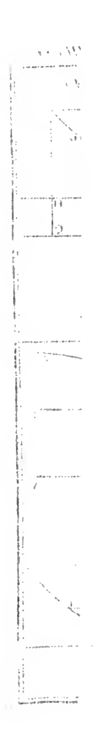
TAB. LVII. *Fig.* 49 & 50.

$dy = 3mmdm : b$; proinde $dy \sqrt{(4bb - 9\sqrt[3]{bbyy})} : 3\sqrt[3]{by} = mdm\sqrt{(4bb - 9mm)} : b$; hujus autem integrale eſt $= -\frac{1}{27}(bb - \frac{9}{4}mm)\sqrt{(bb - \frac{9}{4}mm)} = x$, ideoque ſubſtituto valore ipſius m, provenit æquatio in x & y quæ exprimit naturam curvæ quæſitæ. Hoc ergo in caſu, ſi nempe $a = \frac{3}{2}$, curva erit geometrica; ſi vero $a = 2$, curva ut vidimus eſt mechanica. Si itaque ſolutionem generalem abſolvere velimus, eodem modo procedendum eſt videlicet $ds^2 = dx^2 + dy^2 = bbdy^2 : aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}}$, & $dx^2 = bbdy^2 : aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}} - dy^2$, ideoque $dx = dy\sqrt{(bb - aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}})} : a\sqrt[a]{(by)^{a-1}}$. Ponatur $(by)^{a-1} = m^a$, erit $y = \sqrt[a-1]{m^a} : b$ & $dy = am^{a-1}dm : (ab - b)\sqrt[a-1]{m^{aa-2a}}$; proinde habebitur pro $dx = dy\sqrt{(bb - aa\sqrt[a]{(by)^{2a-2}})} : \sqrt[a]{a(by)^{a-1}} = am^{a-2}dm\sqrt{(bb - aamm)} : (ab - b)\sqrt[a-1]{m^{aa-2a}}$. Hæc formula oſtendit, quod quotieſcunque integrale ſumi poteſt ex hac quantitate, curva ſemper ſit geometrica; ſin minus erit mechanica: prout enim ſumatur littera a, quantitas iſta etiam mutatur. Sic quod diximus verum eſt, Problema nempe hoc infinitas habere ſolutiones.

TAB. LVIII. Fig. 51, & 52. IV. Invenire naturam curvæ, quæ talis ſit ut DC : BC = E : AD; [vid. *Fig. LI*] Sit AC $= x$, CD $= y$, AD $= s$: ex hypoth. $dy : dx = a : s$, proinde $dy = adx : s$; ut autem littera s tolli poſſit [id quod ſemper neceſſe eſt ad curvas determinandas] ſic procedendum eſt. $dy^2 = aadx^2 : ss$, ideoque $ds^2 = [dx^2 + dy^2] = (ssdx^2 + aadx^2) : ss$, & $ds = dx\sqrt{(ss + aa)} : s$; ergo $dx = sds : \sqrt{(ss + aa)}$, eorumque integralia $x = \sqrt{(ss + aa)}$; hinc invenitur $s = \sqrt{(xx - aa)}$, & $ds = xdx : \sqrt{(xx - aa)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; reducta æquatione, invenitur $xxdy^2 - aady^2 = aadx^2$, & tandem $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$. Idem hoc invenitur aliter, & facilius hoc modo: Quia $s = adx : dy$, erit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = addx : dy$ ideoque $dy = addx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Ut utrobique poſſit ſumi integrale, multiplicetur utrumque per dx, habebitur $dxdy = adxddx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sumptis integralibus, erit $xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, reductaque æquatione, erit $dy = adx : \sqrt{(xx - aa)}$, ut ante. *Q. E. I.*

Sequi-


Tab. LVII.
Tom III. pag. 426.
N.° CXLIX.
Fig. 45.
Fig. 47.
.48.
Fig. 49.
Fig. 50.



Sequitur nunc constructio hujus curvæ, ubi primo observandum est quod cum x sit $= \surd(ss + aa)$ & proinde $>$ quam s, initium immutabile ipsius x sit ultra verticem A, & quidem distantia E, quia si $s = 0$, devenit $x = a$. Si itaque velimus, ut initium ipsius x sit in ipso vertice, supponendum est $x = x + a$, & mutabitur æquatio $dy = adx : \surd(xx - aa)$ in hanc $dy = adx : \surd(2ax + xx)$; quam triplici modo sic construimus. Multiplicetur æquatio per a & erit $ady = aadx : \surd(2ax + xx)$ Ductis nunc normalibus AK, GH sese secantibus in B [*Fig.LII*] sumatur BA $= a$, & vertice B, centroque A, describatur Hyperbola æquilatera BC; constructaque curva DI hanc habente naturam ut B A sit ubique media proportionalis inter KC & KD, id est ut KD sit $= aa : \surd(2ax + xx)$, agatur parallela AF, & sumatur rectangulum AG = spatio HBKDI; erit, productis DK & FG, punctum occursus E in curva quæsita. Quæ aliter, & facilius, sic construitur. Ducatur recta AC & duplo spatio hyperbolico ABC sumatur rectangulum AG æquale; erit, productis CK & FG, punctum E iterum in eadem curva quæsita. Adhuc aliter per rectificationem curvæ parabolicæ sic construitur. Quia $dy = adx : \surd(2ax + xx)$, erit $dy + (adx + xdx) : \surd(2ax + xx)$ [diff. EK + KC vel EC] $= (2adx + xdx) : \surd(2ax + xx) = dx\surd(2a + x) : \surd x$; quærenda itaque est curva quædam BL, cujus differentiale sit $dx\surd(2a + x) : \surd x$; & proinde ipsa BL = EC: hæc autem ita invenitur; a $(2adx^2 + xdx^2) : x$ auferatur dx^2, & remanebit $2adx^2 : x$, ideoque $dx\surd 2a : \surd x =$ different. KL, & integr. $dx\surd 2a : \surd x$, id est, $\surd 8ax$, erit æquale ipsi KL; curva igitur BL est Parabola cujus parameter $= 8$ AB; quæ BL si extendatur & applicetur ad punctum C, alter terminus E erit itidem in curva quæsita AE.

Coroll. Curva BE est æqualis KC applicatæ in Hyperbola. Nam si BE dicatur s, erit $ds = \surd(dx^2 + dy^2) = \surd(dx^2 + aadx^2 : (2ax + xx)) = dx\surd((aa + 2ax + xx) : (2ax + xx)) = (adx + xdx) : \surd(2ax + xx) =$ differ. KC.

LECTIO DECIMA TERTIA.

Continuatio ejusdem argumenti.

QUoniam in Problemate præcedente duos modos ostendimus, per quos ad eandem solutionem pervenimus; quorum prior erat ordinarius, & qui ex simplici calculo integralium petebatur, posterior vero differentialium differentialia adhibebat; ex hujus occasione afferemus adhuc unum vel alterum, quæ per vulgarem methodum vix solvi possunt, sed peculiari calculo opus habent, in quo non solum quantitatum indeterminatarum differentialia in considerationem ducuntur, sed etiam ipsorum differentialium differentialia. Regulæ pro hoc ex ipso calculo patebunt.

TAB. LVIII. Fig. 53. V. Datur curva AC, [$AB = x$, $BC = y$, $AC = s$; $E = a$;] proprietate talis, $adsddx = dy^3$; posito quod ds sit quantitas constans, id est, quod dds sit $= 0$. *Solut.* Quia $dx = \surd(ds^2 - dy^2)$, erit $ddx = - dyddy : \surd(ds^2 - dy^2)$, proinde $adsddx\, [dy^3] = - adsdyddy : \surd(ds^2 - dy^2)$ vel $dy^2 = - adsddy : \surd(ds^2 - dy^2)$; quoniam autem neutrius potest sumi integrale, dividatur utrumque per dy^2 & habebebitur hæc æquatio $1 = - adsddy : dy^2 \surd(ds^2 - dy^2)$; posterioris nunc quidem habetur integrale per Regulas in calculo integralium traditas, cum autem unitas non sit differentiale, & proinde integrale non habeat, utrumque multiplicandum est per differentiale constans ut per ds & sic habetur $ds = - ads^2 ddy : dy^2 \surd(ds^2 - dy^2)$; proinde integrale ipsius ds, quod est s, erit æquale integrali alterius $- ads^2 ddy : dy^2 \surd(ds^2 - dy^2)$, quod per Regulam penultimam LECT. secunda * traditam invenitur $ads^2 \surd(ds^2 - dy^2) : ds^2 dy = a \surd(ds^2 - dy^2) : dy$. Formatur itaque hæc æquatio $s = a \surd(ds^2 - dy^2) : dy$, vel $sdy = a \surd(ds^2 - dy^2)$; reducta æquatione invenitur $ssdy^2 + aady^2 = aads^2$ & $(ss + aa)\, dy^2 : aa = ds^2$; quoniam autem $ds^2 - dy^2 = dx^2$, erit ergo $ssdy^2 : aa = dx^2$; ideoque $sdy = adx$, id est, $dy : dx = a : s$, quod osten-

* pag. 399 ab init.

tendit esse curvam cujus naturam in Problemate præcedente explicuimus.

VI. A C [*Fig.LIV*] est curva proprietate talis, ut DB^2 sit ad BC^2 ut E ad AC; quæritur illius natura? *Solut.* Ex hypoth. $dx^2 : dy^2 = a : s$, ideoque $s = ady^2 : dx^2$, & [posito $ddx = 0$] $ds = 2adyddy : dx^2 = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, proinde $2adyddy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx^2$. Sumantur utrobique integralia $2a\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = xdx$, & reducta æquatione provenit $dx\sqrt{(xx - 4aa)} = 2ady$; ex qua æquatione curva sic construitur: Ductis normalibus FB, AC, [*Fig. LV*] sumptoque $BA = 2a$, centro A & vertice B describatur Hyperbola æquilatera BD, ducaturque AG parallela BF; erit sumpto rectang. AH æquali spat. hyperbolico BDI, punctum occursus E in curva quæsita. TAB. LVIII. Fig. 54 & 55.

VII. Positis quæ supra, sit $dx^2 : dy^2 = s : a$. *Solut.* Per hypoth. $s = adx^2 : dy^2$, proinde, mutatis mutandis, erit eadem curva, nisi quod x occupat locum ipsius y, & viceversa.

VIII. AC [*Fig. LVI*] est curva ejus proprietatis, ut sit CB ad subtangentem, ut quadratum G ad spatium ACFD. *Solut.* Sit $AB = x$, $BC = y$, spatium $ACFD = s$, $G = a = AD$. Per hypoth. $dy : dx = aa : s$; erit $sdy = aadx$, eorumque differentialia (posito $ddy = 0$) $ady^2 - ? dy^2 = aaddx$; multiplicetur utrumque per dx, habebitur $adxdy^2 - xdxdy^2 = aadxddx$; nunc sumantur eorum integralia & erit $axdy^2 - \frac{1}{2}xxdy^2 = \frac{1}{2}aadx^2$, vel $2axdy^2 - xxdy^2 = aadx^2$; invenitur itaque $dy = adx : \sqrt{(2ax - xx)}$. Ex hac æquatione curva ita construitur: Diametro AL [*Fig. LVII*] $= 2$ AD [*Fig. LVI*] describatur semicirculus AHL, ductaque ordinata HBC sumatur BC = arcui AH; punctum C erit in curva quæsita: nam differentiale arcus AH est æquale $adx : \sqrt{(2ax - xx)}$ æquale different. BC. TAB. LVIII. Fig. 56, & 57.

LECTIO DECIMA-QUARTA.

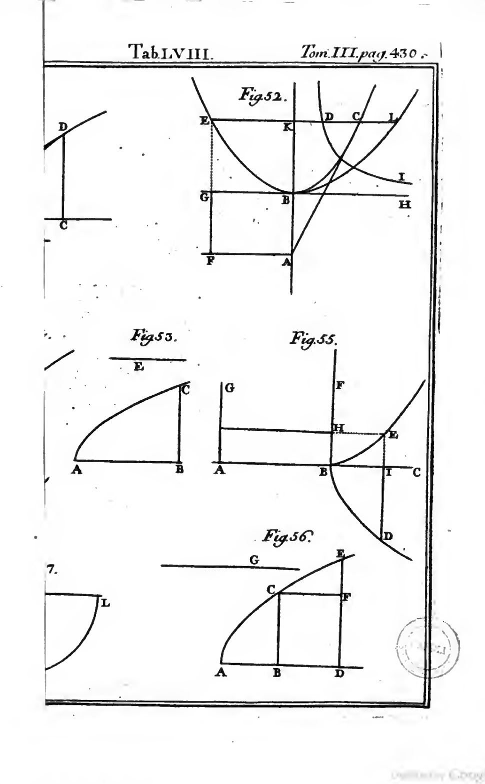
Continuatio ejusdem argumenti.

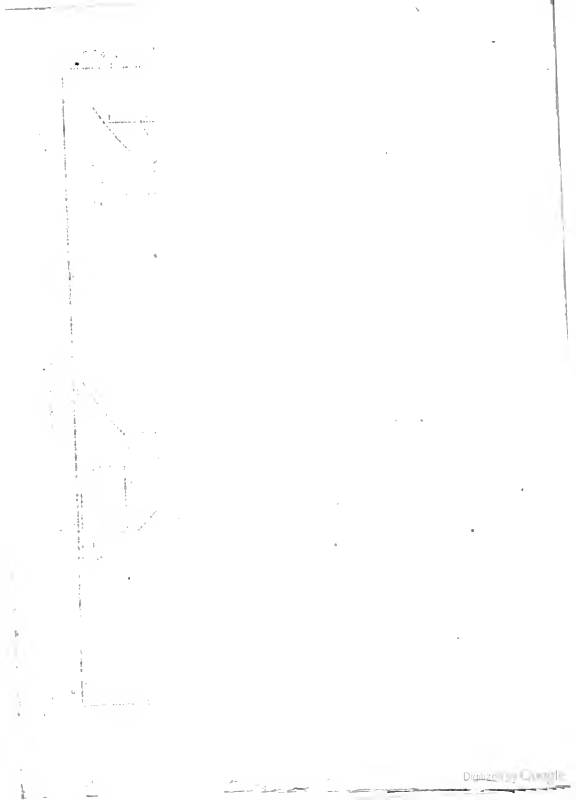
Omnes curvæ, quarum naturas hucusque invenimus, aut fuerunt geometricæ, id est, quarum ordinatæ ad abscissas habent relationem æquatione algebraïca exprimibilem, aut fuerunt mechanicæ, id est, quarum natura per æquationem non habetur, nisi supposita quadam quadratura vel rectificatione cujusdam curvæ geometricæ. Si itaque hæc curva, a cujus rectificatione vel quadratura dependet alterius quæ quæritur natura, ipsa est mechanica; erit curva quæsita non simpliciter mechanica, sed ex secundo genere mechanicarum; & si curva generatrix [generatricem appello a cujus quadratura vel rectificatione dependet quæsita] est ex secundo genere, erit quæsita ex tertio genere mechanicarum, & sic deinceps. Exemplum unum addidisse sufficiat, ubi generatrix est simpliciter mechanica, vel ex primo genere.

TAB. LIX. Fig. 58, 59, & 60. IX. AC [*Fig. LVIII*] est curva quæsita, $AB = x$, $BC = y$, $E = a$; proprietas est talis [posito $ddx = 0$] $2axddy^2 - xxddy^2 = dx^4$; quæritur natura curvæ propositæ?

Solut. Per æquationem datam est $ddy^2 = dx^4 : (2ax - xx)$, proinde $ddy = dx^2 : \sqrt{(2ax - xx)} = dx \times dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; multiplicetur utrumque per a, & erit $addy = adx \times dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; integrale prioris habetur; posterioris autem dependet a rectificatione curvæ circularis: ad quod construendum fiat semicirculus DFG diametro $DG = 2E$ [*Fig. LIX*], & abscindatur $DH = x$, erit arcus $DF = \text{integr. } adx : \sqrt{(2ax - xx)}$; sit itaque arcus $DF = s$, quia autem integr. $addy = ady$, erit $ady = sdx$; curva igitur quæsita sic construitur: Ductis perpendicularibus IK, LN [*Fig. LX*] sumatur $IL = a$; & per L ducatur parallela LQ, appliceturque ad $IN = x$, recta $NM = s$, progenerabitur curva IM, in Probl. præced. explicata, quæ mechanica est; sumpto ergo rectang. LP æquali spatio IMN, erit punctum occursus O in curva quæsita IO.

X. Datur


Fig.52.
E
K
D
C
L
I
G
B
H
F
A
D
C
Fig.53.
E
C
A
B
Fig.55.
G
F
H
E
A
B
I
C
D
Fig.56.
G
E
C
F
A
B
D
7.
L



X. Datur curva A E, quæritur natura alterius cujuſdam A C, ita ut perpendicularis D C, ſit æqualis applicatæ D E? Sit A B $= x$, BC $= y$, AD $= m$, DE $= n =$ D C. Quia Dd: dO $=$ DC : BD, id eſt $dm : dn = n : \frac{n\,dn}{dm} =$ BD, proinde AB $= m - n\,dn : dm = x$; eſt autem DC^2 — BD^2 $=$ BC^2, id eſt $nn - nn\,dn^2 : dm^2 = yy$, proinde $\sqrt{(nn - nn\,dn^2 : dm^2)} = y$. Quia vero AE eſt curva data, quantitas $dn : dm$, vel $dn^2 : dm^2$, ſemper per æquationem ſe deſtruet; adeo ut AB & BC in quantitatibus algebraïcis proveniat: hinc quotieſcunque AE eſt curva geometrica, quæſita A C quoque erit geometrica. Sit, verbi gratia, A E Parabola, parameter $= a$, AD $= m$, DE $= n = \sqrt{am}$; ideoque erit AB $= x = m - \frac{1}{2}a$, & BC $= y = \sqrt{(am - \frac{1}{4}aa)}$, ergo $yy = am - \frac{1}{4}aa$, & $m = (yy + \frac{1}{4}aa) : a$; hinc habetur $x\,[m - \frac{1}{2}a] = (yy + \frac{1}{4}aa) : a - \frac{1}{2}a = (yy - \frac{1}{4}aa) : a$, vel $ax = yy - \frac{1}{4}aa$. Ex quo patet quod curva A C C quæſita ſit etiam Parabola, & quidem eadem cum A E, ſed cujus vertex eſt ultra punctum A diſtantia quartæ partis parametri. TAB. LIX. *Fig.* 61.

Sit nunc A E Circulus, diameter $= 2a$, AD $= m$, DE $= n = \sqrt{(2am - mm)}$; erit per hanc poſitionem AB $= x = 2m - a$, & BC $= y = \sqrt{(4am - aa - 2mm)}$ quia itaque $x = 2m - a$, erit $m = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, proinde $yy\,[4am - aa - 2mm] = ax + \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}xx$. Ad conſtruendam hanc curvam ſit ABC Circulus datus, cujus centrum G, per quod ducatur perpendicularis B G F, ſumpta G F $=$ B G, factaque GD & GE $=$ ipſi BC, axibus BF & ED deſcribatur Ellipſis EFD, dico hanc eſſe curvam quæſitam, id eſt quamlibet perpendicularem HI eſſe æqualem ordinatæ IK. TAB. LXIX. *Fig.* 62.

Sit FE Hyperbola, AD $= m$, DE $= n = aa : m$; erit AB $= x = (m^4 + a^4) : m^3$; BC $= y = \sqrt{(a^4 m^4 - a^8)} : m^3 = \sqrt{\left(\frac{a^4 m^4 - a^8}{m^6}\right)}$, quia itaque $x = (m^4 + a^4) : m^3$ erit $m^3 x = m^4 + a^4$ & $m^4 = m^3 x - a^4$ & quia $y = \sqrt{(a^4 m^4 - a^8)} : m^3$, erit $m^6 yy = a^4 m^4 - a^8$; & ſubſtituto valore ipſius m^4 provenit TAB. LVIII. *Fig.* 63.

$m^6 yy$

$m^6\, yy = a^4 x\, m^3 - a^8$, & $m^6 = (a^4 x\, m^3 - a^8) : yy$, proinde $m^3 = (\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)}) : yy$, erit ergo $x\, [(m^4 + a^4) : m^3]$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)}}{yy} \times \frac{\sqrt[3]{(\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)})}}{\sqrt[3]{yy}} + a^4\right) : \frac{\frac{1}{2} a^4 x \pm \sqrt{(\frac{1}{4} a^8 xx - a^8 yy)}}{yy}.$$

LECTIO DECIMA QUINTA.

De Circulis Osculantibus & Evolutione curvarum, ejusque usu in rectificandis curvis.

TAB. LX. *Fig.* 64 SI sit quælibet curva ABC, & a puncto quodam B ducatur ad curvam perpendicularis indefinita BD; notum est, quod si ubicunque sumatur punctum D in hac perpendiculari, eoque tanquam centro describatur circulus CBF, circulus iste tangat curvam in B, & alibi, si radices non sint imaginariæ, secet eandem in C: manifestum quoque est, quod centro D appropinquante ad B, punctum C ad idem etiam magis accedat; erit itaque certa distantia BD, ad quam si D pervenerit, punctum C omnino cadet in B, & tunc, cum hoc accidit, *Circulus* CBF est ille qui LEIBNITIO appellatur *osculans* vel *osculator*; forsan ideo quia puncta B & C se invicem quasi osculantur. Circulus iste hanc habet proprietatem, ut sit solus qui curvam ABC secet in puncto B [nisi punctum B sit in vertice A, tunc enim semper tangit curvam, posito hinc inde similem esse positionem curvæ,] cum cæteri omnes, quorum centra sunt in recta BD, illam in eodem puncto B tangant: hoc autem, quod nempe Circulus osculator curvam secet, infra demonstrabitur. Quod dictum est de centro D Circuli osculantis curvam in B, pariter intelligendum est de omnibus aliis ubicunque sumatur punctum B; variante ergo puncto B, variabunt quoque centra D, adeo ut describant certam quandam curvam EDδ, (TAB. LX. *Fig.* 65.) quam D. HUGENIUS ostendit esse illam, ex cujus evolutione describitur curva ABβ: id est, si curvæ EDδ applice-

tur

N.° CXLIX.

C

B

Fig. 59.

F

D H G

Fig. 61.

C c

A A B D O d

Ee

O

N

M

Fig. 63.

C

A D B

E

F

C D

tur filum AEDδ, & terminus A æquabili manus ductu moveatur versus B, describet punctum A curvam ABβ, cujus quodlibet punctum B habet centrum sui Circuli osculantis in curva EDδ, & quidem ibi ubi evolvens BD tangit curvam EDδ. Ostendendum itaque est, quod centra Circulorum osculantium sint in curva ex cujus evolutione describitur altera curva cujus sunt Circuli osculantes.

In hunc finem consideranda est genesis curvarum evolutione genitarum. Sit curva ADF, quæ intelligi potest composita ex infinitis rectis AB, BC, CD, DE, EF; si itaque concipiatur huic curvæ applicatum esse filum ABCDEF, cujus unus terminus F fixus est, alter vero A mobilis; evidens est, si terminus iste moveatur versus K, quod terminus A lineolæ AB describat arcum circuli AG, cujus centrum B, qui arculus eousque continuabitur donec AB, id est GB, cadat in directum cum lineola BC; tunc, pergente motu, describetur arcus circuli GH, cujus centrum C & radius CG, vel CH, donec HC cadat in directum cum lineola CD; eodem modo describuntur arculi HI & IK, quorum centra D, vel E, & radii DH & EI. TAB. LX. Fig. 66.

Hinc sequitur, 1°. Quod evolvens HD sit tangens curvæ evolutæ. 2°. Quod eadem HD sit perpendicularis ad curvam evolutione genitam; quia perpendicularis est ad arculum HI, utpote ejus radius. 3°. Quod HD sit æqualis evolutæ ABCD, si nempe terminus fili & initium curvæ evolutæ congruunt; sin minus, erit major vel minor quantitate constanti. 4°. Quod punctum concursus duarum perpendicularium HD & ID, ad quamlibet curvam datam AHIK, quæ quantitate infinite parva distant, sit in curva ADF ex cujus evolutione describitur data AHK.

Ex his facile est demonstrare, quod centrum Circuli osculantis curvam AHK in H sit in puncto D; circulus enim centro D & radio DH descriptus tangit curvam AHK in H, & secat eandem [vel saltem transit] in I; quoniam autem ob distantiam infinite exiguam HI, punctum I intelligi potest ca-

dere in punctum H; sequitur quod Circulus centro D & radio DH descriptus sit osculator curvæ AHK in puncto H; ergo centra Circulorum osculantium sunt in curva ex cujus evolutione generatur curva cujus sunt Circuli osculantes. *Q. E. D.*

Quod isti Circuli osculatores secent curvam sic demonstratur. Sit AB curva, CED alia ex cujus evolutione describitur AB; DB linea evolvens, quæ per modo demonstrata erit radius Circuli osculantis in B: Ducatur recta DG secans curvam in F & peripheriam Circuli in G, & a puncto F ducatur tangens FE; quia GD = BD = FE + curva ED > recta FD; ideo GD > FD; proinde punctum G est extra curvam AB: haud multum aliter demonstratur, quod punctum H sit intra curvam AB; ergo peripheria GBH secat curvam A B. *Q. E. D.*

TAB. LX. *Fig.* 67.

Coroll. Ex iis quæ dicta sunt sequitur, quod si curva AB sit geometrica, CED etiam sit geometrica, & quidem rectificabilis; quia recta BD, quæ ipsi est æqualis, vel constanti quadam major, geometrice inveniri potest.

LECTIO DECIMA SEXTA.

Inventio centri Circuli osculatoris, & Evolutæ.

JAm supra innuimus, quod Circulus osculator sit ille, qui secans curvam in diversis punctis transeat per unum in quo tria intersectionum puncta congruunt, vel potius concurrunt: potest enim semper dari Circulus BCDE, qui quamlibet curvam ad minimum in quatuor secet punctis; si itaque centrum Circuli osculantis quærere libeat, secundum Geometriam *Cartesianam*, ponatur AH = s, HG = t, & radius BG = u; item AF = x, & BF = y; ex his datis haberi poterit æquatio, in qua substituto valore ipsius x in litteris y, vel ipsius y in litteris x, prout natura curvæ datæ id postulat; x vel y ad minimum quatuor habebit dimensiones, quia Circulus ad minimum

TAB. LX. *Fig.* 68.

nimum in quatuor punctis curvam secare potest; proinde, ut iste Circulus fiat osculator, oportet ut supponatur æquationem inventam tres habere radices æquales, id est, ut tres abscissæ, vel tres applicatæ correspondentes punctis intersectionum fiant æquales; & si procedatur juxta Regulam CARTESII, prodibit æquatio, quæ relationem ostendit inter AH & HG, & proinde naturam curvæ, quam describunt puncta Circulorum osculantium.

Operatio hujus est talis: $BG^2 - (BF + GH)^2 = FH^2$, id est, $uu - yy - 2ty - tt = ss - 2sx + xx$ vel $xx + yy - 2sx + 2ty + ss + tt - uu = 0$; in hac æquatione substituendus est valor ipsius x vel y juxta naturam curvæ datæ, quæ exempli loco sit Parabola, ideoque $xx = y^4 : aa$, & $x = yy : a$, & sic habebitur hæc æquatio $y^4 : aa + yy - 2syy : a + 2ty + ss + tt - uu = 0$ vel

$$y^4 + \begin{matrix} aayy \\ -2as \end{matrix} + 2aaty + \begin{matrix} ssaa \\ +ttaa \\ -uuaa \end{matrix} = 0;$$

quia hæc æquatio tres debet habere radices æquales, ponatur, more *Cartesiano*, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$, & pro ultima $y - f = 0$; multiplicentur invicem omnes quatuor & prodibit

$$y^4 \begin{matrix} -3ey^3 \\ -f \end{matrix} \begin{matrix} +3eeyy \\ +3ef \end{matrix} \begin{matrix} -e^3y \\ -3eef \end{matrix} + e^3f = 0;$$

singuli hujus æquationis termini æquandi sunt, cum singulis terminis æquationis inventæ; habetur ergo $-3e - f = 0$; $3ee + 3ef = aa - 2as$; $-e^3 - 3eef = 2aat$; & $e^3f = (ss + tt - uu) \times aa$; per primam est $f = -3e$, substituto valore ipsius f in secunda provenit $-6ee = aa - 2as$, & in tertia erit $8e^3 = 2aat$; proinde juxta illud est $e = \sqrt{(2as - aa)} : \sqrt{6}$, & juxta hoc $e = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2aat}$ ideoque $\sqrt{(2as - aa)} : \sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2aat}$; ut æquatio hæc facilius in rationalibus habeatur, sit $s - \frac{1}{2}a = r$; erit $\sqrt{(ar : 3)} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2aat}$; reducta æquatione, provenit $16r^3 = 27att$; hæc itaque æquatio ostendit naturam curvæ, quam describunt centra Circulorum osculantium in Parabola; ubi notandum quod hæc curva sit Parabola cubicalis secunda, cujus parameter $= \frac{27}{16}a$, & cujus vertex

 distat

diſtat a vertice Parabolæ datæ quantitate $\frac{1}{2}a$; quoniam $s - \frac{1}{2}a = r$. Si radium GB quoque invenire libeat, nihilo alio opus eſt, quam ut ſupra in quarta æquatione $e^3f = (ss + tt - uu) \times aa$, ſubſtituatur valor ipſius f & e; nam ſublato f, habetur $-3e^4 = (ss + tt - uu) \times aa$; quoniam autem $ee = (2as - aa) : 6 = ar : 3$, erit $-aarr : 3 [-3e^4] = ss [rr + ar + \frac{1}{4}aa] + tt - uu) \times aa$, & reducta æquatione invenitur, $uu [GB^2] = \frac{4}{3}rr + ar + \frac{1}{4}aa + tt$, ideoque $u [GB] = \sqrt{(\frac{4}{3}rr + ar + \frac{1}{4}aa + tt)}$. Hinc ſi $r = 0$, erit $t = 0$ & $u = \frac{1}{2}a$, id eſt, centrum Circuli oſculantis Parabolam in vertice diſtat ab eodem quantitate $\frac{1}{2}a$; id quod etiam aliter inveniri poteſt, ſupponendo æquationem ſupra inventam $y^4 + \begin{matrix} aayy \\ -2as \end{matrix} + 2aaty \begin{matrix} +ssaa \\ +ttaa \\ -uuaa \end{matrix} = 0$ quatuor habere radices æquales; tres enim radices æquales in vertice concurrere nequeunt, quin concurrat quoque quarta, ob ſimilem poſitionem ſupra & infra axem curvæ. Sit ergo, ut ante factum, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$ quæ invicem multiplicatæ dant $y^4 - 4ey^3 + 6eeyy - 4e^3y + e^4 = 0$; hujus æquationis ſinguli termini comparandi ſunt cum ſingulis alterius; quia itaque $-4e = 0$, erit quoque $6ee = 0$, $-4e^3 = 0$ & $e^4 = 0$, & proinde $aa - 2as = 0$, id eſt, $s = \frac{1}{2}a$, $-2aat = 0$, id eſt, $t = 0$, & $ss + tt - uu = 0$, id eſt quia $t = 0$, $s = u = \frac{1}{2}a$, ut antea.

Sicuti factum eſt in Parabola, ſic faciendum in omnibus aliis curvis geometricis: *Carteſiana* enim geometria in hoc ad mechanicas ſe non extendit. Quomodo itaque in omnibus curvis, ſive geometricis, ſive mechanicis, centra Circulorum oſculantium generaliter inveniantur calculo differentialium nullo negotio oſ-
TAB. LX. Fig. 69. tendi poteſt. Sit ergo curva data quæcunque AB, cujus Circulorum oſculantium centra invenienda ſint. Supra oſtendimus, quod illa ſint in curva ex cujus evolutione data AB progignitur, vel, quod eodem recidit, in concurſibus D duarum perpendicula-

cularium BD, OD, infinite parva quantitate distantium: invenienda ergo est longitudo BD, ex abscissa AE & ordinata BE. In hunc finem, ducatur BC parallela ipsi AG, & OF perpendicularis ad BC: Sit AE $= x$, EB $= y$; proinde BF $= dx$, FO $= dy$, erit FC $= dy^2 : dx$, ideoque BC $= (dx^2 + dy^2) : dx$, & quia BF : FO $=$ BE : EH, erit EH $= y dy : dx$, BH $= y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$, & AH $= x + y dy : dx$; hujusque differentiale (posito $ddx = 0$) $dx + (dy^2 + y ddy) : dx =$ HG; quia autem BC : HG $=$ BD : HD; erit, *dividendo*, BC $-$ HG : BC $=$ BH : BD, id est, $- y ddy : dx^2 + dy^2 = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$: BD; habebitur ergo BD $= (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : - dx ddy$. Idem hoc aliter inveniri potuisset dicendo, BO : BF $=$ HG : LG, ergo LG $= (dx^2 + dy^2 + y ddy) : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; nunc BO $-$ LG : BO $=$ BL vel BH : BD, pro quo idem provenit.

Per alios adhuc modos perveniri potest ad cognitionem rectæ DB. Ducantur nempe duæ tangentes BM, ON, & arculus vel perpendicularis MP; erit NM differentialis ipsius AM, & quia BO : OF $=$ NM : MP; habebitur MP; quia autem POM, & BDO sunt triangula similia, faciendum ut PM ad BO, ita MO ad quæsitam BD. TAB. LX. *Fig.* 70.

Vel adhuc aliter: ducatur perpendicularis AQ, erit SQ different. ipsius AS, & quia BO : BF $=$ SQ : SR, & SR : BO $=$ OS : BD, inveniri poterit BD, quæ semper erit $= (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : - dxddy$; in qua quantitate si substituatur valor ipsius dx, vel dy, prout natura curvæ id requirit, proveniet semper BD in quantitatibus finitis & absque differentialibus.

LECTIO DECIMA SEPTIMA.

Continuatio ejusdem argumenti.

UT ea quæ supra diximus confirmentur; quod nempe centra Circulorum osculantium sint in curva ex cujus evolutione

 gene-

generatur altera; afferemus exemplum Parabolæ supra allatum, ubi videbitur, quod eadem æquatio proveniat pro natura curvæ, quæ per suam evolutionem describit Parabolam, quæ provenit pro natura curvæ centrorum osculantium.

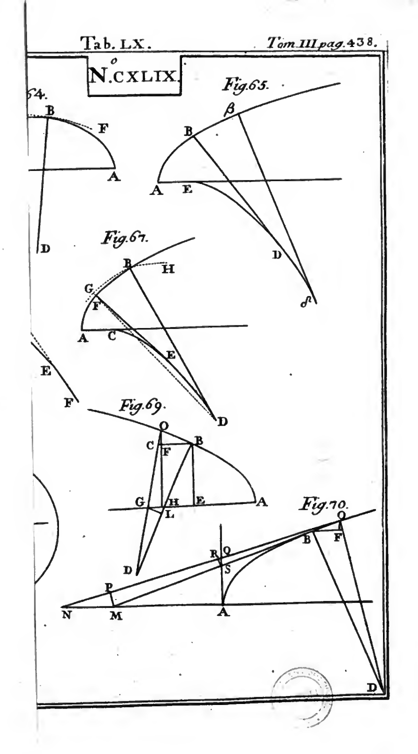
TAB. LXI. *Fig.* 71. Sit itaque AB Parabola, $AE = x$, $BE = y = \sqrt{ax}$, quia generaliter in omnibus curvis $BD = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -ddydx$, substituendus est valor ipsius dy & ddy. Est autem in Parabola $dy = adx : 2\sqrt{ax}$, proinde $dy^2 = adx^2 : 4x$, & $ddy = -adx^2 : 4x\sqrt{ax}$; ergo $(dx^2 + dy^2) : -ddy = (a + 4x)\sqrt{ax} : a$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(a + 4x)} : \sqrt{4x}$, ideoque $BD = (a + 4x)\sqrt{(a + 4x)} : \sqrt{4a}$. Sed ut natura habeatur curvæ in qua punctum D, juxta modum CARTESII, sit $AL = s$, $LD = t$; quia $EH = \frac{1}{2}a$, erit $BH = \sqrt{(ax + \frac{1}{4}aa)}$; ob $BH : BE = BD : BE + LD$, invenitur $LD = 4x\sqrt{ax} : a = t$, & ob $BH : EH = BD : EL$, reperitur $EL = \frac{1}{2}a + 2x$, proinde $AL = \frac{1}{2}a + 3x = s$; sit, ut supra posuimus, $s = \frac{1}{2}a + r$, erit $r = 3x$, vel $x = \frac{1}{3}r$, & sic $4x\sqrt{ax} : a = 4r\sqrt{\frac{1}{3}ar} : 3a = t$; reducta æquatione habetur $16r^3 = 27att$, quæ eadem est æquatio, quam supra invenimus. Ergo, &c.

Sit AB Parabola cubicalis prima, parameter $= a$, $AE = x$, $BE = y = \sqrt[3]{aax}$ erit $dy = adx : 3\sqrt[3]{axx}$, $dy^2 = aadx^2 : 9\sqrt[3]{aax^4}$, & $ddy = -2adx^2 : 9\sqrt[3]{ax^5} = -2adx^2 : 9x\sqrt[3]{axx}$: ergo $(dx^2 + dy^2) : -ddy = \frac{aa + 9x\sqrt[3]{aax}}{9x\sqrt[3]{aax}} : \frac{2a}{9x\sqrt[3]{axx}} = (aa\sqrt[3]{x} + 9x\sqrt[3]{a^2x^2}) : 2a\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(aa + 9x\sqrt[3]{aax})} : \sqrt{9x\sqrt[3]{aax}}$. Ideoque $BD = \frac{aa\sqrt[3]{x} + 9x\sqrt[3]{aaxx}}{2a\sqrt[3]{a}} \times \sqrt{\left(\frac{aa + 9x\sqrt[3]{aax}}{9x\sqrt[3]{aax}}\right)}$

Si AB sit Hyperbola, diameter $= a$, parameter $= b$, $AE = x$, $EB = y = \sqrt{(aax + axx)} : \sqrt{b}$, erit $dy = (aa + 2ax)dx : 2\sqrt{(aabx + abxx)}$, $dy^2 = (a^3 + 4aax + 4axx)dx^2 : (4abx + 4bxx)$ & $ddy = -a^3dx^2 : (4ax + xx)\sqrt{(aabx + abxx)}$. Ergo $(dx^2 + dy^2) : -ddy =$ &c.

TAB. LXI. *Fig.* 72. Sit AB Cyclois, AGH circulus genitor, $AE = x$, $EB = y = EG + AG = \sqrt{(2ax - xx)} + s$; erit ergo dy

$= (a$


N.° CXLIX.
64.
Fig. 65.
Fig. 67.
Fig. 69.
Fig. 70.

$= (a - x) dx : \sqrt{(2ax - xx)} + ds [adx : \sqrt{(2ax - xx)}]$
$= (2a - x) dx : \sqrt{(2ax - xx)} = dx \sqrt{(2a - x)} : \sqrt{x}$,
$dy^2 = (2a - x) dx^2 : x$, & $ddy = - adx^2 : x\sqrt{(2ax - xx)}$
proinde $(dx^2 + dy^2) : - ddy = 2\sqrt{(2ax - xx)}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(2a : x)}$, ideoque BD $= 2\sqrt{(4aa - 2ax)} = 2$ GH $= 2$ BL.

Esto AB Logarithmica vulgaris, subtangens EF $= a$, BE $= y$, CE $= x$; ex natura Logarithmicæ est $ydx = ady$, ergo $dy = ydx : a$ & $ddy = dy\, dx : a = ydx^2 : aa$, adeoque $(dx^2 + dy^2) : - ddy = (aa + yy) : - y$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx = \sqrt{(aa + yy)} : y$, ergo BD $= (aa + yy)\sqrt{(aa + yy)} : - yy$, quæ quantitas, quia est negativa, ostendit quod BD non sit versus axem sumenda, TAB. LXI. Fig. 73.

Ex allatis exemplis satis patet, quomodo generaliter in omnibus curvis, & ubique, inveniantur centra Circulorum osculantium. Ostendendum nunc est, quo pacto per compendium inveniri possit distantia a vertice centri Circuli, qui curvam osculatur in vertice.

Sit AB curva data, AC axis, A vertex; radio quocunque AC describatur Circulus ABE; manifestum est, quod, existente radio satis magno, Circulus alicubi secet curvam in B, cum interim semper tangat in vertice; manifestum quoque est, quod appropinquante centro ad A, punctum B quoque accedat ad A: inveniendum itaque est centrum C, ita ut punctum B cadat in A. Sit ergo AD $= x$, DB $= y$, AC $=$ CB $= z$; erit CD $= - z + x$, ejusque quadratum CD^2 $[zz - 2zx + xx]$ + DB^2 $[yy]$ $= BC^2$ $[zz]$, id est, $zz - 2zx + xx + yy = zz$, vel $yy + xx = 2zx$; proinde $z = \frac{1}{2}x + yy : 2x$; quia autem B debet cadere in A, erit $x = 0$; erit ergo $z = yy : 2x$; in qua æquatione substituendus est valor ipsius y, vel x, secundum naturam curvæ, & tunc y vel x ponendum $= 0$; quod provenit, monstrabit quantitatem ipsius z. Exempli loco, sit AB Parabola, erit $z = yy : 2x = ax : 2x = \frac{1}{2}a$. Sit AB Hyperbola habebitur pro $yy : 2x$, $(2ax + xx) : 2x = a + \frac{1}{2}x = a$. TAB. LXI. Fig. 74.

Modus iste succedit tantummodo in curvis geometricis, alter qui sequitur generalis est, tam pro mechanicis quam geometricis.

Sit

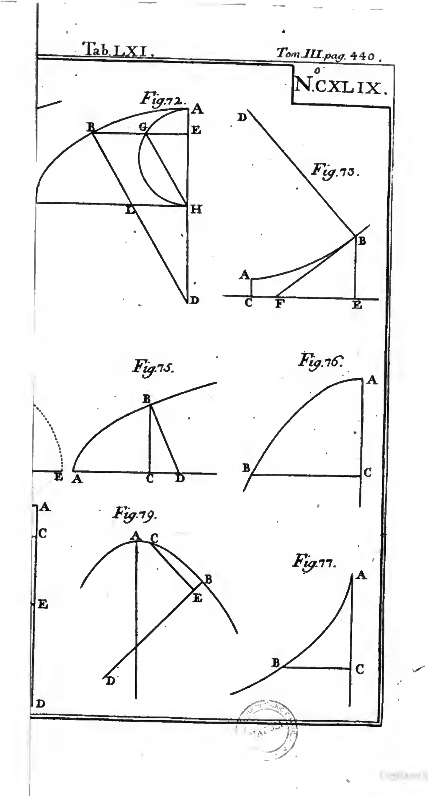
TAB. LXI. *Fig.* 75. Sit AB curva data, CB applicata, BD perpendicularis, AC $= x$, BC $= y$; patet quod si $x = 0$, CD sit distantia centri Circuli osculantis quæsita; est autem $dx : dy = y : CD$, proinde $CD = ydy : dx$; in quo si substituatur valor alterutrius & ponatur alterum $= 0$, habebitur magnitudo CD vel potius AD. Ex. gr. sit AB Parabola, erit $ydy = \frac{1}{2} adx$, & $ydy : dx = \frac{1}{2} a =$ AD. Sit AB Hyperbola, ergo $ydy = adx + xdx$; ideoque $ydy : dx = a + x = a$.

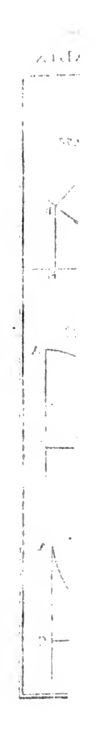
LECTIO DECIMA OCTAVA.

Continuatio ejusdem argumenti.

TAB. LXI. *Fig.* 76. & 77. Notandum est, quod prior modus se etiam extendat ad curvas mechanicas, si modo supponatur, quod demonstratu facile est, quamlibet curvam AB, [*Fig. LXXVI* & *LXXVII*] si AC sit indefinite parva, æqualem esse applicatæ BC, si nempe AB sit concava versus axem, & æqualem abscissæ, si sit convexa versus eundem; supponitur autem quod tangens in vertice sit aut perpendicularis ad axem vel ipse axis; illud in primo, hoc in altero casu. Si itaque regulam velimus applicare ad Cycloidem; Sit AGE circulus genitor Cycloidis AB, $AE = a$, $AC = x$, $AG = GB = s$, $CB = y = s + \sqrt{(ax - xx)}$, quia itaque supposita $AC = 0$, AD est $= yy : 2x$, substituendus est valor ipsius $yy = ss + ax - xx + 2s\sqrt{(ax - xx)} =$ (ob $AG = GC$) $2ax - 2xx + 2ax - 2xx = 4ax - 4xx$; habebitur $yy : 2x = 2a - 2x =$ [ob $x = 0$] $2a = 2$ AE, & sic in aliis mechanicis etiam procedendum.

Hoc interim observatu dignum est, quod hæc regula generalissima reddi possit; id est, per eam in omnibus curvis, tam mechanicis, quam geometricis, in quovis puncto dato centrum Circuli osculatoris inveniri queat, ut ut paulo prolixius quam per methodum differentialem. TAB. LXI. *Fig.* 79. Sit AB curva data, in qua punctum B; describendus est Circulus osculans curvam in hoc


N.° CXLIX.
Fig. 72.
A
B
G
E
L
H
D
Fig. 73.
D
B
A
C
F
E
Fig. 75.
B
E
A
C
D
Fig. 76.
A
B
C
Fig. 79.
A
C
B
E
D
A
C
E
D
Fig. 77.
A
B
C



hoc puncto? Ducatur BD perpendicularis ad curvam AB; quia itaque centrum Circuli osculatoris debet esse in recta BD, potest BA considerari tanquam curva, cujus vertex B, axis BD, applicata CE, quæ est perpendicularis ad axem BD; ex data dein natura curvæ quærenda est relatio inter BE tanquam abscissam & inter CE tanquam ordinatam; & tunc faciendum $BD = yy : 2x$, id est, $= CE^2$ divisum per duplum BE; erit BD, si BE indefinite parva, radius Circuli osculatoris quæsiti.

Hactenus ostensum est quo pacto in datis curvis invenienda sint centra Circulorum osculantium, vel qualis sit natura curvæ in qua ista centra reperiuntur, id est, qualis sit curva quæ sua evolutione describit curvam datam; ubi monstravimus quod cujuslibet curvæ geometricæ centra Circulorum osculantium constituant etiam curvam geometricam, & quidem unicam, & rectificabilem, cujus nempe longitudo æquivalet radio Circuli osculantis, vel data quantitate deficit.

Ex data nunc natura curvæ centrorum osculantium, quærenda est ipsa curva, quam osculantur Circuli istis centris descripti; vel, quod tantundem est, si datur curva, quæritur altera quæ ex evolutione prioris generatur. Notandum primo antequam ad solutionem progrediamur, quod etiamsi curva data sit geometrica, illa tamen quæ ex hujus evolutione describitur non semper, imo rarissime, sit geometrica, scilicet tunc tantum, cum curva data est rectificabilis. Sciendum etiam, quod hoc Problema infinitas solutiones admittat; prout enim initium evolutionis in curva data sumatur, semper natura curvæ genitæ secundum hanc variationem mutabitur: Sit enim curva data ABCD, cui applicari concipiatur filum, cujus unus terminus fixus sit in D, alter vero protendatur ultra verticem A usque ad E. Si itaque filum evolvi intelligatur, describet punctum E curvam EF, & punctum A curvam AG, quæ duæ curvæ diversæ erunt naturæ. Centrum enim Circuli osculantis curvam EF in E distat ab eodem E: centrum vero osculantis curvam AG in A non distat ab eodem A, sed est in ipso

TAB. LXII. Fig. 80.

ipso vertice. Sic quoque, eodem tempore, quodlibet punctum intermedium B suam describit curvam particularem BH. Sit nunc terminus A fixus & alter D mobilis; manifestum est quod si curvæ ABCD non sit ab utraque parte similis positio, punctum D & omnia intermedia C, vel ultra verticem sumpta, describent curvas DK, CI, tum inter se, tum a prioribus EF, AG, BH diversas.

Quæ cum ita se habeant, curvarum tantum EF & AG naturam quæremus, id est, illarum quæ a puncto quodam ultra verticem & ab ipso vertice describuntur; ceterarum enim BH, haud absimili modo, reperitur natura, considerando B tanquam verticem curvæ BCD, & BL perpendicularem ad curvam tanquam axem, ut in præcedentibus factum est. Sit ergo AB curva data, A vertex, AC axis, curvæ BA applicatum est filum, cujus terminus protenditur ultra verticem usque ad D, qui per evolutionem describit curvam DE, quæritur natura hujus curvæ? Producantur CA, & DA, & demittantur perpendiculares EG, EH. Sit AD $= b$, AB $= s$, AC $= x$, CB $= y$, DH $= r$, HE $= t$; producta EH ad L, est ds $[\sqrt{(dx^2+dy^2)}] : dx = s+b$ [EB] : EL, invenitur ergo EL $= (s+b)\,dx : \sqrt{(dx^2+dy)^2}$, & EH $= (s+b)dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} - x = t$; ob $ds : dy =$ BE : BL, invenitur BL $= (s+b)\,dy : \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, proinde CL $=$ AH $= y - (s+b)\,dy : \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ & DH $= b + y - (s+b)\,dy : \sqrt{(dx^2+dy^2)} = r$. Si AD $= 0$, id est, si evolutio incipit in A ponendum est $b = 0$, & sic proveniet $r = y - s\,dy : \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ & $t = s\,dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} - x$. Si ubique substituatur valor ipsius dy vel dx, secundum naturam curvæ datæ AB, habebitur quidem natura curvæ DE absque differentialibus, sed semper reperitur s, quod indicio est naturam curvæ DE dependere a rectificatione curvæ AB.

TAB. LXII. *Fig.* 81.

LECTIO

LECTIO DECIMA NONA.

Inventio curvarum ex evolutione Parabolæ cubicalis secundæ descriptarum.

UT ea quæ diximus exemplo illustrentur, afferemus Parabolam cubicalem secundam AB, in qua abscissa $= x$, ordinata $= y$, parameter $= a$, AD $= b$; æquatio pro hac Parabola est $axx = y^3$; quia ad curvam DE determinandam ingreditur magnitudo curvæ AB, quæ est s; ideo ante omnia rectificanda est, quod per communem viam ita peragitur: Sumantur quadrata ipsorum dx & dy, postquam alterutrius valor substitutus fuerit; & ipsorum summæ radicis quæratur integrale, hoc ostendet rectificationem curvæ AB. Notandum tamen est [quemadmodum supra monstravimus] quod interdum verus valor non prodeat, sed data quædam quantitas rescindenda vel addenda sit, quæ invenitur ex suppositione x, vel $y = o$. Quoniam ergo $axx = y^3$, erit $x = \sqrt{(y^3 : a)}$ & $dx = 3ydy : 2\sqrt{ay}$; hinc $dx^2 = 9ydy^2 : 4a$, addatur dy^2, habebitur $(9ydy^2 + 4ady^2) : 4a = ds^2$; ergo $ds = dy\sqrt{(9y + 4a)} : \sqrt{4a}$; hujus integrale $(\frac{2}{3}y + \frac{8}{27}a)\sqrt{(9y + 4a)} : \sqrt{4a} = s$. Sed quia supponendo $y = o$ provenit $\frac{8}{27}a = s$, signum est quod a quantitate inventa auferendum sit $\frac{8}{27}a$, & sic $(\frac{2}{3}y + \frac{8}{27}a)\sqrt{(9y + 4a)} : \sqrt{4a} - \frac{8}{27}a = s$. Ut itaque ad naturam curvæ DE deveniatur, quærenda est EH & DH, id est, t & r; supra autem invenimus $t = (s + b)dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} - x$ & $r = b + y - (s + b)dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; utrobique substituatur valor ipsorum s, x & dx, & invenietur $t = (\frac{4}{9}a\sqrt{(9yy + 4ay)} : 2a - \frac{4}{9}\sqrt{ay} + \frac{1}{2}b\sqrt{(y : a)}) : \sqrt{((9y + 4a) : 4a)}$ & $r = ((b + y - \frac{2}{3}y - \frac{8}{27}a)\sqrt{((9y + 4a) : 4a)} + \frac{8}{27}a - b) : \sqrt{((9y + 4a) : 4a)} = b + \frac{1}{3}y - \frac{8}{27}a + (\frac{8}{27}a - b) : \sqrt{((9y + 4a) : 4a)}$. Ex quibus æquationibus manifestum est, quod curva DE valde sit composita, & quidem magis vel minus, prout AD sumitur. Si enim AD, id est b, sit $= \frac{8}{27}a$, provenit

TAB. LXII. Fig. 82.

$t =$

$t = (y + \frac{4}{3}a)\sqrt{(y:a)} - y\sqrt{(y:a)} = \frac{4}{9}\sqrt{ay}$ & $r = \frac{1}{3}y$. Si itaque æquationem invenire libeat exprimentem naturam curvæ DE in litteris t & r, ſubſtituendus eſt valor ipſius y in alterutra æquatione; quia enim $r = \frac{1}{3}y$, erit $y = 3r$, proinde $\frac{4}{9}\sqrt{ay}$ $[t] = \frac{4}{9}\sqrt{3ar}$; exinde formatur æquatio $16ar = 27tt$, quod oſtendit curvam DE eſſe Parabolam, cujus parameter $= \frac{16}{27}a$, cum b eſt $= \frac{8}{27}a$. Is ſolus caſus eſt, qui curvam DE tam ſimplicem reddit; in omnibus enim aliis, & per ipſam poſitionem $b = 0$ [qui caſus poſt priorem ſimpliciſſimus videtur] quantitates t & r admodum compoſitæ reperiuntur, quod cauſatur ut curva DE etiam magis vel minus evadat compoſita.

De Rectificatione curvarum ope ſuæ Evolutionis.

Communiſſima via rectificandi curvas, ut modo innuimus, eſt, ut ſumatur integrale ex radice ſummæ quadratorum ipſius dx & dy. Hæc tamen methodus non niſi in curvis, quarum natura datur per relationem applicatarum ad abſciſſas commode adhiberi poteſt; in aliis quarum natura non niſi per proprietates innoteſcunt, ægre in uſum venit. Modus autem rectificandi curvas per ſuam evolutionem quodammodo generalis dici poteſt, & in aliquibus exemplis longe facilius in cognitionem longitudinis curvæ deducit, quam modus vulgaris; ut ut negandum non ſit, quod cum haberi poteſt æquatio brevis & ſolutu facilis, quæ exprimit relationem applicatæ ad abſciſſam, interdum præſtet vulgarem adhibere.

TAB. LXII. *Fig* 83. Modus autem per evolutionem eſt talis: Sit ABC curva data, cujus quæritur longitudo? Intelligatur punctum A evolvendo deſcribere curvam AD; patet ex ante dictis, quod filum CD ubique ſit tangens curvæ ABC; item quod CD ſit æqualis illi: eſt autem tangens CE data; reſtat itaque ut inveniatur recta ED, quæ ſi innoteſcat, & auferatur a tangente EC, remanebit DC = curvæ quæſitæ AC. Recta vero ED ſic reperitur: Ducatur tangens GB, quæ a priori EC infinite parva quantitate diſtet, centroque C deſcribatur arculus GF; haberi poterit triangulum EFG pro rectangulo: quia au-

autem FD est æqualis GM, erit EF differentiale ipsius ED: ducatur AI perpendicularis ad EA; erit, ob datam curvam, EI & EA data, sit ergo EI $= r$ & EA $= t$; proinde EG $= dt$; quia vero EI : EA $=$ EG : EF; id est, $r : t = dt : \frac{tdt}{r} =$ EF. Ex hoc, si fieri potest, sumatur integrale, quod erit æquale ED, quæ ablata a tangente EC, relinquit DC $=$ AC.

Nonnunquam commodius per additionem alicujus integralis invenitur CD, vel AC. Est enim CD $=$ CI $+$ ID; sed CI est data, restat itaque ut inveniatur ID, quæ ita reperitur. Ducto arculo HL, erit DL $=$ MH; proinde est LI differentiale ipsius DI. Sit ergo EI $= r$, & AI $= t$, proinde HI $= dt$, & fiat EI : AI $=$ HI : LI, invenitur ergo LI $= tdt : r$, cujus integrale dat rectam DI; cui si addatur recta CI, habebitur CD $=$ curvæ quæsitæ AC.

Obiter hic animadvertendum, quod evolutio curvarum inservire etiam possit dimensioni spatiorum. Spatii enim curvilinei ACE differentiale est triangulum GCE, quod invenitur quærendo FG, ex triangulis similibus EGF & EIA, & multiplicando hanc FG per dimidiam EC. Eodem modo LH, multiplicata per dimidiam IC, dat differentiale spatii curvilinei AIC.

Sit Parabola cubicalis secunda AC, AR $= x$, RC $= y$, parameter $= a$; ergo $axx = y^3$. Erit AE $= \frac{1}{2} x = t$, AI $= \frac{1}{3}$ RC $= \frac{1}{3} y$, EI $= \sqrt{(\frac{1}{4} xx + \frac{1}{9} yy)} = r$; quia vero $x = \sqrt{(y^3 : a)}$ erit $dt = \frac{3}{4} ydy : \sqrt{ay}$, proinde $tdt : r = 3yydy : 8a\sqrt{(\frac{1}{4} xx + \frac{1}{9} yy)} = 3ydy : 8a\sqrt{(\frac{1}{4} y : a + \frac{1}{9})} = 3ydy : 8\sqrt{(\frac{1}{4} ay + \frac{1}{9} aa)}$. Hujus integrale invenitur supponendo $\frac{1}{4} ay + \frac{1}{9} aa = zz$; erit enim æquale $\frac{1}{2} z^3 : a - \frac{1}{6} az$, quod si auferatur ab EC, remanebit DC $=$ AC. TAB. LXII. Fig. 84.

Sit AC Cyclois, ADE circulus genitor, AE $= 2a$, AF $= x$, arcus AD $= s =$ CD $=$ AG, recta AD $= \sqrt{2ax} =$ CG. Quia AD : DF $=$ GH : GI, id est, $\sqrt{2ax} : \sqrt{(2ax - xx)}$ vel TAB. LXII. Fig. 85.

 $\sqrt{2a}$:

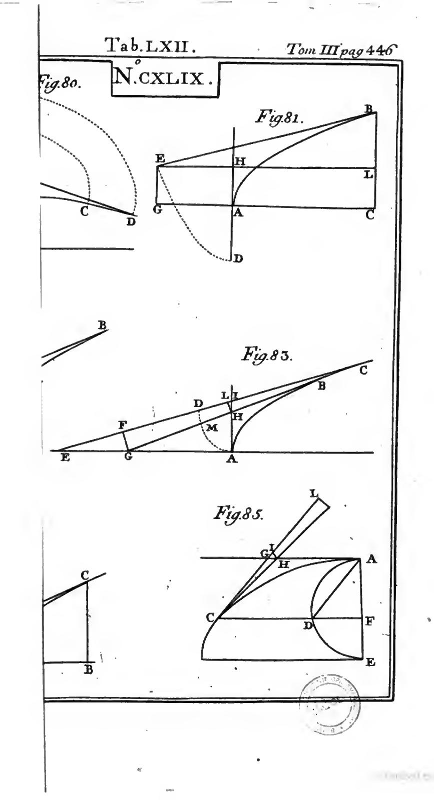
$\sqrt{2a}:\sqrt{(2a-x)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ [ds]: $\frac{adx}{\sqrt{2ax}}$; hujus integrale $\sqrt{2ax} =$ GL; eſt autem $\sqrt{2ax} =$ AD $=$ CG, ideoque CG $+$ GL, vel dupla CG $=$ curvæ AC. Pro dimenſione ſpatii curvilinei AGC, fiat AD : AF $=$ GH : HI, erit HI $=$ $adx:\sqrt{(4a.s-2ax)}$, multiplicetur per $\frac{1}{2}$ CH provenit $\frac{1}{2}\,adx\sqrt{(x:(2a-x))}$; eſt autem hoc æquale differentiali ſegmenti AD; proinde ſpatium curvilineum AGC $=$ ſegm. AD.

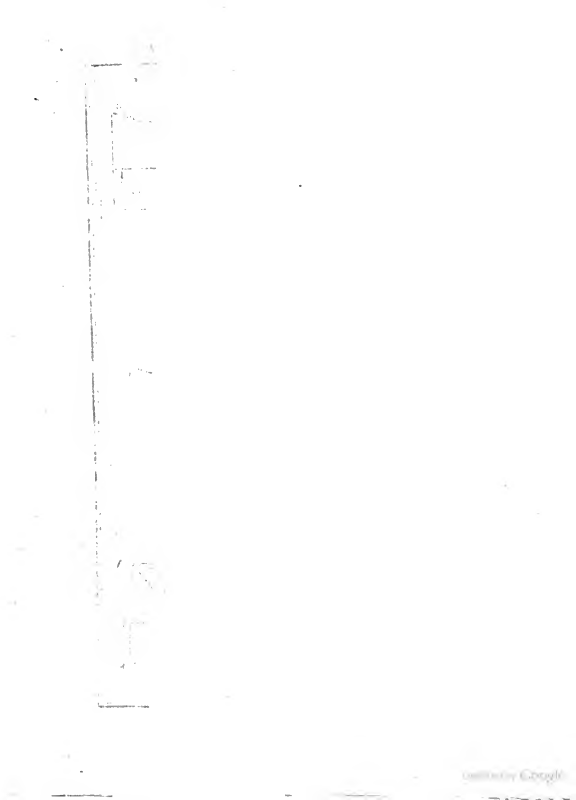
LECTIO VIGESIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

PER Exemplum quod ſequitur apparebit, quo pacto dimenſio inveniatur ſpatiorum & curvarum, non quidem datarum, ſed illarum quæ per evolutionem harum deſcribuntur.

TAB. LXIII. *Fig.* 86. Sit ABE Circulus, cujus evolutione deſcribitur curva AHF, A initium curvæ, F finis: quæritur dimenſio curvæ, portionis cujuſcunque AH, ejuſque ſpatii ACHA? Notandum eſt, quod curva AHIF ſit ſpecies Spiralis; item quod AF intercepta inter initium & finem ſit æqualis peripheriæ Circuli, & perpendicularis ad curvam in punctis A & F. Sit nunc GH differentiale curvæ AH, ducantur tangentes HC, GB, & radii CD, BD; erunt HC, GB perpendiculares ad curvam AH, & æquales arcubus AC, AB, quos voco s, adeoque BC $= ds$. Quoniam itaque angulus GBD $=$ BCD $+$ BDC, & idem GBD $=$ HCD, utpote uterque rectus, erit HCG $=$ BDC; proinde triangulum BCD ſimile triangulo HCG, ergo DC : HC $=$ BC : GH, id eſt, $a:s = ds:\frac{sds}{a} =$ GH; hujus itaque integrale $ss:2a =$ curvæ AH; ex quo patet quod AH ſit tertia proportionalis ad diametrum AE & arcum AC, ideoque, tota AHIF eſt tertia proportionalis ad AE & AF. Pro dimenſione ſpatii ACHA, multiplicetur $\frac{1}{2}$ CH per GH, provenit $ssds:2a =$ differentiali ſpatii


N°. CXLIX.
Fig. 80.
C
D
Fig. 81.
B
E
H
L
G
A
C
D
B
Fig. 83.
C
B
D
L I
H
F
M
E
G
A
C
B
L
Fig. 85.
G I
H
A
C
D
F
E



ſpatii ACH, id eſt, ipſi triangulo GCH; hujus ergo integrale $s^3 : 6a =$ ſpatio ACHA. Hinc totum ſpatium AHIFAECA æquatur tertiæ parti Circuli radio AF deſcripti: Curva vero AHIF æqualis eſt ſemiperipheriæ ejuſdem Circuli.

TAB. LXIII. *Fig.* 87.

Hæc, quam addimus, curva oſtendit quod multo facilius ſit ejus rectificationem invenire, & ſpatium æquare circulo, per evolutionem ſuam, quam per modum vulgarem. Problema autem eſt tale. Datus eſt angulus rectus CAB, cujus duo crura AC, AB indefinite protenſa, quibus inſiſtit regula quædam, vel linea data DE mobilis, cujus duo termini D, E moventur in cruribus AC, AB: quæritur natura curvæ CFB, quæ a regula DE in quovis ſitu tangitur; item rectificatio illius, & dimenſio ſpatii FEB? *Solut.* Ad naturam curvæ obtinendam quærenda eſt longitudo EF, id eſt, diſtantia puncti contactus ab alterutro terminorum E. Quoniam autem punctum contactus cujuſcunque curvæ, & rectæ, eſt in puncto interſectionis, in quo duæ tangentes infinite parva quantitate diſtantes ſe mutuo interſecant, quærendum igitur eſt punctum F, in quo duæ lineæ æquales DE, de [ſuppoſito quod Dd ſit differentiale ipſius AD] ſe interſecant. Punctum autem hoc ſic invenitur. Ducatur EH parallela ipſi AC, & ſit DE vel $de = a$, AE $= x$, erit AD $= \sqrt{(aa - xx)}$, E$e = dx$, D$d = x\,dx : \sqrt{(aa - xx)}$. Quia eA : A$d = e$E : EH, erit EH $= dx\sqrt{(aa - xx)} : x$; eſt autem EH : dD $=$ EF : FD, & componendo EH $+ d$D : EH $=$ ED : EF, id eſt, $\frac{aa\,dx}{x\sqrt{(aa-xx)}} : \frac{dx\sqrt{(aa-xx)}}{x} = a : \frac{aa-xx}{a}$; erit itaque EF $= (aa - xx) : x$, proinde DF $= a - (aa - xx) : a = xx : a$. Ex hoc curva CBF facile ſic conſtruitur. Ducta in angulo recto linea DE quomodocunque $= a$, ſumatur DF æqualis tertiæ proportionali ad DE & AE, erit punctum F in curva quæſita CFB. Hinc ſequitur, quod AB & AC, ad extremitates curvæ uſque ductæ ſint æquales datæ DE.

Si naturam curvæ CFB, more *Carteſiano*, invenire velimus; demit-

demittatur perpendicularis FK, & ſit AK $= r$, KF $= t$; quia DE : DA $=$ FE : FK, invenitur FK $= (aa - xx)\sqrt{(aa - xx)} : aa = t$, & quia DE : AE $=$ DF : AK, invenitur AK $= x^3 : aa = r$. Per priorem æquationem eſt $(aa - xx)^3 = a^4tt$, proinde $aa - xx = a\sqrt[3]{att}$, ideoque $x = \sqrt{(aa - a\sqrt[3]{att})}$, & $x^3 = \sqrt{(aa - a\sqrt[3]{att})^3} =$ [per alteram æquationem] aar, proinde $(aa - a\sqrt[3]{att})^3 = a^4r^2$ & $aa - a\sqrt[3]{att} = a\sqrt[3]{arr}$, vel $a = \sqrt[3]{att} + \sqrt[3]{arr}$; ſumptis cubis $a^3 = att + 3at\sqrt[3]{rrt} + 3ar\sqrt[3]{rtt} + arr = att + 3a\sqrt[3]{aattrr} + arr$; reducta æquatione habetur $aa - tt - rr = 3\sqrt[3]{aattrr}$; ſumptis cubis & reducta æquatione ad cyphram erit

$$\begin{array}{llll} r^6 - 3aar^4 & + 3a^4rr & - a^6 & = 0 \\ \quad + 3tt & + 21aatt & + 3a^4tt & \\ & + 3t^4 & - 3aat^4 & \\ & & + t^6 & \end{array}$$

Si per hanc æquationem rectificationem curvæ CFB indigare vellemus methodo ordinaria, res factu difficilis, quinimo fere impoſſibilis eſſet, ob æquationem curvæ valde compoſitam,

---

LECTIO VIGESIMA PRIMA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

TAB. LXIII. *Fig.* 87. QUam difficile eſt invenire rectificationem curvæ CFB per æquationem inventam ſex dimenſionum parium, tam facile contra reperitur illa per evolutionem curvæ. Sit enim BNM, quam evoluta CFB deſcribit; AB, vel AC, vel DE $= a$, BE $= z$, erit AE $= a - z$, proinde FE $= (2az - zz) : a$ AD $= \sqrt{(2az - zz)}$ & E$e = dz$; quia itaque DE : AE $=$ Ee : EL, id eſt, $a : a - z = dz : \frac{adz - zdz}{a}$, cujus integr. $(az - \frac{1}{2}zz) : a =$ EN; addatur FE $[(2az - zz) : a]$ provenit $(3az - \frac{3}{2}zz) : a =$ FN $=$ curvæ FB. Eſt autem

$2az$

$\frac{2az - zz}{a} : \frac{3az - \frac{3}{2}zz}{a} = 2 : 3$; erit etiam FE : FB $= 2 : 3$. Hinc oppido ratio ſpatii FEB ad ſpatium FBN liquet, quia enim FE vel FL : FN $= 2 : 3$; erit triangulum FLE : triang. FNO $= 4 : 9$; proinde omnia triangula ad omnia triangula, id eſt, ſpatium FEB ad ſpatium FBN ut 4 ad 9; eſt etiam DE : AD $=$ Ee : eL, id eſt, $a : \surd(2az - zz) = dz : \frac{dz\surd(2az - zz)}{a} =$ Le; multiplicetur per $\frac{1}{2}$ FE habebitur $(2az - zz)\, dz\surd(2az - zz) : 2a^2 =$ triangulo FEe; hujus autem integrale[ut patet per ea quæ ſupra in Calculo integralium dicta ſunt] dependet a quadratura circuli; poteſt itaque inveniri ſpatium circulare æquale ſpatio FEB. Item FL : FN $=$ Le : NO, id eſt, $2 : 3 = \frac{dz\surd(2az - zz)}{a} : \frac{3dz\surd(2az - zz)}{2a} =$ NO, ideoque radio AB deſcripto circulo BPQ, erit ſegmentum BPE diviſum per $\frac{2}{3}$ AB $=$ curvæ BN.

Coroll. I. Tota CFB $= \frac{3}{2}$ CA, vel curva CFB eſt in ratione ſeſquialtera ad genitricem ſuam DE.

Coroll. II. Spatium CFBA eſt ad ſpatium ABNM, ut 4 ad 9.

Coroll. III. Curva vero BNM eſt $= \frac{3}{4}$ arcus circularis BPQ.

Coroll. IV. Patet quod curva CFB ſit illa, quam ſupra * per methodum tangentium inverſam quæſivimus; cum nempe propoſitum fuit, ut curva eſſet ubique in eadem ratione ad tangentem, ut hic in ratione 3 ad 2.

De curvis Cycloidibus, earum rectificatione, ſpatiorum dimenſione & earundem evolutione.

Contemplatio curvarum Cycloidalium non immerito locum hic poſtulat; quippe per evolutiones præcipuæ earum proprietates deteguntur; quod enim Dnus. HUGENIUS oſtendit de vulgari Cycloide, quæ deſcribitur a puncto in periphe-

* Lect. XII, pag. 425, ſub finem.

ria circuli super recta linea rotati, quod scilicet evolutio hujus Cycloideos eandem Cycloidem progeneret; dubitavitque an aliæ dentur curvæ, quæ per suam evolutionem describant alias sibi similes: id quoque Nob. TSCHIRNHAUS demonstravit de sua Caustica, simul ostendens quod sit Cyclois. Hic vero monstrabimus, quod non solum Cyclois vulgaris HUGENII & Caustica TSCHIRNHAUSII hac proprietate gaudeant, sed quod omnes Cycloides possibiles, quotquot earum concipi possunt, per suas evolutiones sibi similes Cycloides describant. Alia etiam adnectetur curva ex Spiralium genere, cujus evolutio non solum ipsi similem, sed plane eandem Spiralem progignit.

Ante omnia dispiciendum, quid sit curva cycloidalis, quæ definiri potest, quod sit curva quæ formatur a puncto peripheriæ circuli super alio circulo immoto rotati. Sit ABC circulus immotus super cujus peripheria circumvolvatur alia peripheria circuli BDE; punctum aliquod D in hac peripheria sumptum describet curvam ADC, quæ vocatur Cyclois. Ubi statim apparet, quod existente circulo ABC infinito, peripheria ABC deveniat linea recta; proinde curva ADC sit Cyclois vulgaris *Hugeniana*; quod ergo in genere demonstratur de omnibus Cycloidibus, pariter etiam intelligendum est de vulgari. Per generationem curvæ patet quoque quod arcus AB interceptus inter initium curvæ A, & punctum contactus B circuli BDE ubivis existentis, sit æqualis arcui BD intercepto inter idem punctum contactus & inter punctum assumptum D: circumvolvendo enim circulum BDE, arcus BD metitur arcum AB. Hinc si dato initio A & arcu AB, inveniri potest geometrice punctum D, id est, dato initio A & arcu AB, si geometrice arcui AB æqualis abscindi potest arcus BD; erit Cyclois ADC curva geometrica. Si vero arcui AB non potest geometrice inveniri arcus æqualis BD, erit Cyclois ADC mechanica. Ostendam autem quod in quibusdam Cycloidibus possibile sit arcui AB æqualem abscindere BD, in aliquibus vero impossibile; adeoque ostensum simul erit, quod quædam Cycloides sint curvæ geometricæ, quædam vero

TAB. LXIII. Fig. 88.

ro

ro mechanicæ; id quod nemo quantum ſcio hactenus animadvertit. Dico itaque, quod ſi circuli ABC & BDE ſint tales, ut radius FB ſit ad radium GB ut numerus ad numerum, id eſt, ſi habeant rationem numeris exprimibilem; dico quod Cyclois ADC ſit geometrica: ſi vero radius FB ad radium GB habeat rationem numeris non exprimibilem, Cyclois ADC erit mechanica. Prius ſic demonſtratur: Si arcui AB dato æqualis eſt ſumendus BD, producatur GB ad R, ita ut GR ſit = FA; fiat angulus RGS = ang. AFB, erit arcus BT datus: fiat itaque ut GB ad FA, ita arcus BT ad arcumBD, erit arcus BD = arcui AB. Nam BD : BT = AF : BG = RG : BG = RS : BT = AB : BT; ergo AB = BD. Reſtat itaque ut demonſtretur, quod inveniri poſſit geometrice arcus BD, qui ſit ad arcum BT, ut AF ad BG, id eſt, ut numerus ad numerum. TAB. LXIII. *Fig. 89.*

Si AF multiplex eſt ipſius BG, res eſt in confeſſo; BT enim toties ſumendus eſt quoties BG continetur in AF. Si vero AF non ſit multiplex ipſius BG, ſed in quacunque ratione, ut ex. gr. 13 ad 5, patet quod arcus BT ſit duplus ſumendus & inſuper ipſius tres quintæ partes; res itaque eo recidit, ut arcus datus BT dividatur in quinque partes æquales, quarum ſumendæ ſunt tres, & arcui duplo addendæ. Notum vero eſt, quod arcus datus, vel quod tantundem eſt angulus datus, dividi geometrice poſſit in tot partes æquales quot libuerit; pervenietur enim ſemper ad æquationem geometricam diviſioni anguli correſpondentem.

LECTIO VIGESIMA SECUNDA.

Continuatio ejuſdem argumenti.

OStendimus itaque, quod quotieſcunque radius circuli immoti ad radium genitoris habet rationem ut numerus ad numerum, Cyclois progenita ſit ſemper geometrica: Quod ve-

ro sit mechanica, tunc cum radii sunt incommensurabiles, id est, cum ratio radiorum non potest numeris exprimi, sic demonstratur. Omnis curva, sive geometrica, sive mechanica, aut in se redit, aut in infinitum protenditur; quia generatio curvæ semper continuari potest. Si itaque circulus genitor ABC prima sua circumvolutione describat cum puncto A Cycloidem ADE, erit hæc Cyclois nondum finita, sed continuata circumvolutione describetur secunda EFG, & dein tertia GHI, tunc quarta IKL, & sic deinceps; donec tandem punctum A, post varias circumvolutiones, iterum cadat in principium A; quo in casu, continuata circumvolutione eadem Cyclois de novo progignitur; adeo ut omnes Cycloides simul sumptæ non nisi unicam constituant curvam ADEFGHIKL &c. Si igitur radii circuli immoti & circuli genitoris sunt incommensurabiles, erunt etiam illorum peripheriæ incommensurabiles; ideoque circulus genitor ABC infinitas perficiet circumvolutiones antequam punctum A reincidat in principium A; sic igitur habentur infinitæ Cycloides, quæ unicam tantum faciunt curvam ADEFGHIKL &c: dico hanc curvam esse mechanicam. Si enim geometrica dicatur esse; ducatur quomodocunque recta linea HF pertransversum curvæ, hæc recta [ut patet] secabit curvam in infinitis punctis H, *m*, *n*, &c. F. Quia vero æquatio naturam curvæ cujusdam exprimens ad minimum tot dimensiones habet, quot in punctis recta curvam secare potest, sequeretur quod æquatio, quæ exprimeret naturam nostræ curvæ, infinitas haberet dimensiones: Quod est absurdum. Ergo curva est mechanica.

TAB. LXIII. *Fig.* 92.

Hinc patet, quod sit impossibile arcum circuli datum dividere in duas partes, quæ sint ut numerus ad non numerum; id est, quæ sint incommensurabiles. Nam si hoc fieri posset, curva nostra itidem esset geometrica. Patet quoque, quod si radii circuli immoti & genitoris sint commensurabiles, Cyclois tamen inde progenita, utut geometrica, interdum magis vel minus sit composita: nam prout circulus genitor paucioribus vel pluribus circumvolutionibus reincidit in principium, recta linea HF quo-

quoque in paucioribus, vel pluribus punctis curvam secare potest; & idcirco æquatio naturam Cycloideos exprimens ad pauciores vel plures dimensiones ascendit.

Vidimus hucusque in quo Cycloides differant a se invicem, & quid peculiare unaquæque habeat: videndum nunc in quo conveniant & quid ipsis sit commune. Primo sese offert generalis earum rectificatio, & spatiorum cycloidalium dimensio, & dein identitas curvæ per evolutionem Cycloidis procreatæ. Quæ ut eo melius concipi possint, considero circulum immotum, & genitorem, tanquam duo Polygona æquilatera & æquiangula, quorum latus unius est æquale lateri alterius. Sint ex. gr. duo Polygona ABD & ABC æquiangula & æquilatera per se, non inter se, quæ habeant latus commune AB; ita ut si unum Polygonum moveatur super altero, latus AE cadat in FA, dein EG in HF, postmodum GC in IH, & sic deinceps. Si itaque hæc duo Polygona supponantur constare lateribus infinitis, poterint haberi pro circulis; adeo ut curva quam punctum quoddam ut C describit sit ista Cyclois de qua agitur. Notandum itaque in antecessum, quod per hanc suppositionem numerus laterum Polygoni ABD, vel potius circuli immoti, sit ad numerum laterum circuli genitoris ABC, ut diameter illius ad diametrum hujus; quia numerus laterum est ad numerum laterum ut peripheria ad peripheriam. Quia autem producta BA, angulus $KAF = 4$ rect. divisis per numerum laterum Polyg. & $KAE =$ pariter 4 rectis, divisis per numerum laterum Polygoni, erit angulus KAF ad angulum KAE, ut viceversa numerus laterum circuli genitoris ad numerum laterum circuli immoti, id est ut diameter illius ad diametrum hujus. TAB. LXIII. Fig. 91.

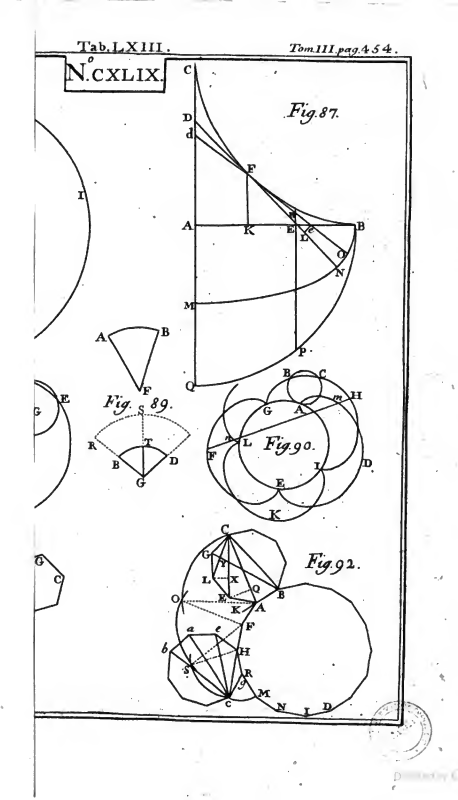
Ducantur a puncto C describente Cycloidem rectæ CB, CA, CE, CL &c. erunt anguli ACB, ECA, LCE, GCL &c. æquales; quia autem $EAK + EAB = 2$ rectis $= ECB + EAB$, erit $EAK = ECB = 2\,ACB$. Sit nunc diameter circuli genitoris $= 2b$, & diameter circuli immoti $= 2a$, erit itaque $KAF : KAE = b : a$, proinde *componendo* FAE : TAB. LXIII. Fig. 92.

KAE $= b + a : a$; hinc FAE : ACB $= 2b + 2a : a$. Consideretur jam generatio Cycloidis, quæ componitur ex arculis circuli, quorum centra sunt A, F, H, R, &c. & radii AC, EC, LC, GC &c. vel OA, SF, *c*H, MR, &c. patet ex generatione quod anguli OAC, SFO, *c*HS, &c. sint æquales angulo EAF; ideoque OC : AB $=$ SO : EQ $=$ *c*S : LX, &c. $= 2b + 2a : a$; proinde omnes antecedentes, id est, curva C*c*, ad omnes consequentes, id est, ad rectam YB vel GB, ut $2b + 2a$ ad a; spatium autem COS*c* RFA consstat ex sectoribus OAC, SFO, *c*HS &c. plus sectoribus ACB, FOA, HSF, RCH, &c. æqualibus ACB, ECA, LCE GCL &c. id est, segmento CLB; est autem sect. OAC : ACB $=$ SFO : ECA $=$ *c*HS : LCE, &c. $= 2b + 2a : a$; ergo omnes antecedentes OAC + SFO + *c*HS &c. ad omnes consequentes, id est, ad segmentum BCL $= 2b + 2a : a$, & *componendo* OAC + SFO + *c*HS &c. + segment. BCL, id est, spatium COS*c*RAB ad segm. BCL, ut $2b + 3a$ ad a.

Hæc si rite applicentur ad circulos, facile omnia de ducentur.

TAB. LXIV. *Fig.* 93. Sit circulus genitor in quacunque positione BEG; ducantur per centra lineæ rectæ HID, HKG, & sumatur arcus DF $=$ arcui BE, & sit HA $= a$, & AI $= b$; patet primo, quod ducta recta EB a puncto describente E ad punctum contactus B, sit perpendicularis ad Cycloidem CED; proinde ducta EG eandem tanget: Item portio Cycloidis DE est ad rectam AF, id est, ad tangentem EG ut $2b + 2a$ ad a, hoc est in ratione constanti; proinde tota cycloidalis curva DEC est ad diametrum circuli generatoris ut $2b + 2a$ ad a: spatium vero cycloidale DEBA est ad segm. DFRA, id est, ad segm. BELG ut $2b + 3a$ ad a, etiam in ratione constanti; proinde totum spatium cycloidale DECA est ad semicirculum genitorem ut $2b + 3a$ ad a.

Scholium. Si circulus genitor movetur in concava parte circuli immoti, erit diameter genitoris quantitas negativa; proinde


N.° CXLIX.
Fig. 87.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 92.



de ad rectificationem & dimensionem curvæ & spatii cycloidalis habendam, faciendum est, ut $-2b+2a$ ad a, ita curva DE ad rectam EG; & ut $-2b+3a$ ad a, ita spatium DEBA ad sectorem B ELG.

LECTIO VIGESIMA TERTIA.

Continuatio ejusdem argumenti.

OStendimus modum rectificandi Cycloidem & dimetiendi spatium ejus, per naturam generationis; quo modo paulo prolixior & operosior est hic, quem nunc damus per Calculum integralium. Sit itaque ARC circulus immotus, cujus diameter æqualis $2a$, DPA circulus genitor, ejusque diameter $=2b$, punctumque supremum D, describens Cycloidem DEC, per rotationem venit in E, per quod, centro H, describatur arcus EN, aliusque en a priori infinite parva quantitate distans; agantur lineæ HES, Hes, HMP, & demittantur perpendiculares PO, ML; quia nunc semiperipheria DPA æqualis est arcui ARC, & ER vel PA $=$ RC, erit arcus residuus DP $=$ arcui AR; patet etiam, quod arcus AM sit æqualis arcui RB. Ponatur ergo DO $=x$, arcus DP $=s$, arcus AM $=t$; proinde AB $=s+t$, erit PO $=\sqrt{(2bx-xx)}$, HO $=a+2b-x$, ideoque PH $=\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$ quia vero PH : PO $=$ MH : ML, invenitur ML $=a\sqrt{(2bx-xx)}:\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$ & dein HL $=(aa+2ab-ax):\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$; ergo AL $=a-(aa+2ab-ax):\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}$. Ut calculus facilius instituatur, ponatur $\sqrt{(aa+4ab+4bb-2ax-2bx)}=z$, erit $x=(aa+4ab+4bb-zz):(2a+2b)$ & $\sqrt{(2bx-xx)}=\sqrt{(-z^4+4bbzz+4abzz+2aazz-4aabb-4a^3b-a^4)}:(2a+2b)$; proinde ML $=$

TAB. LXIV. Fig. 94.

$a\sqrt{(-z^4}$

$a\sqrt{(-z^4+4bbzz+4abzz+2aazz-4aabb-4a^3b-a^4)}:(2az+2bz)$ & $AL = a-(a^3+2aab+azz):(2az+2bz)$; erit ergo differentiale ipſius $ML = (-az^4+4a^4b+a^5)dz:(2azz+2bzz)\sqrt{(-z^4\ \&c.)}$ & differentiale ipſius $AL = (2aab+a^3-azz)dz:(2azz+2bzz)$.

Sit, ad calculum facilitandum, $2b+a=c$, erit different. $ML = (-az^4+2a^4c-a^5)dz:(2azz+2bzz)\sqrt{(-z^4+4bbzz+4abzz+2aazz-aacc)}$ & diff. $AL = (aac-azz)dz:(2azz+2bzz)$. Sumantur eorum quadrata, quorum ſumma erit æqualis quadrato differentialis arcus AM, id eſt dt^2; habetur ergo dt; quia vero ds eſt $= bdx:\sqrt{(2bx-xx)}$; ſi ſubſtituatur valor ipſius dx & $\sqrt{(2bx-xx)}$, habebitur etiam ds; quoniam autem arcus $AB = s+t$, erit differentiale arcus AB, id eſt, $Bb = ds+dt$; ſi ergo fiat $HB\ [a] : HE\ [z] = Bb\ [ds+dt] : \frac{zds+zdt}{a} = EX$; erit ergo EX cognita in differentialibus dz, cujus quadratum conjunctum cum quadrato $eX\ [dz^2]$, dat quadratum Ee, cujus radix $= Ee =$ differentiali Cycloideos DE; proinde illius integrale æquatur curvæ cycloidali DE; ubi ſi libuerit reſubſtitui poteſt valor ipſius z in litteris x, & ſic patebit an cum priori ſolutione congruat. Sit etiam ſi EX multiplicetur per $\frac{1}{2}HE\ [\frac{1}{2}z]$ provenit triangulum EHe æquale differentiali ſpatii cycloidalis EDH; ideoque integrale oſtendit dimenſionem ſpatii illius.

TAB. LXIV. Fig. 95. Adhuc aliter per Calculum integralium præſtari poſſunt, quæ in præcedentibus quæſita ſunt. Poſitis quæ ſupra; ſit ER, er perpendicularis ad Cycloidem, ducantur tangentes ZA, RF, rf: patet quod PA, pA ſint æquales ipſis ER, er; item & anguli PAZ, pAZ æquales angulis ERF erf; proinde $pAP = erf - ERF = erf - ERf - FRf = erf - rRX - RHr =$ [ob $erf = RXr + rRX$] $RXr - RHr$; quia vero $Rr = Pp$, utrumque $= ds$; erit angulus $RHr : POp\ [2PAp] = b:a$, proinde $\frac{2b}{a} \times PAp = RHr$; ergo

PAp

$PAp = rXR - \frac{2b}{a} \times PAp$, & $\frac{a+2b}{a} \times PAp = rXR$, ideoque $a : a+2b = pAP : rXR$; quoniam autem $Pp = Rr$, & $pT =$ [ob pA & $PA = ER$ & er] RS, erit quoque $PT = rS$; proinde $PAp : rXR = RX : PA$; ergo $PA : RX = a+2b : a$, & *componendo* $PA + RX$ [EX] : $RX = 2a+2b : a$; eſt autem $EX : RX = Ee : rS$ [PT], proinde $Ee : PT = 2a+2b : a$; id eſt, in ratione conſtanti; ideoque omnes Ee, id eſt curva cycloidalis DE, ad omnes PT, id eſt ad rectam DP, ut $2a+2b$ ad a, ſicut antea. Spatium cycloidale $ERAD$ etiam facillime invenitur, nam quia $Ee = \frac{2a+2b}{a} \times rS$, erit $Ee + rS = \frac{3a+2b}{a} \times rS$; hujus dimidium multiplicatum per ER, vel PA, producit $\frac{3a+2b}{2a} \times rS \times PA$ = trapezio Er; quia vero triangulum $PAp = PT \times \frac{1}{2} PA$, vel $rS \times \frac{1}{2} PA$; erit trapezium Er : triang. $PAp = \frac{3a+2b}{a} : 1 = 3a+2b : a$, iterum in ratione conſtanti; proinde omnia trapezia, id eſt, ſpat. $ARED$ ad omnia triangula PAp, id eſt, ad ſegm. $DpPA$, ut $3a+2b$ ad a, ſicut antea.

Hæc itaque eſt generalis rectificatio curvæ & dimenſio ſpatii cycloidalis, quæ ad omnes caſus applicari poteſt, etiam ad vulgarem Cycloidem *Hugenianam*: hoc enim in caſu diameter circuli immoti ſupponenda eſt infinita, & tunc arcus AC degenerabit in lineam rectam, ut & arcus EP. Si itaque rationem velimus invenire inter curvam DE & rectam DP, faciendum eſt, ut $a : 2a+2b = DP : DE$ quæſitam, quia autem a eſt infinita, erit $2a+2b = 2a$; proinde ut a ad $2a$, id eſt, ut 1 ad 2, ita DP ad DE curvam. Sic etiam $a : 3a + 2b =$ ſegm. $DpPA$: ſpat. $DERA$, eſt autem $3a+2b = 3a$; proinde $a : 3a$ [$= 1 : 3$] $=$ ſegm. $DpPA$: ſpat. $DERA$; quæ veritates in Cycloide vulgari aliunde conſtant.

LECTIO VIGESIMA QUARTA.

Continuatio ejusdem argumenti.

POstquam per varios modos rectificationem curvarum & dimensionem spatiorum cycloidalium quæsivimus; restat ut generalem earum proprietarem demonstremus; quod scilicet quælibet curva cycloidalis per suam evolutionem in vertice inchoatam describat aliam cycloidalem sibi similem. Sit ergo ABC Cyclois cujus vertex A, circulus genitor EBF, ejusque immotus DFC; sitque per evolutionem Cycloidis in vertice A inceptam descripta curva AGL: dico hanc curvam esse etiam Cycloidem ipsi ABC similem. Ducatur tangens BEG, quæ quia est evolvens, erit perpendicularis ad curvam AGL, & æqualis curvæ AB; & per centra circulorum agatur recta KEH, conjungaturque BF. Fiat, ut KF ad KE [id est, ut a ad $a + 2b$], ita FE ad EH; & diametro HE describatur circulus HME. Constat ex præcedentibus, quod BE sit ad BA vel BG, ut a ad $2a + 2b$; proinde dividendo BE ad EG, ut a ad $a + 2b$, id est, per constructionem, ut FE ad EH; ergo conjuncta HG erit triangulum HGE simile triangulo EBF; adeoque angulus HGE est rectus, & idcirco circulus HME transit per punctum G. Nunc quia angulus BEF = angulo HEG, erit arcus BNE similis arcui EMG; ideoque arc. GME : arc. BNE = GE : BE = HE : EF = EK : FK = arc. EA : arc. FD. Quoniam autem ENBF = CFD, & arcus BF = arcui CF, erit arcus reliquus ENB = reliquo FD; ideoque sequitur quod etiam arcus EMG sit = arcui EA; proinde curva AGL est Cyclois cujus circulus genitor est HGE, & immotus est AE. Quod autem hæc Cyclois AGL sit similis priori ABC paret ex constructione; est enim KF : KE = FE : EH, & *permutando* KF : FE = KE : EH, id est, ut radius circuli immoti prioris Cycloidis ad diametrum circuli genitoris; ergo &c. *Q. E. D.*

TAB. LXIV. Fig. 96.

Coroll. I.

Coroll. I. Curva GL est ad rectam GH, ut curva AB ad rectam BE; quia utrobique sunt in ratione a ad $2a + 2b$.

Coroll. II. Tota vero AL est ad totam ABC, ut diameter HE ad diametrum EF.

Coroll. III. Patet quoque, quod si ABC sit Cyclois vulgaris, id est, illa cujus circulus genitor super recta linea rotatur, vel cujus circuli immoti diameter est infinita; patet, inquam, quod Cyclois AGL non solum etiam sit vulgaris, sed plane eadem cum priore; quia enim KF: KE = FE: EH, id est, $a : a + 2b$ = FE : EH; verum cum KF est infinita, erit $a + 2b = a$; proinde FE = EH; ergo quia circuli genitores sunt iidem, & ambo moventur super recta linea; sequitur quoque Cycloides esse easdem. *Q. E. D.*

Et hæc Cyclois est, quam Dn. HUGENIUS solam credidit, quæ proprietatem istam habeat, ut nempe per evolutionem suam aliam & eandem Cycloidem progeneret. Causticam quidem suam Dn. TSCHIRNHAUS profert, quæ non eandem sed similem evolutione sua describit; nos vero idem quod Dn. TSCHIRNHAUS de sua Caustica, quamque unam ex cycloidalium genere esse demonstravit, generaliter omnibus Cycloidibus competere ostendimus; quoniam vero nulla inter omnes Cycloides, præter vulgarem, per suam evolutionem describit, non quidem similem sed eandem, Dn. HUGENIUS merito hactenus dubitare potuit, an alia insuper detur curva, præter suam Cycloidem, quæ sua evolutione eandem curvam procreare possit: dubitare autem cessabit, postquam aliam quam damus viderit curvam, quæ non minus hac proprietate gaudet quam prædicta Cyclois. Et quidem curva ista est Logarithmica Spiralis: Sit enim curva BEFG Logarithmica Spiralis, cujus centrum A; ducatur tangens BC, & ad conjungentem AB agatur normalis AC: Sit AB $= y$, BL $= dy$; ex natura Logarithmicæ Spiralis patet, quod angulus LBM sit constans; sit ergo BL ad BM, id est, BA ad BC, ut a ad b; erit ergo BC $= by : a$; quia autem etiam BL ad BM ut a ad b, erit BM $= bdy : a$, ejusque integrale, id est, curva BEFG $= by : a$; ideo- TAB. LXIV. Fig. 97.

ideoque curva B E F G = rectæ tangenti B C.

Si itaque recta B C instar fili involvatur circa curvam B E F G, curva C H I K, quam terminus C describit, erit curva quæ ex evolutione Logarithmicæ Spiralis B E F G generatur. Dico hanc curvam C H I K esse eandem Spiralem: Producatur enim B A quantum opus est, cui ocurrat C D perpendicularis ad B C; quoniam vero B C etiam perpendicularis est ad curvam C H, erit C D tangens curvæ C H; sed, ob similitudinem triangulorum B A C & C A D, angulus C B A est æqualis angulo D C A; ideoque angulus D C A etiam est constans: proinde curva C H I K est Logarithmica Spiralis; & quidem eadem cum B E F G, ob æqualitatem angulorum C B A & D C A. *Q. E. D.*

Coroll. I. Si Spiralis Logarithmica quævis B E F G extendatur in rectam B C, devenient B A, M A &c. ordinatim applicatæ in triangulo rectangulo B A C; nam ob angulum A B M constantem, erunt B A, M A &c. parallelæ, & quia sunt in ratione constante cum curvæ portionibus conterminis, constat propositum. Ideoque, quemadmodum Spiralis *Archimedea* est Parabola convoluta; ita Logarithmica Spiralis est Triangulum rectangulum convolutum.

Coroll. II. Triangulum B A C est duplum spatii B E F G, quia differentiale trianguli est duplum differentialis spatii.

LECTIO VIGESIMA QUINTA.

Spatii cujusdam Cycloidalis Quadratura absoluta.

Brevis ista, quam fecimus, digressio satis ostendit, quod non sit sola Cyclois, cui competit toties repetita proprietas; adeo ut allata Spiralis Logarithmica non sine probabilitate conjecturam movere possit, quod multæ aliæ, quin imo infinitæ dentur curvæ, quæ evolutione sua easdem aut saltem sibi similes forment; & forsan difficile non esset, ope Calculi nostri integralium, modum excogitare, quo tales curvæ reperiuntur: quia autem nunc non vacat hoc præstare, aliis relinquendum est; interim redeamus ad Cycloides. Sit

Sit Cyclois quæcunque D E C cujus circulus immotus A R C, & genitor D P A vel L E R, D vertex Cycloidis. Positis & ductis quæ in Lectione penultima *; ostendimus curvam D E esse ad rectam D P, vel L E, ut $2a + 2b$ ad a; spatium vero cycloidale D E R A ad segmentum E R L ut $3a + 2b$ ad a; ex quibus liquet quod curvæ indefinita habeatur rectificatio, sed spatii indefinita quadratura dependeat a quadratura circuli. Ostendemus autem [id quod Dn. HUGENIUS in vulgari duntaxat demonstravit] quamlibet Cycloidem habere portionem spatii, quæ quadraturam admittit. Quærenda prius est dimensio spatii cycloidalis complementi D E L; quod sic peragitur. Sit D O $= x$, erit D P $= \sqrt{2bx}$, & hujus differentiale $bdx : \sqrt{2bx}$ est æquale [ut patet ex lectione penultima *] ipsi r S; quia vero P A est ad rX ut $a + 2b$ ad a, erit rX vel S X $= \frac{a}{a + 2b}$ $\sqrt{(4bb - 2bx)}$; nam P A est $= \sqrt{(4bb - 2bx)}$; ideoque, ob similitudinem triangulorum S X r & M E l, est S X ad E M vel E l, ut rS ad M l, id est $\frac{a}{a + 2b} \sqrt{(4bb - 2bx)} : \sqrt{2bx}$ $= \frac{bdx}{\sqrt{2bx}} : \frac{(ab + 2bb)\,dx}{a\sqrt{(4bb - 2bx)}} =$ Ml. Multiplicetur Ml per $\frac{1}{2}$ El, id est, per $\frac{1}{2}$ D P, provenit $(ab + 2bb)\,dx \sqrt{2bx} : 2a \sqrt{(4bb - 2bx)}$ $=$ triangulo E L l: hujus itaque integrale æquale est spatio cycloidali D L E; quoniam autem differentiale segmenti D Z P $=$ $bdx \sqrt{2bx} : 2\sqrt{(4bb - 2bx)}$, erit spatium D E L $= \frac{a + 2b}{a} \times$ segm. D Z P. Per cognitionem nunc hujus spatii, quod dependet a quadratura segmenti D Z P, determinari potest in linea D H punctum T, ita ut, ducto arcu concentrico T P E, spatium cycloidale D P E D contentum inter rectam D P, arcum P E, & curvam E D, sit unicum quadrabile. Quo autem punctum illud T determinari possit, ita peragendum est: Sit D T $= t$, arcus D Z P $= s =$ A R; quia H A : H T $=$ A R : T Q, erit T Q $= (a + 2b - t)\, s : a$, & ob eandem rationem, quia H A : H D $=$ A R : D L, invenitur D L $= (a + 2b)\, s : a$. Multiplicetur dimidium summæ arcuum T Q & D L per D T pro-

T A B. LXIV. Fig. 98.

* pag. 457.

provenit $(2at + 4bt - tt)\, s : 2a =$ ſpatio circulari DTQLD $=$ ſpatio DPELD; proinde ſpatium DPELD eſt $= (2at + 4bt - tt)\, s : 2a$; quia nunc ſpatium cycloidale DLE inventum eſt $= \frac{a+2b}{a} \times$ ſegm. DP; verum ſegm. DP $=$ eſt ſectori DGP minus triangulo DGP, id eſt, $= \frac{1}{2}bs -$ triangulo DGP; erit ergo ſpatium DLE$= (ab + 2bb)s : 2a - \frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP; proinde ſpatium DPELD $-$ ſpatio DELD, id eſt, reſiduum DPED $= (2at + 4bt - tt - ab - 2bb)\, s : 2a + \frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP; quia itaque s denotat arcum circuli, ſpatium DPED dependebit a quadratura circuli, quamdiu quantitas $2at + 4bt - tt - ab - 2bb$ eſt aliquid; & ſic quadratura indefinita ſpatii DPED eſt impoſſibilis. Quia autem uno in caſu accidit, ut quantitas $2at + 4bt - tt - ab - 2bb$ evaneſcat, erit tunc ſpatium DPED quadrabile; quippe $= \frac{a+2b}{a} \times$triang. DGP. Si ergo caſum hunc invenire, & punctum T determinare velimus, ponendum eſt $2at + 4bt - tt - ab - 2bb = 0$, proinde $tt = 2at + 4bt - ab - 2bb$, quæ æquatio, ſi ſecundum regulas reſolvatur, dat $t = a + 2b - \sqrt{(aa + 3ab + 2bb)}$; ideoque ſumatur t, id eſt, DT $=$ DH $[a + 2b] -$ media proportionali, inter DH & GH $[\sqrt{(aa + 3ab + 2bb)}]$. Ex hoc patet, quod punctum quæſitum T ſemper cadat ſupra centrum G verſus verticem D. Generalis itaque propoſitio formari ſic poteſt: In quacunque Cycloide DFC, ſi fiat HT media proportionalis inter HG & HD erit, deſcripto arcu TPE & ductis PD, PG, ſpatium cycloidale DPED unicum quadrabile, æquale nempe $\frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP; vel quod eodem recidit, ſpatium DPED erit ad triang. DGP, ut DH ad AH.

Ex his, dicto citius determinari poteſt punctum T in Cycloide vulgari; quia enim tunc AH eſt infinita, cadet punctum T in medium ipſius GD; & quia DH æqualis AH, erit ſpatium DPED

[PE

[PE erit recta linea] = triangulo DGP; id quod Dn. HUGENIUS etiam ita invenit.

Siquidem autem infinitæ ſunt Cycloides, quæ poſſunt eſſe geometricæ, ſic eadem opera infinitas invenimus curvas geometricas, quæ unicum habent ſpatium a peripheria concentrica & linea recta terminatum, quod ſit quadrabile. Verum interim eſt, quod & aliud ſpatium cycloidale aliter ſumptum particulariter quadrari poſſit; ut nempe unum ex illis quæ continentur inter arcum DP, arcum PE & curvam DE; a ſpatio enim DPED, quod eſt æquale $(2at + 4bt - tt - ab - 2bb)s : 2a + \frac{a+2b}{a} \times$ triang. DGP, auferatur ſegmentum DP, quod æquatur $abs : 2a -$ triang. DGP, remanebit $(2at + 4bt - tt - 2ab - 2bb)s : 2a + \frac{2a+2b}{a} \times$ triang. DGP, æquale dicto ſpatio DEPZD. Si itaque hoc ſpatium quadrandum eſt, ponatur $2at + 4bt - tt - 2ab - 2bb = 0$; proinde $tt = 2at + 4bt - 2ab - 2bb$; invenitur ſecundum regulas $t = a + 2b - \sqrt{(aa + 2ab + 2bb)}$, quod oſtendit DP, vel AP, debere eſſe ſubtenſam quadrantis, quia $aa + 2ab + 2bb$ æquale eſt ſummæ quadratorum ipſarum GH & GD, vel GP. Sic itaque in quavis Cycloide, ſi biſecta ſemiperipheria circuli genitoris in P, ducatur arcus concentricus PE; erit ſpatium DZPED unicum quadrabile, ſcilicet æquale $\frac{2a+2b}{a} \times$ triang. DGP; vel quia angulus DGP eſt rectus, erit ſpatium DZPED $= \frac{a+b}{a} \times DG^2$, id eſt, ſpatium DZPED eſt ad quadratum radii, ut HG ad HA. Hinc quia in Cycloide vulgari HG eſt æqualis HA, devenit ſpatium DZPED æquale quadrato radii circuli genitoris.

LECTIO

LECTIO VIGESIMA SEXTA.

De Curvis Causticis, earumque proprietatibus.

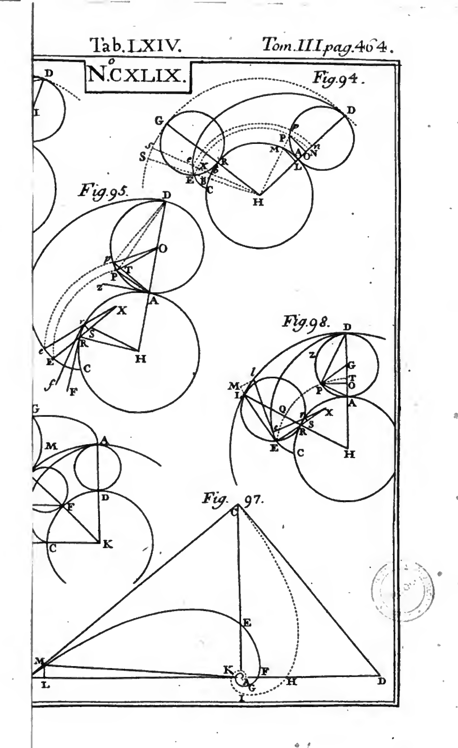
SI radii solares in concavam cujusdam curvæ partem incidunt, formabunt per reflexionem suam aliam curvam, quæ a Dno. TSCHIRNHAUS nomen *Caustica* sortita est, cujusque primus fuit inventor. Veteres enim, ad hæc usque tempora, unicum duntaxat punctum consideraverunt in axe curvæ, in quo nempe omnes radii, vel saltem plures, reflexi colliguntur; quod punctum ipsis *Focus* audivit; quoniam in illo maxima radiorum repercussorum comburendi vis exercetur.

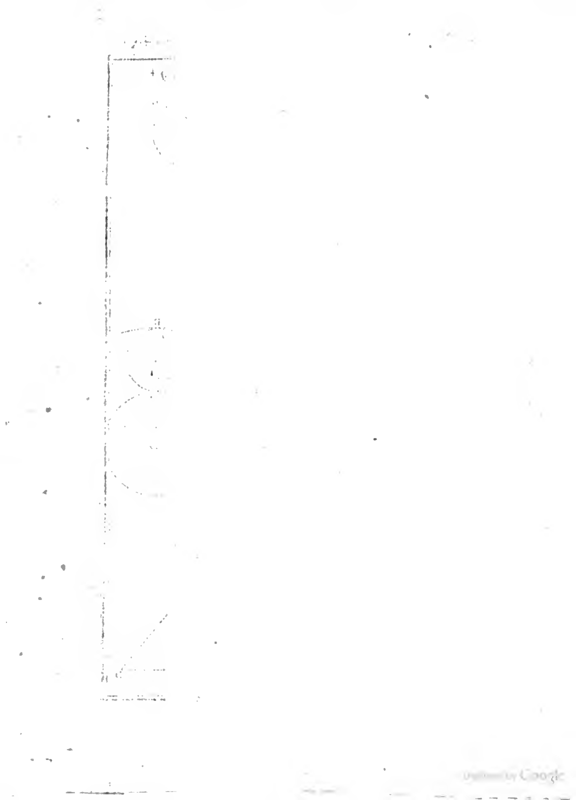
Paucos ante annos, præfatus Dn. TSCHIRNHAUS quam optime animadvertit, quod illæ curvæ, quæ radios reflexos non perfectissime in dicto foco colligunt, infinita habeant puncta quæ omnia foci appellari possunt, & in quibus plures radii concurrunt; illa itaque puncta per continuationem formant curvam causticam, vel ustoriam, cujus naturam, rectificationem & egregias quas habet proprietates in *Actis* † publico communicavit, absque tamen calculo, & suppressa methodo per quam eo pervenit.

Exponemus ergo hic modum, quo omnia, quæ circa has curvas digne considerari possunt, facillime deteguntur; ubi simul patebit quod Auctor non parum erraverit, existimans Causticam in circulo illam esse curvam cujus constructionem in iisdem *Actis* tradit; cum istæ duæ curvæ natura toto cœlo differant, nihilque commune habeant; excepto spatio, quod in utraque ad eundem semicirculum eandem rationem habet: & hoc est quod Auctorem fefellit, ut infra fusius explicabitur. Nunc modus, quo curvam Causticam generari concipimus, exponendus est: Sit curva quælibet ABC, [*Fig. XCIX*] in quam incidunt Solis radii paralleli DB, *db*, &c. quorum reflexi sunt BE, *b*E, &c. punctum concursus E duorum radiorum reflexorum infinite parva quanti-

TAB. LXV. *Fig.* 99. & 100.

† Anno 1682. Nov. pag. 364.


N.° CXLIX.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 98.
Fig. 97.
D
G
S
H
L
A
O
N
M
P
R
X
E
C
I
K
F



quantitate distantium est in curva Caustica. Sic itaque illico patet per ea, quæ supra dicta sunt, quod radius reflexus sit tangens curvæ Causticæ; siquidem duæ tangentes nihil distantes in ipso puncto contactus se intersecant. Ideoque ad naturam curvæ Causticæ determinandam, Problema tale formari posset: Invenire naturam curvæ, quam omnes radii in data quadam curva reflexi tangunt. Hoc autem Problema eodem modo solvitur, quo supra factum est in curva quæ tangitur a regula super lateribus anguli recti mota*. Ut ea igitur, in casu præsenti, applicentur ad curvam determinandam & construendam, invenienda est longitudo radii reflexi BE, qui intercipitur inter punctum incidentiæ B & punctum concursus E. Sit, in hunc finem, AF abscissa in curva data $= x$, & FB applicata in eadem $= y$, proinde $Ff = dx =$ BH & bH $= dy$; item BG $= z$; describetur triangulum FBG seorsim [*Fig. C*], & bisecetur angulus FBG per lineam BM, erit BM perpendicularis ad curvam Bb; proinde $dx : dy =$ BF : FM; invenitur itaque pro FM $= ydy : dx$; quia autem BF : BG $=$ FM : MG, erit componendo BF : BF + BG $=$ FM : FG, id est, $y : y + z = \frac{ydy}{dx} : \frac{ydy + zdy}{dx} =$ FG; sed BF² + FG² $=$ BG²; habetur ergo hæc æquatio $(yydy^2 + 2zydy^2 + zzdy^2) : dx^2 + yy = zz$, & reducta æquatione provenit $zz = (2zydy^2 + yydy^2 + yydx^2) : (dx^2 - dy^2)$, quæ æquatio si resolvatur habetur $z = (ydy^2 + ydx^2) : (dx^2 - dy^2) =$ BG. Quoniam FG $= (ydy + zdy) : dx$, substituendus est valor inventus ipsius z, & habebitur FG $= 2ydxdy : (dx^2 - dy^2)$; addatur AF [*Fig. XCIX*] erit AG $= 2ydxdy : (dx^2 - dy^2) + x$; ejus igitur differentiale [posito dx constanti, id est, $ddx = 0$] erit $(dx^5 + 2ydx^3 ddy - dxdy^4 + 2ydxdy^2 ddy) : (dx^2 - dy^2)^2 =$ Gg, quia autem BF : FG [seu $bf : fg$] $= b$H : HL, id est, $y : \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} = dy : \frac{2dxdy^2}{dx^2 - dy^2} =$ HL; erit BH + HL, id est, BL $= (dxdy^2 + dx^3) : (dx^2 - dy^2)$. Sed ob similitudinem triangulorum BEL & GEg, est BE : GE $=$ BL : Gg, & *dividendo* BG : BE $=$ BL $-$ Gg : BL; fiat ergo BL $-$

TAB. LXV. *Fig.* 100.

* Lect. XX. pag. 447.

Gg $\left[\frac{-2ydx^3ddy - 2ydxdy^2ddy}{(dx^2 - dy^2)^2}\right]$: BL $\left[\frac{dxdy^2 + dx^3}{dx^2 - dy^2}\right]$, id eſt, $\frac{-2yddy}{dx^2 - dy^2}$: 1 = BG $\left[\frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 - dy^2}\right]$: BE, quæ itaque erit = $(dx^2 + dy^2) : - 2ddy$. Hinc in quavis curva data AB facillime longitudo radii reflexi BE invenitur, ſubſtituendo ſolummodo valorem ipſius dy & ddy, prout natura curvæ exigit; & ſic dx, dy & ddy ſeſe deſtruentibus, prodibit longitudo BE in quantitatibus pure definitis. Cognita ergo BE, curva Cauſtica conſtrui poteſt, & proinde determinata eſt. *Q. E. F.*

Poſtquam generaliter curvas Cauſticas determinaverimus, antequam ad ſpeciales deſcendamus, univerſalis illarum rectificatio præmittenda eſt.

TAB. LXV. *Fig.* 101. Sit itaque curva quæcunque ABG in qua per reflexionem radiorum EB, *eb* &c. formata ſit Cauſtica AHI. Dico quamlibet portionem ejus AH æqualem eſſe radio incidenti EB, plus radio reflexo BH. *Demonſtratio*: Ex præcedentibus conſtat quod HB tangat Cauſticam: evolvatur ergo curva AH, quæ deſcribat curvam A*f*F; liquet quod HB congruat cum evolvente HF, tunc cum evolutio ad punctum H pervenerit. Centro itaque H, deſcribatur arculus *b*C, qui erit parallelus arculo F*f*; proinde CF = *bf*; ergo BC eſt differentialis ipſius BF; quoniam autem, per hypoth. ang. EB*b* = ang. HBG = CB*b*, anguli vero BD*b* & BC*b* ſunt recti, erunt triangula BD*b* & BC*b*, ob communem hypothenuſam B*b*, æqualia; proinde BD = BC, verum BD eſt differentiale ipſius BE, & BC differ. ipſius BF, ergo BE = BF; ideoque, quoniam curva AH = HF, & HF = HB + BF, erit curva AH æqualis radio reflexo HB plus incidente EB. *Q.E.D.*

Notetur, quod ſi utraque BE & BF non incipiant a nihilo, ſummæ linearum HB & BE conſtans quædam, ut cognita, ſit addenda vel ab eadem demenda.

LECTIO

LECTIO VIGESIMA SEPTIMA.

Caustica circularis radiorum parallelorum.

UT ea quæ universaliter solvimus exemplis illustrentur; sit BGC Circulus, cujus diameter $DB = 2a$, $BH = x$, $HG = y = \surd(ax - xx)$. Determinanda est curva Caustica BFE, seu quod tantundem, invenienda est longitudo radii reflexi GF? Hoc per formulam generalem ita peragitur: Quoniam $y = \surd(2ax - xx)$, erit $dy = (adx - xdx) : \surd(2ax - xx)$, & $ddy = - aadx^2 : (2ax - xx)\surd(2ax - xx)$; ideoque $(dx^2 + dy^2) : - 2ddy$, seu GF, invenitur $= \frac{1}{2}\surd(2ax - xx) = \frac{1}{2}GH$. Ad construendam ergo Causticam in circulo, sumendus est radius reflexus GF æqualis dimidio incidenti GH; erit punctum F in curva quæsita. Hinc, si punctum H cadit in A, cadet punctum F in medium E radii circularis AC; & hoc punctum est, quod Veteres *Focum* Circuli appellarunt. TAB. LXV. *Fig.* 102.

Constat quoque quod curva FB sit ad radium reflexum FG, ut 3 ad 1; ad incidentem vero HG, ut 3 ad 2: ideoque tota EFB ad radium circuli ut 3 ad 2.

Nob. Dn. TSCHIRNHAUS synthetice ostendit * quod GF sit $= \frac{1}{2}GH$, in hunc modum.

Sint duo radii solares MG, mg perpendiculares ad diametrum DB, qui quantitate infinite parva distant, & producantur reflexi GF, gF, donec occurrant peripheriæ in N & n; erit itaque arcus GBM æqualis arcui GEN, & arcus $gBm = gDn$; ergo $gBm - GBM$, id est, $2gG = gDn - GEN$, id est, $Nn - Gg$; ergo $Nn = 3Gg$. Quoniam autem angulus $NnF =$ ang. FGg [insistunt enim eidem segmento Ng], erunt triangula NFn & GFg similia, ideoque $NF : Fg$, vel $FG = Nn : gG = 3 : 1$; & *componendo* NG vel $MG : FG = 4 : 1$, proinde $HG : FG = 2 : 1$, ut antea invenimus. TAB. LXV. *Fig.* 103.

Nnn 2 Si

* *Acta Erud. Lips.* 1690. April. pag. 169.

TAB. LXV. *Fig.* 104. Si velimus naturam curvæ Causticæ BFE exprimere per æquationem secundum applicatas vel abscissas; ducatur ex centro A radius AG, & producta GF donec occurrat rectæ AC in L, demittantur perpendiculares LP, FO; & appellentur AO $= r$, & OF $= s$. Quoniam angulus LAG = AGH = AGL; erit LA = LG; proinde AP = PG: ob similitudinem triangulorum LAP, LGP, & AGH, est GH : AG = GP : GL, id est, $\surd(2ax - xx) : a = \frac{1}{2}a : \frac{\frac{1}{2}aa}{\surd(2ax - xx)} =$ LG = LA; item LG : RG = LF : OF, id est $\frac{\frac{1}{2}aa}{\surd(2ax - xx)} : a - x = \frac{\frac{1}{2}aa - ax + \frac{1}{2}xx}{\surd(2ax - xx)} : \frac{(a-x)^3}{aa} =$ OF $= s$. Rursus RG : RL = OF : OL, id est $a - x : \frac{2ax - xx - \frac{1}{2}aa}{\surd(2ax - xx)} = \frac{(a-x)^3}{aa} : \frac{(2ax - xx - \frac{1}{2}aa) \times (a-x)^2}{aa\surd(2ax - xx)} =$ OL; auferatur ex LA, & habebitur $-(2ax - xx - \frac{1}{2}aa) \times (a-x)^2 : aa\surd(2ax - xx) + \frac{1}{2}aa : \surd(2ax - xx) =$ AO $= r$.

Ut eo citius & facilius ad æquationem deveniatur, in qua r & s solæ reperiantur, valor ipsius r inventus ita redigi potest $2ax - xx - \frac{1}{2}aa = -(a-x)^2 + \frac{1}{2}aa$ & $\surd(2ax - xx) = \surd(-aa + 2ax - xx + aa) = \surd(-(a-x)^2 + aa)$, & sic provenit $r = ((a-x)^4 - \frac{1}{2}aa(a-x)^2) : aa\surd(-(a-x)^2 + aa) + \frac{1}{2}aa : \surd(-(a-x)^2 + aa)$. Quoniam autem $(a-x)^3 : aa = s$, erit $a - x = \sqrt[3]{aas}$ & $(a-x)^2 = a\sqrt[3]{ass}$; ergo substituto ubique valore ipsius $a - x$, habetur $r = (aas\sqrt[3]{aas} - \frac{1}{2}a^3\sqrt[3]{aas}) : aa\surd(-a\sqrt[3]{ass} + aa) + \frac{1}{2}aa : \surd(-a\sqrt[3]{ass} + aa) = (s\sqrt[3]{aas}\frac{1}{2} - a\sqrt[3]{ass} + \frac{1}{2}aa) : \surd(-a\sqrt[3]{ass} + aa)$. Data itaque s, altera r ope circini & normæ construi non potest generaliter, ob irrationalitatem radicis cubicæ.

TAB. LXV. *Fig.* 105. Ex quo concludendum, quod curva Caustica non sit eadem cum illa EFB quæ formatur a punctis F, quæ bisecant parallelas MN interceptas inter peripheriam CMB & peripheriam ANB diametro AB descriptam, ut Dn. TSCHIRNHAUS perperam prætendit. Sit enim, ut prius, AO $= r$, OF $= s$, erit

erit $RN = \sqrt{(as - ss)}$, & $MR = \sqrt{(aa - ss)}$; ergo $MN = \sqrt{(aa-ss)} - \sqrt{(as-ss)}$, & $FN = \frac{1}{2}\sqrt{(aa-ss)} - \frac{1}{2}\sqrt{(as-ss)}$; ideoque $FN + NR$, id est, $FR = \frac{1}{2}\sqrt{(aa-ss)} + \sqrt{(as-ss)} = AO = r$. Sic itaque data s, altera r ſemper circino & norma conſtrui poterit; & proinde hæ duæ curvæ non ſolum non ſunt eædem, ſed nequidem ſunt ejuſdem generis. Facile autem eſt conjecturare cur Dn. TSCHIRNHAUS errorem hunc commiſerit; utraque enim curva tranſit per punctum B, & per punctum medium E, & ſpatium CEFB utrobique eſt quarta pars quadrantis; quia ſemicirculus ANB eſt dimidium quadrantis CAB, & CANB eſt duplum ſpatii CEFB; idem de Cauſtica inferius demonſtrabitur.

Ex alio quoque indicio patet, quod duæ iſtæ curvæ non ſint eædem; abſque ut natura curvarum per calculum quæratur. Si enim attendatur ad generationem curvarum, facile quivis perſpiciet, quod illarum continuatio non eodem modo procedat. Curva enim Cauſtica [*Fig. CIV*] poſtquam ad punctum E pervenerit, continuatur verſus ſiniſtram per S ad punctum D, & portionem ſimilem priori deſcribit; tum ob radiorum in altero quadrante ſimilem poſitionem, tum quia Cauſtica, ut ipſe Dn. TSCHIRNHAUS agnoſcit, & quod mox demonſtrabimus, eſt ſpecies Cycloidis. Altera vero curva, quæ a biſectione interceptarum MN formatur, poſtquam punctum E attigerit, revertitur verſus eandem partem ad B: ſicuti enim MN eſt intercepta inter utramque peripheriam non magis quam MX; ſic etiam punctum T biſecans lineam MX non minus eſt in curva quam punctum F biſecans lineam MN. *

LECTIO VIGESIMA OCTAVA.

Cauſtica circularis radiorum parallelorum eſt Cycloidalis. Cauſtica Parabolica.

SAtis hucuſque, ni fallor, oſtenſum eſt, curvam Cauſticam in circulo, & eam ex biſectione interceptarum progenitam, minime eſſe eandem: Interim notabilis hic occurrit Cauſticæ proprie-

*Vid. N°. VI. pag. 52. Tom. I.

proprietas, quam Dn. TSCHIRNHAUS in *Actis Lipſ.* † demonſtravit; quod nempe per ſuam evolutionem aliam Cauſticam ſimilem progignat. Nos proprietatem hanc mutamus in aliam, & demonſtrabimus quod Cauſtica ſit curva cycloidalis; ſicque eadem opera oſtenſum erit, quod evolutio Cauſticæ deſcribat Cauſticam; quoniam omnes Cycloides evolutione ſua ſibi ſimiles procreare ſupra oſtendimus.

TAB. LXV. *Fig.* 106. Sit itaque circulus BCD, cujus diameter BD, radius ſolaris NG incidens, GF reflexus, BFE curva Cauſtica; centro A & radio AE, deſcribatur circulus MPE, & ducta AG conſtruatur circulus GQP, radium GF ſecans in Q: Dico Cauſticam BFE eſſe Cycloidem, cujus circulus immotus eſt MPE; ejuſque genitor GQP, vertex B, & principium E.

Demonſtratio. Angulus incidentiæ NGB eſt æqualis angulo reflexionis QGC; ergo ſegmentum NBG eſt ſimile ſegmento circulari QG; proinde ſubtenſa NG: ſubtenſ. QG = diameter DB: diametr. GP = 4 : 1. Sumptis antecedentium dimidiis, erit HG : QG = 2 : 1 = HG : FG. Ergo QG = FG; ideoque circulus GQP tranſit per punctum contactus F: quia vero, ob ſimilitudinem ſegmentorum, arcus NBG = 4 arcubus GF, & idem arcus NBG [2 arcus BG] = 4 arc. MP; erit arcus GF = arcui MP; quoniam autem ſemiperipheria MES = 2 ſemiperipheriis GFP; erit quadrans MPE = GFP; ergo arcus reſiduus PF = arcui reſiduo PE; proinde Cauſtica EFB eſt Cyclois. *Q. E. D.*

Ex his, & ex iis quæ de Cycloidibus in genere dicta ſunt, ſponte fluit, quod curva BF ſit tripla rectæ GF; & ceteræ proprietates, quas Dn. TSCHIRNHAUS recenſet, facillime colliguntur, quod nempe ſpatium cauſticum BFG ſit duplum ſegmenti circularis GF; proinde totum ſpatium BEC æquale circulo integro GP.

Item, ſi evolutio Cauſticæ BFE incipiat in B, altera Cauſtica, quæ inde deſcribetur, habebit poſitionem prioris inverſam. Principium enim eſt in puncto B, & vertex in linea AC producta,

† Anno 1690, April. pag. 169.

N.° CXLIX.

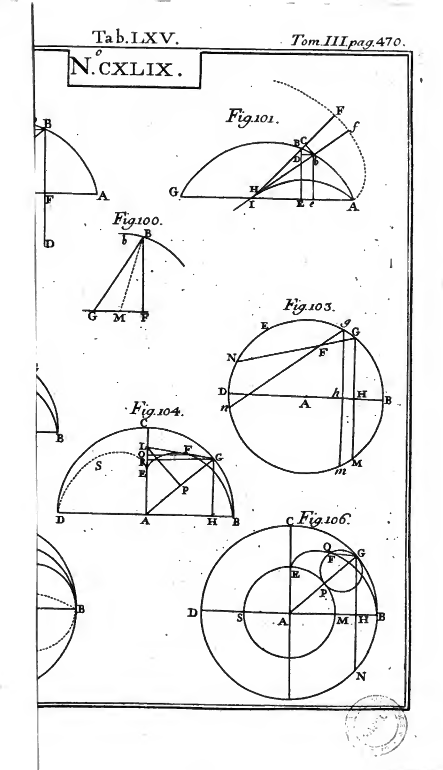


Fig. 101.
F
f
B C
D
b
H
G
I
E
e
A
B
F
A
D
Fig. 100.
b
B
G
M
F
Fig. 103.
E
g
G
N
F
D
h
H
B
A
n
m
M
Fig. 104.
C
L
O
R
F
G
S
E
P
D
A
H
B
B
Fig. 106.
C
O
G
F
E
P
D
S
A
M
H
B
N
B

producta, distans a centro A duobus radiis AC; ideoque circulus in quo illa Caustica generatur quadruplus est circuli in quo Caustica BFE describitur.

Spatium contentum inter FG productam usque ad causticam exteriorem, inter ejusdem exterioris partem a puncto B desumptam & inter interiorem BF, est noncuplum spatii BFG.

Si angulus GAB sit semirectus erit punctum F omnium in Caustica supremum, quia tunc tangens GF horizonti BA est parallela.

Patet quoque, quod in hac Caustica, quæ tamen est curva geometrica, duo possint sumi spatia quæ quadraturam admittunt.

Dimittamus nunc Causticam circuli, & consideremus qualis sit in Parabola. Aliunde autem notum est, quod radii axi paralleli post reflexionem exacte in uno puncto concurrant, quod Focus appellatur; adeo ut tota ejus curvæ Caustica in punctum degeneret. Loco itaque quod radii axi paralleli sint, concipiamus illos ad eundem perpendiculares.

Sit ergo Parabola ABG, cujus vertex A, axis AI, parameter $= a$, AE $= x$, BE $= y = \sqrt{ax}$; sintque eædem EB, eb, radii incidentes, quorum reflexi BH, bH: determinanda est curva Caustica AH, id est, quærenda est longitudo BH? TAB. LXVI. *Fig.* 107.

Quia $y = \sqrt{ax}$, erit $dy = adx : 2\sqrt{ax}$, $dy^2 = adx^2 : 4x$, & $ddy = - adx^2 : 4x\sqrt{ax}$, ideoque $(dx^2 + dy^2) : -2ddy = (a+4x)\sqrt{ax} : 2a =$ BH, quod facillime construitur, dicendo: Ut duplum parametri ad summam parametri & quadrupli abscissæ AE, ita applicata BE ad quæsitam BH; proinde curva AH æquatur $(3a+4x)\sqrt{ax} : 2a$. Ad quadrandum spatium causticum multiplicetur HB per dimidiam BC, vel BD [sunt enim æquales] & habetur $(a+4x)\,dx\sqrt{ax} : 4a =$ triangulo HBb, ejusque integrale $\frac{1}{6}x\sqrt{ax} + \frac{2xx}{5a}\sqrt{ax} =$ spatio AHB. Hinc etiam potest quadrari spatium AHL. Si enim a spatio parabolico ABHL, cujus quadratura innotescit, auferatur spatium inventum AHB, remanebit spatium AHL.

Si

Si AE $=\frac{1}{4}a$, erit punctum H omnium supremum, quia tunc tangens BH est axi parallela, & erit BH $=\frac{1}{2}a$; proinde AL $=\frac{7}{4}a$. Si vero AE $=\frac{3}{4}a$, id est, si radius BE transit per punctum in Caustica supremum, cadent puncta H & L in punctum I, in quo Caustica & axis se intersecant, & erit recta BI $=a\sqrt{3}$; curva vero AHI $=\frac{7}{2}a\sqrt{3}$, & recta AI $=\frac{9}{4}a$; spatium AHIB $=\frac{7}{40}aa\sqrt{3}$ & spatium AHI $=\frac{5}{8}aa\sqrt{3}$. Reliquæ, si quas habet, proprietates facile quoque deducentur.

LECTIO VIGESIMA NONA.

Caustica Cycloidalis. Caustica radiorum e dato puncto promanantium.

Regula quam dedimus ad determinandas curvas Causticas non solum succedit in geometricis, sed etiam se ad mechanicas extendit. In hujus rei gratiam afferemus exemplum Cycloidis vulgaris. Sit ergo Cyclois ABC, cujus vertex A, axis AF, circulus genitor AMF, radius incidens EB, reflexus BH; determinanda est curva ejus Caustica AHN, seu invenienda longitudo rectæ BH? Sit radius circuli AG $=a$, AE $=x$, proinde EM $=\sqrt{(2ax-xx)}$, arcus AM $=s$, EB $=y$ $=\sqrt{(2ax-xx)}+s$, erit $dy=(a-x)dx:\sqrt{(2ax-xx)}+ds=$[ob $ds=adx:\sqrt{(2ax-xx)}$]$(2a-x)dx:\sqrt{(2ax-xx)}=dx\sqrt{(2a-x)}:\sqrt{x}$; ideoque $dy^2=(2a-x)dx^2:x$; & $ddy=-adx^2:x\sqrt{(2ax-xx)}$, habetur exinde $(dx^2+dy^2):-2ddy=$ BH $=\sqrt{(2ax-xx)}$ $=$ EM; ex quo patet quod radius reflexus sit æqualis applicatæ correspondenti in circulo genitore; ideoque duplus radii reflexi in eodem circulo. Spatium ABH æquatur dimidio segmento AEM & duplo spatio caustico in circulo. Si punctum E cadit in centrum circuli G, erit B H parallela horizontali A F, & proinde punctum H, erit omnium supremum. Curva hæc Caustica AHN, postquam summum punctum pertransiit, iterum descendit ad certum punctum L,

TAB. LXVI. Fig. 108.

&

& dein reascendit ad punctum C: Ad determinandum itaque punctum L, sumatur $AE = \frac{3}{2} a = \frac{3}{4} AG$, cadet punctum H in quæsitum L.

Coroll: Spatium cycloidale ABCFA est sextuplum spatii caustici ABCLHA; illud quippe triplum est semicirculi AMF, hoc autem ejusdem est subduplum.

Hæc quæ hactenus dicta sunt de Causticis, quæ formantur a radiis parallelorum reflexis sufficiant. Paucis attingemus illas, quas describunt reflexi radiorum a puncto quodam fixo proficiscentium; hæ enim prioribus multum absimiles non sunt, & mutatis mutandis æque facile calculo subjiciuntur. Sit enim quæcunque curva data ABC [*Fig. CIX*] & punctum positione datum D, TAB.
a quo radii proveniunt incidentes in curvam, quales sunt DB, LXVI.
Db, eorumque reflexi BE, bE; determinanda est Caustica quam Fig. 109.
radii reflexi formant, vel potius quam tangunt? Ad hoc itaque, & 110.
invenienda est, ut in prioribus, longitudo BE, intercepta nempe inter punctum concursus E & inter punctum incidentiæ B. Ad DB & Db ducantur perpendiculares DG & Dg, ductaque ipsis parallela BHL, sit DB vel $Db = y$, $bH = dy$, $BH = dx$; item $BG = z$; describatur triangulum DBG, [*Fig. CX*] seorsim, & bisecetur angulus DBG per lineam BM, quæ erit perpendicularis ad curvam Bb; proinde $dx : dy = DB : DM$; invenitur itaque $DM = ydy : dx$; cum reliquis si procedatur eodem modo, quo supra factum est, pro Causticis a radiis parallelorum reflexis formatis, invenitur $z = (ydy^2 + ydx^2) : (dx^2 - dy^2)$, $DG = 2ydxdy : (dx^2 - dy^2)$, & ejus differentiale, posito dx constante, id est, $ddx = 0$, $(2ydx^3 ddy - 2dxdy^4 + 2ydxdy^2 ddy + 2dx^3 dy^2) : (dx^2 - dy^2)^2 =$ [*Fig. CIX*] $Dg - DG$, id est, gN. Ob similitudinem triangulorum DBH & DGN, est $DB : DG = BH : GN$; ergo $GN = 2dx^2 dy : (dx^2 - dy^2)$, & ob similitudinem triangulorum DBG, GNM, est $DB : DG = GN : MN$, id est, $y : \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} = \frac{2dx^2 dy}{dx^2 - dy^2} : \frac{4dx^3 dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2} = MN$, ideoque $gN - MN$, seu $gM = (2ydx^3 ddy$

$+ 2ydxdy^2ddy - 2dxdy^4 - 2dx^3dy^2) : (dx^2 - dy^2)^2$. Quia autem BD: DG [seu bD: Dg] $=$ bH: HL, id est, $y : \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} = dy : \frac{2dxdy^2}{dx^2 - dy^2} =$ HL, erit BH + HL, id est, BL $= (dx^3 + dxdy^2) : (dx^2 - dy^2)$; sed ob similitudinem triangulorum BFL & MEg est BE:ME vel GE $=$ BL:Mg, & *dividendo* BG: BF $=$ BL $-$ Mg:BL; fiat ergo BL $-$ Mg $\left[\frac{dx^5 + dxdy^4 - 2ydx^3ddy - 2ydxdy^2ddy + 2dx^3dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2}\right]$: BL $\left[\frac{dx^3 + dxdy^2}{dx^2 - dy^2}\right]$, id est $\frac{dx^2 + dy^2 - 2yddy}{dx^2 - dy^2} : 1 =$ BG, vel z $\left[\frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 - dy^2}\right]$: BE, itaque erit $= \frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 + dy^2 - 2yddy}$. Sic igitur, in qualibet curva data AB, longitudo radii reflexi BE determinari potest, per substitutionem valoris ipsius dy & ddy vel ipsius dx, prout unum vel alterum facilius fieri potest ex natura curvæ datæ AB; ita tamen ut valor ipsius dx, vel ipsa dx, semper constans ponatur, quia in calculo pro constante assumpta est.

Hæc curva Caustica non minus generalem rectificationem admittet quam præcedens: Sit enim curva data ABC, & punc-
TAB. LXVI. *Fig.* III. tum radians D, curva vero Caustica LHI, quæ, si punctum D non sit in linea tangente curvam in A, non incipiet in hoc puncto A sed in alio L, distante ab A longitudine radii reflexi AL: Evolvatur ergo Caustica LHI, & describat hac evolutione curvam LFf; ostendetur eodem modo, quo jam ostensum est, quod bX differentiale ipsius BH sit $=$ bO differentiali ipsius DB, ideoque Db + bH $-$ DA $-$ AL $=$ portioni curvæ LH. Notandum est quod DA + AL auferri debeat a Db + bH; nam evanescente bf, id est, si curva HL sit $=$ nihilo, summa tamen ipsarum Db & bH non erit nihil, sed erunt ipsæ lineæ DA, AL; ideoque integralia, quæ rectificationem curvæ LH ostendunt, diminuenda sunt summa linearum DA + AL, & quod remanet erit verus valor curvæ Causticæ.

LECTIO

LECTIO TRIGESIMA.

De Caustica circulari radiorum a dato in peripheria puncto promanantium.

AFferemus hic exemplum, ubi curva Caustica, a radiis a puncto derivantium reflexis formata, proprietatibus egregiis & utili speculatione non cedit alteri illi *Tschirnausianæ*.

Omnia enim, quæ Dn. TSCHIRNHAUS suæ attribuit, huic quoque conveniunt; radius reflexus in hac, ut in illa, constantem habet rationem ad incidentem; non minus etiam quam spatium causticum inter radium reflexum, lineam circularem & Causticam interceptum, ad segmentum circulare a radio incidenti abscissum; & quod mirum est, hæc Caustica per evolutionem aliam sibi similem progenerat: est enim quoque una ex Cycloidibus, & quidem simplicior quam altera TSCHIRNHAUSII.

Ante omnia ergo determinatio invenienda est, & exinde omnes reliquas proprietates demonstrabimus: Sit circulus BGD, in cujus peripheria datur punctum B, a quo radii emanantes BG, Bg, &c. incidunt in eandem peripheriam, quorum reflexi GL, gL, &c. formant, per intersectionem L, curvam Causticam BLE: determinanda est hæc curva, id est, quæritur longitudo radii reflexi GL? Per punctum B agatur diameter BD, & in hanc demittantur perpendiculares GH, gh: Sit semidiameter BC $= a$, BH $= r$, HG $= t = \sqrt{(2ar - rr)}$ erit hH vel gI $= dr$, gG $= adr : \sqrt{(2ar - rr)}$, BG $= y = \sqrt{2ar}$; proinde ejus differentiale gO $= adr : \sqrt{2ar} = dy$, gG^2 $-$ gO^2 $=$ OG^2, invenitur ergo OG $= adr : \sqrt{(4aa - 2ar)} = dx$; $ddy = (2arddr - adr^2) : 2r\sqrt{2ar}$; quoniam autem dx ponitur constans, erit $ddx = (4aaddr - 2arddr + adr^2) : (4a - 2r)\sqrt{(4aa - 2ar)} = 0$. Invenitur ergo $ddr = dr^2 : (2r - 4a)$; substituto ergo valore ipsius ddr invenitur $ddy = aadr^2 : (rr - 2ar)\sqrt{2ar}$. Si igitur ponantur quantitates inventæ

TAB. LXVI. Fig. 112.

 ipsa-

ipsarum y, dy, ddy & dx, proveniet GL $[(ydy^2 + ydx^2) : (dx^2 + dy^2 - 2yddy)] = \frac{1}{3}\sqrt{2ar} = \frac{1}{3}$GB.

Ad construendam itaque curvam BLE, sumendus est radius reflexus GL = trienti incidentis BG; erit punctum L in curva quaesita: quod etiam synthetice demonstrari potest ad modum TSCHIRNAUSII.

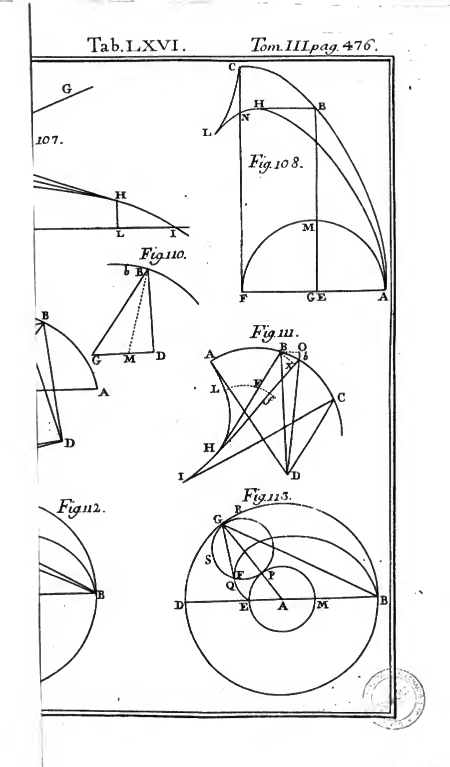
Producantur radii reflexi GL, gL donec peripheriae occurrant in punctis M, m; erit arcus gB = arcui gm, & arcus GB = arcui GM; auferatur utrobique minor a majori, remanebit arcus gG = Mm — gG, proinde 2gG = Mm: sed, ob similitudinem triangulorum MLm & gLG, est ML : Lg vel LG = Mm : gG = 2 : 1; ergo *componendo* MG vel BG : LG = 3 : 1, ut prius invenimus. Hinc BE est tripla ipsius DE.

TAB. LXVI. Fig. 113. Ostendemus jam hanc Causticam esse Cycloidem: Sit enim circulus BGD, cujus diameter BD, radius incidens BG, reflexus GF, curva Caustica BFE; centro A & radio AE, describatur circulus MPE, & ducta AG construatur circulus GQP, radium reflexum GF secans in Q. Dico Causticam BFE esse Cycloidem, cujus circulus immotus est MPE, & genitor GQP, qui erunt aequales, vertex B & principium E.

Demonstratio: Angulus incidentiae BGR est = angulo reflexionis QGD, vel QGS: ergo segmentum GRB est simile segmento GSQ; proinde erit subtensa BG : subtens. QG = diameter DB : diamet. GP = 3 : 1 = subtens. BG : GF; ergo QG = FG; ideoque circulus GQP transit per punctum contactus F. Quia vero ob similitudinem segmentorum arcus BRG = 3 arcubus GSF, & idem arcus BRG = 3 arcubus MP, erit arcus GSF = arcui MP; ergo arcus residuus FP = arcui residuo PE; proinde Caustica BFE est Cyclois. *Q. E. D.*

Hinc etiam haec Caustica proprietatem alterius habet, quod nempe per suam evolutionem aliam Causticam describat sibi similem.

Liquet ex iis quae dicta sunt de Cycloidibus, quod curva BF sit quadrupla rectae GF; quod spatium causticum BFG sit tri-


G
107.
H
L
I
Fig.108.
C
H
B
N
L
M
F
GE
A
Fig.110.
b
B
G
M
D
B
A
D
Fig.111.
A
B
O
b
x
L
F
f
C
H
I
D
Fig.112.
B
Fig.113.
G
R
S
F
P
Q
D
E
A
M
B

triplum ſegmenti circularis GSF; proinde totum ſpatium BFED æquale triplo ſemicirculi GFP. Item, ſi evolutio Cauſticæ BFE incipiat in B, altera Cauſtica quæ exinde generabitur habebit poſitionem priori inverſam. Principium enim eſt in puncto B, & vertex in linea AD producta, diſtans a centro A, novem radiis AE; ideoque circulus in quo illa Cauſtica generatur eſt noncuplus circuli, in quo Cauſtica BFE deſcribitur. Spatium contentum inter FG productam uſque ad Cauſticam exteriorem, inter ejuſdem exterioris partem a puncto B deſumptam & inter interiorem BF, eſt ſexdecuplum ſpatii BFG.

LECTIO TRIGESIMA PRIMA.

De Cauſticis parabolica & cycloidali.

SIt Parabola AGg, cujus vertex A, axis AH, in quo punctum eſt datum B, quod radios BG, Bg emittit, qui reflexi conſtituunt curvam Cauſticam; determinandum eſt ejus punctum L, vel invenienda longitudo GL? Sit parameter $= a$, AB $= b$, AH $= r$, HG $= t = \sqrt{ar}$, BG $= y = \sqrt{(rr - 2rb + bb + ar)}$ ergo $Gi = dr$, $gi = adr : 2\sqrt{ar}$; addantur eorum quadrata $(a + 4r)\,dr^2 : 4r = Gg^2$, eſt autem $dy\,[gO] = (2r - 2b + a)\,dr : 2\sqrt{(rr - 2rb + bb + ar)}$, ejuſque quadratum $dy^2 = (4rr + 4bb + aa - 8br + 4ar - 4ab)\,dr^2 : (4rr - 8rb + 4bb + 4ar)$; ideoque $Gg^2 - gO^2$ ſeu $GO^2 = (abb + arr - 2arb)\,dr^2 : (4r^3 - 8rrb + 4rbb + 4arr) = dx^2 =$ conſtanti. Hujus itaque quantitatis ſumendum eſſet differentiale, & æquandum nihilo, ut innoteſceret ddr. Quia autem univerſaliter ſolvere nimis prolixum foret; ſumemus caſum ſpecialem: ſit igitur $b = 0$, id eſt, ponatur punctum B in vertice, cæteris poſitis ut prius, erit BG $= y = \sqrt{(rr + ar)}$, $Gi = dr$, $gi = adr : 2\sqrt{ar}$, $Gg^2 = (a + 4r)\,dr^2 : 4r$, & $dy^2\,[gO^2] = (4rr + 4ar + aa)\,dr^2 : (4rr + 4ar)$; ideoque $Gg^2 - gO^2$ ſeu $GO^2 = adr^2 : (4r + 4a) = dx^2 =$ conſtanti, ergo ejus TAB. LXVII. *Fig.* 114.

 dif-

differentiale $(8ardrddr + 8aadrddr - 4adr^3):(4r+4a)^2 = 0$. Invenitur itaque $ddr = dr^2 : (2r+2a)$; quoniam autem $dy = (2r+a)dr : \sqrt{(4rr+4ar)}$, erit $ddy = (-aadr^2 + (2rddr + addr) \times (2rr+2ar)) : (2rr+2ar)\sqrt{(4rr+4ar)}$; substituto valore ipsius ddr, provenit $ddy = (-aa+2rr+ar)dr^2 : (2rr+2ar)\sqrt{(4rr+4ar)}$; quoniam itaque $dx^2+dy^2 = Gg^2$ $(a+4r)dr^2 : 4r$, erit $(ydx^2+ydy^2):(dx^2+dy^2-2yddy) = (a+4r)\sqrt{(rr+ar)} : 3a = GL$.

Si itaque fiat $3a : BG = a+4r$ ad quartam; erit hæc æqualis GL: addatur ad GL recta BG, proveniet $(4a+4r)\sqrt{(rr+ar)} : 3a =$ curvæ Causticæ AL. Spatium causticum AGL etiam quadrari potest.

Coronidis loco adjungemus determinationem Causticæ in Cycloide quæ generatur a radiis axi parallelorum reflexis, quæ in præcedentibus omissa est.

Sit Cyclois ABC cujus vertex C, axis CE, circulus ge-
TAB. LXVII. nitor CFE, radius incidens GB, reflexus BH; quæritur lon-
Fig. 115. gitudo BH? Sit $CE = 2a$, $CL = r$, arcus $CF = s$, $LB = t = s + \sqrt{(2ar-rr)}$, peripheria $CFE = AE = p$, erit $AG = p - s - \sqrt{(2ar-rr)} = x$, & $GB = 2a - r = y$; ideoque $dx = -dr\sqrt{(2a-r)} : \sqrt{r}$; quia autem dx supponitur constans, erit $ddx = adr^2 : r\sqrt{(2ar-rr)} - ddr \sqrt{(2a-r)} : \sqrt{r} = 0$, ideoque $ddr = adr^2 : (2ar-rr)$; quia $y = 2a - r$, erit $dy = -dr$, proinde $ddy = -ddr = -adr^2 : (2ar-rr)$; invenitur itaque, pro $(dx^2+dy^2) : 2ddy$, $2a - r = y = BG = BH$ quæsitæ. Hinc curva AH est duplæ BG, tota $AHE =$ duplæ diametro CE: spatium $ABH =$ subduplo segmento AGB. Si LB transit per centrum circuli, erit punctum H omnium supremum. Caustica AHE est etiam Cyclois, cujus circulus genitor est subquadruplus circuli EFC.

LECTIO

LECTIO TRIGESIMA SECUNDA

De Caustica cycloidali.

QUod curva Caustica in Cycloide a radiis axi parallelorum reflexis formata sit etiam Cyclois, sic demonstratur: Sit ABC Cyclois, cujus vertex C, axis CE, circulus genitor EFC; radius incidens GB, reflexus BH, & Caustica quæ formatur AHE: Dico hanc esse Cycloidem, quæ habet circulum generatorem, cujus diameter est subdupla diametri EC. Ducta per punctum B basi parallela BFP secante circulum EFC in punctis F & P, quæ cum centro R conjungantur per rectas RF, RP; ducatur quoque recta EF, & ipsi parallela BM; connexisque punctis M, H, erigatur perpendicularis MN occurrens rectæ BH in N. Quia nunc, per constructionem, BM est parallela rectæ FE, erit BM perpendicularis ad Cycloidem ABC; proinde hæc BM bisecat angulum quem faciunt radius incidens & reflexus, id est, MBG = MBH: quia autem in præcedentibus demonstratum est BG esse æqualem ipsi BH, & BM est communis, erunt triangula MBG & MBH similia & æqualia; proinde MH = MG, & angulus MHB = MGB = recto. Nunc diametro MN describatur circulus MHN, qui ob angulum rectum MHN transibit per punctum H; ex hoc puncto ducatur in centrum O recta HO; ostendam jam quod circulus MHN sit semper constans. id est, quod MN sit ubique æqualis ER, & quod arcus MH sit æqualis rectæ EM. Nam, ob similitudinem & æqualitatem triangulorum MGB & FLE, est MG, seu HM, æqualis LF, & ang. BMG = EFL; ergo HMG = duplo EFL; proinde reliquus ad duos rectos HME = duplo reliqui ad unum rectum, ipsius nempe LEF; angulus autem HME = angulo HNM, ergo HNM etiam = est duplo LEF, ideoque HOM = duplo LRF, vel HOM = PRF,

TAB. LXVII. Fig. 116.

$= PRF$, proinde triangula PRF & HOM ſunt ſimilia, & idcirco $RF : HO = PF$, id eſt, $2LF : HM = 2 : 1$; ideoque diameter CE eſt dupla diametri HM : circulus igitur MHN eſt conſtans. Hoc unum eſt; alterum ſic demonſtratur: Quia angulus $HOM = PRF$, erit ſegmentum HM ſimile ſegmento PCF: ideoque recta PF ad rectam HM [2 ad 1] ut arcus PCF ad arcum HM; ergo dimidius arcus, id eſt, CF æquatur arcui HM; verum arcus CF eſt $=$ rectæ $FB =$ rectæ EM, proinde arcus HM eſt $=$ rectæ EM. Curva itaque AHE eſt Cyclois, cujus circulus genitor eſt MHN, diametrum habens MN ſubduplam diametri EC, circuli genitoris EFC in Cycloide ABC. *Q. E. D.*

Poſtquam in Cycloide determinavimus utramque Cauſticam, tam illam quæ formatur a radiis ad axem perpendicularium reflexis, quam quæ formatur a radiis axi parallelorum reflexis; reſtat ut eam quoque determinemus quæ formatur a radiis a puncto quodam derivantium reflexis; Sit itaque Cyclois ABC, cujus vertex A, circulus genitor ADE, axis AE. Sit item punctum A, a quo radii emanant, quales ſunt AB, &c: quæritur longitudo radii reflexi BH? Sit $AE = 2a$, $AF = r$, $AD = DB = s$, erit $DF = \surd(2ar - rr)$, & $AB [y] = \surd(2ar + ss + 2s\surd(2ar - rr))$, $AD = \surd 2ar = \frac{1}{2}$ curvæ AB: erit

TAB. LXVII. Fig. 117.

$$dy = \frac{adr + sds + (4ards + 2asdr - 2rrds - 2rsdr) : \surd(2ar - rr)}{\surd(2ar + ss + 2s\surd(2ar - rr))}$$

in quo ſi ſubſtituatur valor ipſius $ds [adr : \surd(2ar - rr)]$, provenit $dy = \frac{3adr + (3a - 2r)sdr : \surd(2ar - rr)}{\surd(2ar + ss + 2s\surd(2ar - rr))}$. Nunc quærendum eſſet dx, ejuſque differentiale æquandum nihilo, ut haberetur ddr, qui valor ſubſtituendus eſſet in quantitate ddy; quod ob nimis prolixum & laborioſum calculum factu fere impoſſibile eſt. Sumamus ergo caſum faciliorem.

Sit punctum radians in centro circuli genitoris G, radius incidens GB, reflexus BH. Sit nunc $DF = r$, $AG = a$, $GB = y$, $AD = s = BD$, erit $GF = \surd(aa - rr)$, $BG = y = \surd(ss + 2rs + aa)$; curva $AB = 2AD = 2\surd(2aa -$

$2a\surd(aa$

$2a \sqrt{(aa - rr)}$), erit primo $dy = (sds + rds + sdr) : \sqrt{(ss + 2rs + aa)}$, ubi si substituatur valor ipsius ds [$adr : \sqrt{(aa - rr)}$], provenit $dy = \frac{(as + rr) dr : \sqrt{(aa - rr)} + sdr}{\sqrt{(ss - 2rs + aa)}}$, quæ quantitas quia simplicior est quam præcedens, calculus etiam paulo erit facilior; etiamsi satis adhuc prolixus, & uno alterove momento perfici non possit.

Linquamus nunc Causticas Cycloidum, & id duntaxat animadvertamus, quod quemadmodum curva Cycloidalis & Spiralis Logarithmica, id commune habent, ut utraque per evolutionem suam eandem, vel saltem sibi similem describant; ita etiam commune ipsis convenit, quod notatu dignum est, ut utraque habeat curvam Causticam eandem vel sibi similem; hac tamen cum differentia, ut curva Caustica in Cycloide, quæ etiam Cyclois est, sit producta a radiis parallelorum reflexis; Caustica vero in Spirali Logarithmica quæ etiam Spiralis Logarithmica est, sit producta a radiis a centro provenientium reflexis. Prius supra demonstratum est; posterius nunc demonstrandum.

Sit Spiralis Logarithmica bBA, cujus centrum A, & simul punctum radians, a quo incidant radii AB, Ab; qui reflexi, per sua intersectionum puncta C, forment curvam CEA; dico hanc curvam CEA esse etiam Spiralem Logarithmicam, & quidem eandem. Sit [ob angulum DbB ubique constantem] bD : DB $= a : b$; posito itaque AB $= y$, erit bD $= dy$, & proinde BD $= bdy : a = dx$; quia ergo dx ponitur constans, erit $bdy : a$ etiam constans, & proinde $ddy = 0$, ideoque $(ydx^2 + ydy^2) : (dx^2 + dy^2 - yddy)$ [$=$ BC] $= (ydx^2 + ydy^2) : (dx^2 + dy^2) = y =$ AB; ideoque AB $=$ BC. Ducatur nunc linea AC, erit angulus BAC $=$ angulo BCA, & quia angulus ABF $=$ CBb; erit angulus ABF $=$ BAC $=$ BCA $=$ constanti; ideoque curva CEA est Spiralis Logarithmica, & quidem eadem cum curva bBA, ob æqualitatem angulorum ABF & ACB, & quia CB tangit curvam. TAB. LXVII. *Fig.* 118.

LECTIO TRIGESIMA TERTIA.

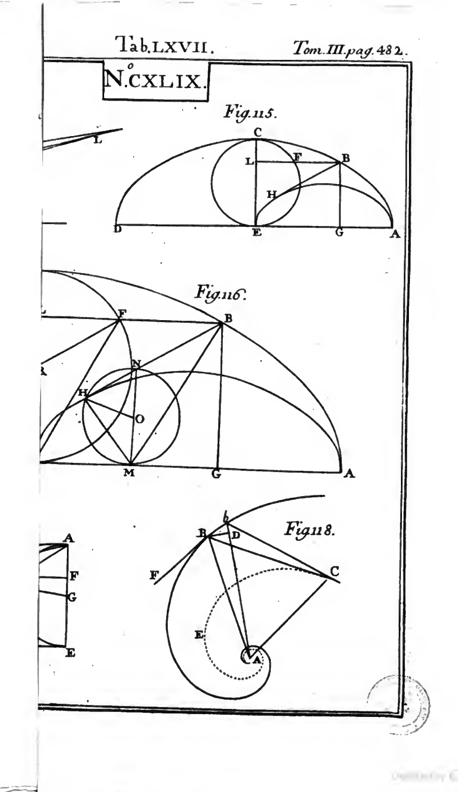
Varia Problemata Physico-Mechanica, eorumque Solutiones.

Inventio Curvæ descensus æquabilis.

SAtis hucusque, ut spero, generalem Calculi integralium ideam adumbravimus; ubi quidem rem breviter, in quantum necessitas permisit, interim dilucide & perspicue explicuimus. Multa, imo infinita, ad materiam hanc pertinentia restant, quæ consulto omisimus; non ac si calculum diffugerent, sed potissimum quia nostrum erat propositum ejus utilitatem & universalitatem, per illorum duntaxat solutionem patefaciendi, quæ in penitiori Geometria, quamvis non parum abstrusa, crebro tamen occurrunt. Methodo itaque nostra recte adhibita, cætera, si quæ supersunt, quin facile solvi possint nullus dubito: imo asserere ausim, omnia Problemata solubilia, quæ hactenus vulgaris Geometriæ opem eluserunt, & quæ tanquam impossibilia rejecta fuere, Calculi nostri integralium analysin subire. Cujus veritas magis patebit, cum ostenderimus quod illius limites eousque se extendant, ut nulla sit pars Matheseos concretæ, cujus difficiliora & præstantiora, quæ facta fuerunt, inventa non sub illis contineantur; quæ alias, omni *Cartesiana* Geometria frustra ad auxilium vocata, in æternum delitescerent. Hæc revera ita se habere manifestum erit ex solutionibus quorundam Problematum Physico-Mechanicorum a præstantissimis Mathematicis propositorum, quorum solutiones, partim nullibi, partim vero suppressa analysi reperiuntur.

Primum itaque notatu dignum est tale:

TAB. LXVIII. *Fig.* 119. Quæritur qualis sit natura curvæ ADC ejus proprietatis, ut axe BF verticaliter erecto, pondus in curva libere descendens æqualibus temporibus æquales altitudines verticales absolvat; ut si ex. gr. pondus vel globus a puncto A moveri incipiens


N°. CXLIX.
Fig. 115.
C
L
F
B
H
D
E
G
A
Fig. 116.
F
B
N
H
O
M
G
A
Fig. 118.
b
B
D
C
F
E
A
A
F
G
E
L

incipiens una ſecunda pervenerit ad D, altera ſecunda ad C, oportet ut altitudo verticalis AF puncti C ſit dupla altitudinis verticalis AE puncti D; vel ſi tempus per AD ſit ad tempus per AC ut p ad q, oportet ut ſit quoque AE ad AF ut p ad q. Ad hoc Problema ſolvendum, quod Dn. LEIBNITIUS his circiter terminis concipit; ***Invenire curvam deſcenſus, in qua corpus deſcendens æqualibus temporibus æqualiter horizonti appropinquat***; ſequentia ſunt ſupponenda, quæ tum per ſe ſatis nota, tum in quolibet Libro de projectilium natura agente demonſtrantur.

1°. Si corpus uniformiter vel æquabiliter movetur, erunt ſpatia percurſa temporibus proportionalia; & ſi duo corpora inæqualibus celeritatibus, ſed uniformiter moventur, erunt ſpatia ab illis æqualibus temporibus percurſa in ratione celeritatum.

2°. Si corpus in linea verticali libere deſcendit, erunt ſpatia percurſa temporum quadratis proportionalia.

3°. Eodem poſito, erunt ſpatia percurſa celeritatum ultimo acquiſitarum quadratis proportionalia; ideoque tempora erunt ut celeritates.

4°. Corpus quomodocunque deſcendens, vel in recta, vel in curva, in quolibet puncto eam celeritatem acquiret, quam acquireret ſi ab eadem altitudine verticali deſcendiſſet directe.

Ex his præſuppoſitis ſi Problema per Calculum integralium reſolvere velimus; tentandum eſt, ut Problema quod mechanicis principiis innititur in pure geometricum convertatur: quod ita peragitur.

Sit curva quæ quæritur ADC, in qua ſi corpus ad certum punctum C pervenerit, percurrat, uno temporis momento, celeritate ſua acquiſita, lineolam indefinite exiguam Cc, altitudinem vero perpendicularem Hc; ſit nunc corpus in quocunque alio puncto D, & abſolvat æquali temporis momento lineolam Dd, & altitudinem verticalem Gd; quia itaque temporis momenta ſupponuntur æqualia, debent, ex hypotheſi, altitudines Gd & Hc etiam eſſe æquales; & per ſuppoſitionem TAB. LXVIII. Fig. 120.

 pri-

primam, Dd eſt ad Cc ut celeritas in D ad celeritatem in C. Sed Dd eſt ad Cc in ratione compoſita ex ratione Dd ad Gd & ex ratione ejuſdem Gd, vel æqualis Hc, ad Cc, id eſt, ex ratione tangentis DK ad applicatam ED, & ex ratione alterius applicatæ ad libitum aſſumptæ FC ad tangentem ad libitum aſſumptam CL. A puncto C ducatur ipſi DK parallela CM, erit DK ad DE ut CM ad CF; ergo ratio compoſita ex DK ad DE, id eſt ex CM ad CF, plus CF ad CL æqualis eſt rationi CM ad CL; ergo celeritas in D eſt ad celeritatem in C, ut CM ad CL. Verum, per tertiam & quartam ſuppoſitionem, quadratum celeritatis in D eſt ad quadratum celeritatis in C, ut ED ad FC; ergo etiam quadratum CM ad quadratum CL, ut ED ad FC. Problema itaque propoſitum in pure geometricum redactum eſt, quod in abſtracto ita proponi poteſt.

Invenire curvam ADC ejus proprietatis, ut ſi ex puncto quodam aſſumpto C ducatur tangens CL, & in quocunque alio puncto D tangenti DK parallela CM, quadratum CL ſit ad quadratum CM, ut CF ad DE.

Ad hoc ſolvendum, ſit $AE = x$, $ED = y$, $CF = a$, $CL = b$; erit $GD = dx$ & $Gd = dy$, proinde $Dd = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; eſt autem, ob ſimilitudinem triangulorum GdD & FCM, $Gd : Dd = FC : CM$, id eſt, $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a : \frac{a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = CM$, ergo $CM^2 = (aadx^2 + aady^2) : dy^2$; quoniam itaque, per proprietatem curvæ, $CL^2 : CM^2 = CF : DE$; hoc eſt $bb : \frac{aadx^2 + aady^2}{dy^2} = a : y$; habetur reducta æquatione $bbydy^2 - a^3 dy^2 = a^3 dx^2$, ideoque $dy \sqrt{(bby - a^3)} = dx \sqrt{a^3}$; ſumptis integralibus, pervenitur ad hanc æquationem $(\frac{2}{3} y - \frac{2}{3} a^3 : bb) \sqrt{(bby - a^3)} = x \sqrt{a^3}$, quæ exprimit naturam curvæ quæſitæ AD.

TAB. LXVIII. *Fig.* 121.

Si AE, id eſt $x = 0$, erit ED, id eſt $y = a^3 : bb = AO$, quod indicium eſt, quod corpus, antequam ad curvam pertingat, a puncto A deſcendat prius per rectam $AO = a^3 : bb$. Si itaque æquationem

nem invenire velimus, quæ naturam curvæ exprimat per relationem applicatarum DP ad axem PO; ponendum est DP [DE — AO $= y - a^3 : bb$] $= z$, & sic æquatio inventa convertetur in hanc $\frac{2}{3} z \sqrt{bbz} = x \sqrt{a^3}$, & reducta ad rationalitatem provenit $\frac{4}{9} bbz^3 = a^3 xx$, vel $\frac{9a^3}{4bb} xx = z^3$; quæ æquatio ostendit curvam OD esse Parabolam cubicalem secundam, cujus parameter $= \frac{9}{4} a^3 : bb$.

LECTIO TRIGESIMA QUARTA.

Alia solutio Problematis de invenienda curva descensus æquabilis. Inventio Curvæ Isochronæ Paracentricæ.

PRoblema quod in Lect. præced. solvimus facilius ita solvi potest, statuendo non nisi unicam litteram cognitam & constantem. Sit ADd curva quæsita, in qua corpus æqualibus temporibus æqualiter descendit ad horizontem; ideoque prima curvæ portiuncula Aa, quæ eodem temporis momento percurritur quo Dd, erit æqualis altitudini perpendiculari Gd; quoniam curvæ particula Aa est ipsa altitudo verticalis in puncto A: proinde celeritas in A est ad celeritatem in D, ut dG ad Dd, id est, in ratione finita; ex quo sequitur ut corpus in A jam habeat celeritatem acquisitam: oportet itaque ut lapsus incipiat a superiori quodam puncto L; ita ut, cum venerit in A celeritatem illam acquirat. Hoc præsupposito; sit AL $= a$, AE $= x$, ED $= y$, E$e = dx$, & G$d = dy$. Ostensum jam est quod celeritas in A sit ad celeritatem in D, ut Gd ad Dd, ut dy ad $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; Est autem celeritas in A ad celeritatem in D, ut $\sqrt{\text{AL}}$ ad $\sqrt{(\text{DE} + \text{AL})}$ vel, si vis, quadratum celeritatis in A ad quadratum celeritatis in D, ut AL ad DE + AL, ut a ad $y + a$; ideoque erit etiam $dx^2 + dy^2$ ad dy^2, ut $y + a$ ad a; proinde $ydy^2 + ady^2 = adx^2 + ady^2$, & $dy\sqrt{y} = dx\sqrt{a}$, & eorum integralia $\frac{2}{3} y\sqrt{y} = x\sqrt{a}$, TAB. LXVIII. Fig. 122.

 vel

vel $\frac{4}{9}y^3 = axx$, & tandem $y^3 = \frac{9}{4}axx$; quod oſtendit curvam ADd eſſe Parabolam cubicalem ſecundam, cujus parameter $= \frac{9}{4}a = \frac{9}{4}$ LA.

TAB. LXVIII. Fig. 123. Hinc, ſi invenire libeat curvam aliam, ex cujus evolutione iſta Parabola deſcribatur, ducenda eſt in puncto D perpendicularis DR, quæ ſit æqualis $\frac{2y+2a}{a}\sqrt{(yy+ay)}$, erit punctum R in curva quæſita AR; quæ hanc habebit proprietatem, ut ſi filo RD appendatur in illius termino corpus, cui ſi imprimatur in puncto A celeritas quam acquireret ſi a puncto L delaberetur, corpus hoc filum a curva AR evolvens, deſcribet curvam AD, & proinde æqualiter æqualibus temporibus deſcendet verſus horizontem.

Vidimus hucuſque quod curva, in qua corpus æqualiter accedit ad horizontem, ſit Parabola cubicalis ſecunda: videamus nunc qualis debeat eſſe curva, in qua corpus deſcendens æqualibus temporibus æqualiter accedat ad punctum poſitione datum.

Ad hoc ſolvendum, eædem hypotheſes ſupponendæ ſunt quas ſuppoſuimus in priori caſu: Et quidem duplici modo hoc ſolvere poſſemus; quorum prior non abſimilis eſt ei, qui primo in præcedenti adhibitus fuit, poſterior idem fere eſt cum poſteriori præcedentis. Quia autem ille paulo prolixus evadit, præterquam quod etiam plures litteræ adhibendæ ſunt; omiſſo illo, poſteriorem amplectemur. Sit punctum poſitione datum F, per quod ducatur linea verticalis FAL, in qua ſumatur punctum A ad libitum pro initio curvæ quæſitæ ADd. Conſideretur corpus deſcendens perveniſſe ad punctum aliquod D, & percurriſſe, uno temporis momento, lineolam Dd: ductis itaque FD, Fd, centroque F deſcripto arculo dH, oſtendet reſidua DH, quantum corpus, uno temporis momento, accedit ad punctum F: quia autem in initio curvæ corpus directe verſus F deſcendit, erit portiuncula curvæ Aa, uno temporis momento percurſa, æqualis, ex hypotheſi, ipſi DH; ex quo infertur, ut prius, quod corpus in A jam debeat habere cele-

TAB. LXVIII. Fig. 124.

celeritatem acquiſitam. Sit itaque illa altitudo AL, a qua delapſum corpus iſtam celeritatem acquirat. Ponatur nunc AL $= a$; AF $= b$; AE, vel DO $= x$; ED, vel AO $= y$; eE vel GD $= dx$; G$d = dy$; D$d = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; erit FO $= b - y$, FD $= \sqrt{(bb - 2by + yy + xx)}$ ejuſque differentiale $(-bdy + ydy + xdx) : \sqrt{(bb - 2by + yy + xx)} =$ DH. Quia nunc Dd eſt ad Aa vel DH, ut celeritas in D ad celeritatem in A; erit quadratum Dd ad quadratum DH, ut quadratum celeritatis in D ad quadratum celeritatis in A, ut ED + AL ad AL, id eſt, $dx^2 + dy^2 :$

$$\frac{(bb - 2by + yy) \times dy^2 (-2bx + 2xy) \times dxdy + xxdx^2}{bb - 2by + yy + xx} = y + a : a;$$

Si proportio ad æquationem redigatur, provenit hæc $(abb - 2aby + ayy) \times dx^2 + axxdy^2 = (bby - 2byy + y^3) \times dy^2 (-2bxy + 2xyy) \times dxdy (-2abx + 2axy) \times dxdy + xxydx^2$. Ut æquatio hæc ad pauciores terminos reducatur, ponatur $b - y$, id eſt, FO $= z$, provenit $azzdx^2 + axxdz^2 = bzzdz^2 - z^3dz^2 (-2bxz - 2xzz)\ dxdz + 2axzdxdz + bxxdx^2 - zxxdx^2$. Nunc, per formulas pro æquationibus quadratis, quærendus eſt valor ipſius dx vel dz, & ſi fieri poteſt ex utraque integrale ſumendum, æquatio inde proveniens oſtendet naturam curvæ quæſitæ. Ponamus caſum ſpecialem, punctum nempe F eſſe in A, id eſt, b eſſe $= 0$; habebitur hæc æquatio, ſervatis litteris prioris æquationis, $ayydx^2 + axxdy^2 = y^3dy^2 + 2xyydxdy + 2axydxdy + xxydx^2$; ergo $dx^2 = (2xyydxdy + 2axydxdy + y^3dy^2 - axxdy^2) : (ayy - xxy)$, proinde $dx = dy \times (xyy + axy \pm (yy + xx) \sqrt{ay}) : (ayy - xxy)$; ſumptis, ſi fieri poteſt, utrobique integralibus, habebitur natura curvæ.

Ut æquationem inveniamus paucioribus terminis conſiſtentem in quantitatibus differentialibus, aliæ quantitates pro indeterminatis aſſumendæ ſunt; ita ut ſi earum mutua relatio innoteſcat, curva quæſita non minus quam modo præcedenti determinata ſit. Appelletur itaque AD $= x$, & poſitis reliquis ut prius, nempe CD $= y$ AL $= a$, dG $= dy$, erit nunc dH $= dx =$, per hypotheſin, primæ particulæ Aa; AC $= \sqrt{(xx - yy)}$, TAB. LXVIII. *Fig.* 125.

$-yy$), ejusque differentiale Cc, vel $DG = (xdx - ydy) : \sqrt{(xx - yy)}$, $GD^2 + Gd^2 = Dd^2$, invenitur itaque $Dd^2 = (xxdx^2 - 2xydxdy + xxdy^2) : (xx - yy)$; est autem quadratum Dd ad quadratum Aa, vel DH, ut quadratum celeritatis in D ad quadratum celeritatis in A, ut $DC + AL$ ad AL, hoc est, $\frac{xxdx^2 - 2xydxdy + xxdy^2}{xx - yy} : dx^2 = y + a : a$; proinde $yxxdx^2 - y^3dx^2 - ayydx^2 = axxdy^2 - 2axydxdy$. Addatur utrobique $ayydx^2$, & dividatur per a, & tunc habebitur hæc æquatio $dx \sqrt{(yxx - y^3)} : \sqrt{a} = xdy - ydx$; hæc itaque æquatio simplicior est quam ea in Lect. præcedenti. Si illam transmutare velimus in aliam, in qua relatio abscissæ AC ad applicatatam CD exprimatur; appelletur AC, z, & loco ponendum est $\sqrt{(zz + yy)}$, loco dx vero $(zdz + ydy) : \sqrt{(zz + yy)}$; & sic æquatio inventa mutabitur in hanc $(zdz + ydy) \sqrt{(yzz : a)} : \sqrt{(zz + yy)} = dy \sqrt{(zz + yy)} - (yzdz + yydy) : \sqrt{(zz + yy)}$, vel reducta æquatione $(zdz + ydy) \sqrt{y} = (zdy - ydz) \sqrt{a}$ vel [posito $y = mm : a$] $2m^3 dm + aazdz = 2aazdm - aamdz$. Ex quibus quantitatibus, si per regulas in methodo tangentium inversa traditas integralia sumi possunt, prodibit natura curvæ. *

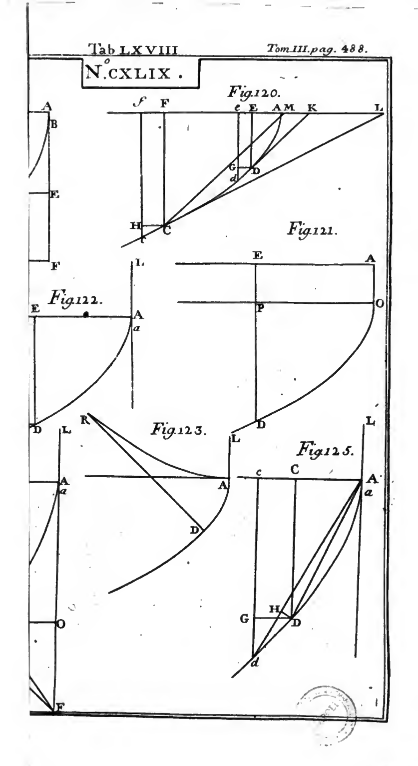
LECTIO TRIGESIMA QUINTA.

Inventio Curvæ Isochronæ vel Tautochronæ.

AD aliud nunc nos conferamus Problema, quod solvit Dn. HUGENIUS, quodque non parum usus habere ostendit in horologiis pendulorum, vel oscillatoriis. Notum enim est, quod oscillationes circulares æqualibus temporibus non absolvantur; utpote quæ minorem arcum describunt minori tempore, quam quæ majorem describunt. Oscillationes itaque circulares in horologiis usui venire non possunt; secus enim tempus non æqualiter mensuraretur.

Huic

* Vid. Nus. XIX. pag. 119. *Tom I.*


N°.CXLIX.
Fig.120.
f
F
e
E
A
M
K
L
G
d
D
H
C
c
Fig.121.
E
A
P
O
D
Fig.122.
E
A
a
D
L
Fig.123.
R
L
A
D
Fig.125.
c
C
A
a
L
H
G
D
d
B
E
F
O

Huic itaque inconvenienti ut occurratur, proponitur ſequens Problema.

Invenire curvam, quæ ejus ſit proprietatis, ut corpus in illa ubicunque deſcendere incipiens ſemper æquali temporis ſpatio ad infimum curvæ punctum deſcendat.

Senſus hujus Problematis hic eſt, invenire curvam ABC, cujus axis AD eſt verticalis, ejus naturæ ut corpus B, a puncto quodam curvæ B deſcendens, æquali tempore pertingat ad A, ac ſi ab alio puncto C deſcendiſſet; id eſt, ſi duo corpora in punctis B, C poſita ſimul deſcendere incipiant, ut eodem temporis momento concurrant in imo puncto A.

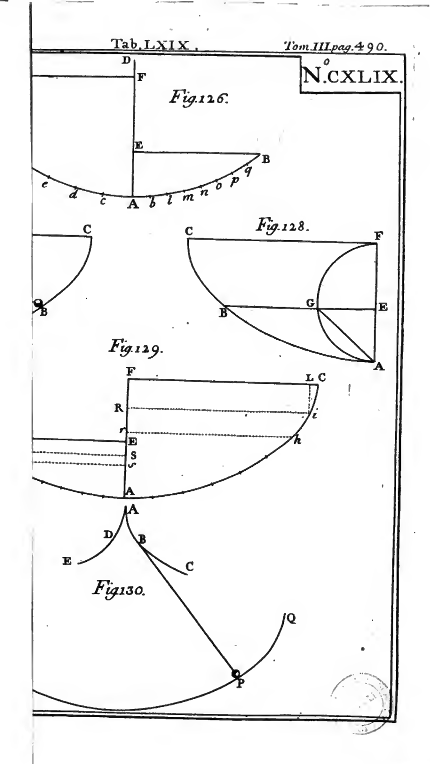
Ad hoc ſolvendum, eædem hypotheſes, quas in præcedentibus ſtatuimus, hic locum obtinent. Ut diviſiones minus intellectum perturbent, ponatur portio curvæ AB ad alteram partem; Dividatur AC in infinitas partes æquales Ac, cd, de, ef, fg &c. portio AB in totidem numero æquales Ab, bl, lm, mn &c. Hæc itaque curva hanc debet habere naturam, ut particula Ci eodem temporis momento percurratur, quo particula Bq, & ih eodem quo qp, hg eodem quo po, gf eodem quo on, & ita conſequenter; ſic enim tota CA eodem tempore abſolvetur quo BA. Hoc bene intellecto, quia portiunculæ Ab, Ac, æquali temporis momento percurruntur, erit celeritas in b ad celeritatem in c, ut bA ad cA, ut tota BA ad totam CA; proinde quadratum celeritatis in b ad quadratum celeritatis in c, ut quadratum BA ad quadratum CA; eſt autem quadratum celeritatis in b ad quadratum celeritatis in c, ut altitudo verticalis AE ad altitudinem verticalem AF; ergo quadratum AB ad quadratum AC, ut AE ad AF. Problema itaque mechanicum ad geometricum redactum eſt; quod eo recidit, ut inveniatur curva ABC, ita ut quadrata portionum quarumcunque AB, AC, ſint abſciſſis AE, AF proportionalia; id eſt $AB^2 : AC^2 = AE : AF$; proinde AB^2 ad AE in ratione conſtanti. Sit itaque ratio ut a ad 1, $AE = x$, $EB = y$, $AB = s$; proinde, per naturam inventam, erit $a : 1 = ss : x$, quæ proportio in æqua-

TAB. LXIX. Fig. 126.

TAB. LXIX. Fig. 127.

tionem redacta dat $ss = ax$; proinde $s = \sqrt{ax}$, eorumque differentialia $ds\ [\sqrt{(dx^2 + dy^2)}] = adx : 2\sqrt{ax}$. Sumantur quadrata $dx^2 + dy^2 = adx^2 : 4x$, vel $4xdx^2 + 4xdy^2 = adx^2$ & $4xdy^2 = adx^2 - 4xdx^2$, eorumque radices $dy\sqrt{4x} = dx\sqrt{(a - 4x)}$, ideoque $dy = dx\sqrt{(a - 4x)} : \sqrt{4x} = dx\sqrt{(\frac{1}{4}a - x)} : \sqrt{x} = (\frac{1}{4}a - x)\, dx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)} = (\frac{1}{8}a - x)\, dx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)} + \frac{1}{8}adx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$, ideoque sumptis integralibus $y = \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)} +$ integr. $\frac{1}{8}adx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$. Hoc autem integrale habetur, si fiat
TAB. LXIX. *Fig.* 128. semicirculus AGF cujus diameter $AF = \frac{1}{4}a$ & $AE = x$; erit arcus AG = integr. $\frac{1}{8}adx : \sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)}$; est autem etiam $\sqrt{(\frac{1}{4}ax - xx)} = EG$; proinde EB vel $y = EG + GA$, seu GA = GB; ex quo patet, quod curva AB sit Cyclois. Quod etiam manifestum esse potuit ante calculum ex hoc: Quoniam curva Cycloidalis AB est dupla rectæ AG, quadrata autem AG, quia sunt æqualia rectang: FAE, sunt in ratione abscissarum AE, proinde quoque quadrata portionum AB sunt in ratione abscissarum. Ex his nunc facile Synthetica demonstratio formari potest, quod nempe corpus in
TAB. LXIX. *Fig.* 129. Cycloide ubique æqualibus temporibus descendat. Sit enim Cyclois BAC & incipiant duo corpora descendere, unum in B, alterum in C; dico æquali tempore pervenire ista corpora ad A. Dividantur enim duæ portiones in infinitas partes numero æquales, & sit qp eo ordine in BA, quo ih in CA: Nunc ita argumentor: $FA : EA = CA^2 : BA^2 = ih^2 : qp^2 = Ai^2 : Aq^2 = AR : AS$, proinde $FA : EA = AR : AS$; ergo etiam FR vel Li : ES vel $Mq = ih^2 : qp^2$; est autem Li ad Mq, ut quadratum celeritatis in i ad quadratum celeritatis in q; proinde ih^2 ad qp^2 ut quadratum celeritatis in i ad quadratum celeritatis in q; adeoque ih ad qp, ut celeritas in i ad celeritatem in q; particula itaque ih eodem tempore percurritur quo qp. Quod demonstratum est de his duabus, de omnibus aliis pariter quoque demonstratur; proinde tota CA & tota BA eodem temporis spatio percurruntur. *Q. E. D.*

De-


N°. CXLIX.
Fig. 126.
D
F
E
B
q
p
o
n
m
l
b
A
c
d
e
C
Fig. 128.
C
F
G
E
B
A
Fig. 129.
F
L C
R
i
r
h
E
S
s
A
A
D
B
E
C
Fig 130.
Q
P

Demonſtratio hæc tanto apparatu non opus habuit, ſicut illa P. PARDIES, qui confuſum ſuum Chaos inventioni Dn. HUGENII ſuccinctè demonſtratæ adhucdum comparare voluit.

Hinc ſi commode efficere velimus ut oſcillationes fiant temporibus æqualibus, conſtruendæ ſunt duæ Cycloides æquales ABC, ADE, quarum axes ſint verticales, & filum æquale ſemicycloidi puncto A affigatur, cujus alteri termino appendatur pondus P, erunt oſcillationes ponderis P iſochronæ; nam per evolutionem Cycloidis ABC, vel ADE, deſcribitur alia Cyclois QPR, quæ proin temporibus æqualibus percurretur. TAB. LXIX. *Fig.* 130

LECTIO TRIGESIMA SEXTA.

De Curvis Funicularis vel Catenariis.

QUantum utilitatis Problema lineæ Catenariæ in Geometria obtineat, videre eſt ex tribus ſolutionibus *Actis Lipſienſibus* anni præteriti (*1691*) inſertis, & præcipue ex iis quæ Celeb: LEIBNITIUS ibi annotat. Primus qui de iſta curva a filo, vel potius catenula quæ non eſt extenſibilis, libere pendente formata cogitavit, fuit GALILÆUS; naturam autem ejus non penetravit, utpote qui Parabolam eſſe ſtatuit, quæ tamen minime eſt. *Joachimus* JUNGIUS, ut animadvertit Dnus. LEIBNITIUS, per calculum & multa experimenta inſtituta, comperiit non eſſe Parabolam; interim veram curvam non aſſignavit. Solutio itaque eximii hujus Problematis ad noſtrum uſque tempus reſervata fuit; quam, una cum calculo qui in *Actis* ſolutioni * non adjungitur, hic exhibemus. Curva interim catenaria duplex eſt, vel vulgaris, quæ formatur a filo vel catena æqualiter craſſa, ſeu in omnibus ſuis punctis æqualiter gravata; vel non vulgaris, quæ nempe formatur a filo inæqualiter craſſo, id eſt, quod in omnibus ſuis punctis inæqualiter eſt gravatum, & quidem in ratione appli-

* Vid. Nus. IV. pag. 48, *Tom. I.*

applicatarum alicujus curvæ datæ. Antequam solutionem aggrediamur, sequentia sunt præsupponenda, quæ ex Staticis facile demonstrari possunt.

1°. Filum, Funis, Catena, vel quicquid curvam repræsentat, supponitur in omnibus suis punctis flexile, & inextensibile, id est, quod ob gravitatem suam extensionem non patitur.

TAB. LXX. *Fig.* 131. 2°. Si in duobus punctis A & C quibuscunque curva Catenaria ABC sustinetur; potentiæ, quæ in punctis A & C requiruntur, erunt eædem quæ requiruntur ad sustinendum pondus D æquale ponderi catenæ ABC; & in concursu D duorum filorum nullius gravitatis AD, CD, curvam ABC in punctis A & C tangentium appensum. Ratio hujus est evidens; nam pondus catenæ ABC exerit virtutem suam in A & C secundum directionem, id est, secundum tangentes AD, CD, & ejusdem vel æqualis ponderis D tractio in A & C est etiam secundum rectas AD & CD: oportet itaque ut potentiæ requisitæ in punctis A & C sint in utroque casu eædem. Hinc potentia quæ requiritur in infimo puncto B habebitur, si quæratur potentia quam pondus E in eodem puncto exerit, sustentatum a duobus filis nullius gravitatis, quorum unum tangit curvam in B, & proinde est horizontale, alterum vero tangit in puncto A.

TAB. LXX. *Fig.* 132.

3°. Si catena duobus terminis A & C alligata in alio quovis puncto F figatur, ita ut pars AF auferri possit; curva, quam residua catena FBC repræsentat, non mutabitur; id est, reliqua puncta in eodem, quem ante fixationem habuerunt, situ manebunt.

TAB. LXX. *Fig.* 133.

Hoc demonstratione non indiget; ratio enim id suadet, & experientia quotidie ob oculos ponit.

4°. Iisdem positis quæ prius, ante & post fixationem in singulis curvæ punctis eadem, id est, pristina potentia requiritur, vel, quod eodem recidit, qua vi unum punctum ante fixationem trahitur, eadem vi trahetur post fixationem. Hoc nihil aliud est, quam Corollarium prioris. Hinc quantumcunque catena BFA, vel prolongetur, vel decurtetur, hoc est, ubicun-

que

que punctum fixationis F sumatur, potentia in infimo puncto B neque augebitur, neque diminuetur, sed semper manebit eadem & æqualis.

5°. Pondus P sustentatum a duobus filis AB, CB quomodocunque positis, hac proportione vires suas exerit in puncta A & C, ut potentia requisita in A sit ad potentiam requisitam in C, ut viceversa [ducta verticali BG] sinus anguli CBG ad sinum anguli ABG, & pondus P ad potentiam alterutram in C, ut sinus anguli totius ABC ad sinum anguli oppositi ABG. Hoc in quavis Statica demonstratur. TAB. LXX. *Fig.* 134.

His præsuppositis, curvam Catenariam vulgarem sic invenimus. Sit BAa curva quæsita, cujus infimum punctum B; axis, vel linea verticalis, transiens per B, BG; tangens in infimo puncto BE, quæ erit horizontalis; & in quocunque alio puncto A tangens AE. Ductis applicata AG & axi parallela EL, sit $BG = x$, $GA = y$, $Gg = dx$, $Ha = dy$; pondus catenæ, vel quia æqualiter crassa, longitudo curvæ $BA = s$. Quoniam itaque in puncto B semper æqualis & constans potentia requiritur [per hypoth. 4] sive catena BA continuetur, sive decurtetur; sit illa potentia, vel linea recta ipsam exprimens $C = a$. Intelligatur nunc pondus catenæ AB concentratum & appensum esse in concursu E filorum tangentium AE, BE, requiritur [per hypoth. 2] in puncto B, eadem potentia ad sustinendum pondus E, quæ antea requirebatur ad sustinendam catenam BA. Verum [per hypoth. 5] pondus E est ad potentiam in B, ut sinus anguli AEB, vel complementi ad duos rectos EAL, ad sinum anguli AEL, id est, ut EL ad AL: proinde ubicunque in curva punctum fixationis A sumatur [curva enim, per hypoth. 3, semper manet eadem] pondus catenæ AB est ad potentiam in B, ut EL ad AL, id est, $s : a = EL : AL = AH : Ha = dx : dy$, & inverse $dy : dx = a : s$. Ex quo patet quod curva Catenaria BA sit illa ipsa, cujus constructionem & naturam supra dedimus in Methodo tangentium inversa [Lect. XII.*] ubi prius proportionem hanc $dy : dx = a : s$ redegimus ad hanc æqua- TAB. LXX. *Fig.* 135.

* pag. 426, 427.

litatem

litatem $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$, & dein constructa fuit curva, per extensionem curvæ parabolicæ, ut & per quadraturam spatii hyperbolici.

LECTIO TRIGESIMA SEPTIMA.

Continuatio ejusdem argumenti. De Curvis funiculariis, sive Catenariis.

TAB. LXX. *Fig.* 136. UT veritas nostræ solutionis eo magis elucescat, examinabimus illam, an cum solutione Dni. LEIBNITII conveniat. Cujus constructio curvæ Catenariæ est talis: Sit NCP recta indefinita horizontalis, superque ea describatur curva Logarithmica OMBQ, cujus ideo subtangens ubique est æqualis seu constans; eligatur applicata CB, quæ subtangenti est æqualis, & sumptis hinc inde quomodocunque æqualibus CD, CP, fiat DA = dimidiæ summæ applicatarum DM, PQ; dicit punctum A esse in curva Catenaria BA. Ad disquirendum itaque, an hæc curva sit eadem cum nostra quam dedimus; videndum est, num natura curvæ BA per eandem æquationem differentialem exprimatur. Sit proinde CB, vel subtangens $= a$, $BG = x$, $GA = CD = y$, $DM = z$, $Gg = dx$, $Dd = Ha = dy$; erit, per naturam Logarithmicæ, $zdy = adz$, proinde $dz = zdy : a$. Quoniam per constructionem CD = CP; erit DM : CB = CB : PQ, ideoque $PQ = aa : z$, & $\frac{1}{2}$ DM + $\frac{1}{2}$ PQ, hoc est, per constructionem, $DA = (aa + zz) : 2z = CB + BG = a + x$; ergo $zz = 2az + 2xz - aa$; quæ æquatio si resolvatur dat $z = a + x + \sqrt{(2ax + xx)}$, proinde $dz = dx + (a + x)\, dx : \sqrt{(2ax + xx)}$. Substituto valore ipsius z in priore æquatione $dz = zdy : a$, proveniet $dx + (a + x)\, dx : \sqrt{(2ax + xx)} = (ady + xdy + dy\sqrt{(2ax + xx)}) : a$, vel $(adx\sqrt{(2ax + xx)} + aadx + axdx) : \sqrt{(2ax + xx)} = ady + xdy + dy\sqrt{(2ax + xx)}$, & diviso utroque per $a + x + \sqrt{(2ax + xx)}$ habetur $adx : \sqrt{(2ax + xx)} = dy$, quæ æquatio, quia eadem

eadem eſt cum illa quam nos invenimus, ſequitur quoque curvam B A eſſe noſtram Catenariam, & proinde conſtructionem *Leibnitianam*, utut diverſiſſimam ab illa quam ſupra dedimus, non tamen diverſam generare lineam.

Reſtat, ut egregias proprietates curvæ Catenariæ ſimplicis addamus, & quidem cum calculo & demonſtratione, quæ in *Actis* non exibita fuit. Adhibeatur Schema quod in *Actis* extſtat, in quo E B F eſt curva Funicularia, B ejus punctum infimum, B A axis, B G Hyperbola æquilatera, quam liceat generatricem appellare, B H Parabola per cujus extenſionem Catenaria E B F conſtructa eſt. TAB. LXX. *Fig.* 137.

1°. Ducta tangente FD, erit AF: AD = BC: BF curvam. Nam AF: AD = $dy : dx$; invenimus autem in calculo $dy : dx = a : s$. Ergo conſtat propoſitum.

2°. AE, vel AF, æquatur curvæ parabolicæ BH, dempta recta AG; hoc patet, quia per conſtructionem EG æqualis ſumpta fuit ipſi BH.

3°. Curva BE, vel BF, æqualis eſt rectæ AG, id eſt, portiones curvæ Funiculariæ ad axem applicatæ conficiunt Hyperbolam æquilateram: Inſignis eſt hujus curvæ proprietas. Hoc demonſtravimus in methodo tangentium inverſa *.

4°. Spatium funicularium BAE, vel BAF, eſt æquale rectangulo ſub B A & AF, diminuto rectangulo ſub CB & FG. Quoniam enim $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$, erit $xdy = axdx : \sqrt{(2ax + xx)} = (ax + aa)dx : \sqrt{(2ax + xx)} - aadx : \sqrt{(2ax + xx)} = (ax + aa)dx : \sqrt{(2ax + xx)} - ady$. Ergo Integr: xdy, id eſt, complementum ſpatii B A F eſt = Integr. poſterioris, quod eſt $a\sqrt{(2ax + xx)} - ay =$ CB×AG — CB×AF = CB×FG; ideoque ipſum ſpatium B AF = BA×AF — CB ×FG.

5°. Curva MNO, ex cujus evolutione deſcribitur Funicularia B E, eſt tertia proportionalis ad CB & AG. Ad hujus veritatem inveniendam, quæratur prius evolvens EO, quam generaliter in omnibus curvis æqualem eſſe $(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2}$ +

* Supra pag. 427, ſub finem.

$+ dy^2$) :— ddy supra in Articulo de evolutione curvarum* ostendimus. Hac itaque in curva $dx^2 + dy^2$ seu $ds^2 = (aa + 2ax + xx)\ dx^2 : (2ax + xx)$, & quoniam $dy = adx : \sqrt{(2ax + xx)}$ erit $ddy = (-aa - ax)\ dx^2 : (2ax + xx)\sqrt{(2ax + xx)}$. Invenitur itaque tota $(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : - ddydx^2$, seu $EO = (aa + 2ax + xx) : a$, a qua si auferatur illa quæ provenit ex suppositione $x = 0$, remanet $(2ax + xx) : a =$ curvæ MNO, id est a, vel CB: $\sqrt{(2ax + xx)}$ vel AG $=$ AG: MNO.

6°. Recta evolvens EO est tertia proportionalis ad CB & CA. Nam ob $EO = (aa + 2ax + xx) : a$, est a, seu CB: $a + x$, seu CA $=$ CA: EO.

7°. Recta BM usque ad principium curvæ MNO sumpta æquatur ipsi CB. Nam si $x = 0$, erit evolvens EO, quæ nunc est BM, $= a =$ CB.

8°. MP est dupla ipsius BA, quia $MNO = (2ax + xx) : a$, erit differentiale $Oo = (2a + 2x) dx : a$; sed triangulum Oop simile est triangulo SRE, ideoque etiam triangulo ERe; proinde Ee: ER $= Oo : po$; hoc est, $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(2ax + xx)}} : \frac{adx}{\sqrt{(2ax + xx)}} = \frac{2adx + 2xdx}{a}$: $2dx = po$, ejusque integrale $= 2x =$ PM.

9°. Rectangulum sub CB & PO duplum est spatii hyperbolici ABG. Nam quia $Ee : Oo = e$R$: p$O, hoc est, $\frac{adx + xdx}{\sqrt{(2ax + xx)}} : \frac{2adx + 2xdx}{a} = dx : \frac{2dx\sqrt{(2ax + xx)}}{a} = p$O, ergo CB $\times p$O $= 2dx\sqrt{(2ax + xx)}$, ejusque Integr. CB $\times$ PO $=$ duobus spatiis hyperbolicis ABG.

10° Recta CP bisecta est in puncto A. Quia enim MP $= 2x$, erit BP $= 2x + a$, BP — BA seu AP $= x + a =$ CA.

11°. Curva EB est ad curvam MNO ut recta CB ad rectam AG. Nam EB, id est, $\sqrt{(2ax + xx)}$: MNO, vel $\frac{2ax + xx}{a} = a : \sqrt{(2ax + xx)} =$ CB: AG.

* pag. 437.

12°.

12°. Si ad AG applicentur duo rectangula AI, AK, quotum unum AI ei quod sub semilatere tranverso CB & recta FG comprehenditur rectangulo, alterum AK, quod ipsi spatio hyperbolico BGA æquatur, & differentiæ latitudinum KI sumatur in axe a vertice B æqualis BL, erit punctum L centrum gravitatis curvæ Funiculariæ EBF. Hoc alibi demonstratur.

13°. Si super EF infinitæ intelligantur descriptæ curvæ ipsi Funiculariæ EBF æquales, illæque in rectas extendantur, & in singulis singulæ extensæ punctis applicentur rectæ ipsis respective distantiis a linea EF æquales, erit omnium spatiorum quæ sic efficiuntur illud, quod a Funicularia gignitur, maximum.

Hoc demonstratur per axioma illud, quod centrum gravitatis in tantum descendit quantum descendere potest.

LECTIO TRIGESIMA OCTAVA.

De Curvatura Funis inæqualiter crassi.

THeoria, quam adhibuimus in determinanda Catenaria simplici, facile accommodari potest ad alias ejusmodi curvas Catenarias vel Funicularias; quæ nempe generantur a funibus inæqualiter crassis, id est, in singulis suis punctis inæqualiter gravatis: oportet autem ut crassities ad longitudinem datam quandam relationem obtineat. Afferemus casum ubi relatio ista æquatione algebraica est exprimibilis, & Problema per simplicem curvam mechanicam solvi potest.

Sit figura curvilinea ABDEG proprietatis talis, ut applicata GE sit in reciproca dimidiata ratione abscissæ AG, hoc est, cujus natura [posito AG $= s$, GE $= t$, constans $= a$] exprimatur per hanc æquationem $a^3 = stt$, & concipiatur AG esse funem perfecte flexilem, & in omnibus suis punctis gravatum secundum rationem respective applicatarum GE, vel, quod tantundem est, in ratione differentialium applicatarum TAB. LXXI. Fig. 138.

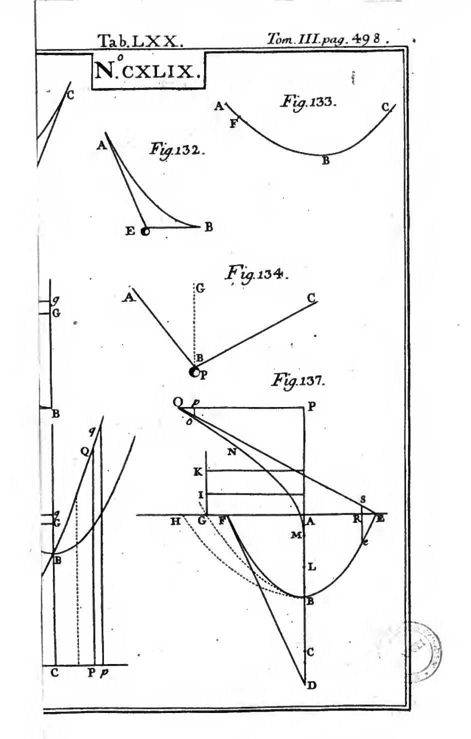
GH in Parabola AHI, aut denique portiuncularum curvæ cycloidalis AH [cujus vertex A] iſque ſic gravatus ſuſpendi intelligatur, ita ut punctum A ſit omnium infimum, quod fit ubi connexum habuerit a parte A alium funem ejuſdem longitudinis, & in æqualibus a puncto A diſtantiis æqualiter gravatum. Quæritur qualem curvam funis AGC hac ſuſpenſione formaturus ſit?

TAB. LXXI. *Fig.* 139. Sit curva quæſita AEe, AI $= x$, IE $= y$, I$i = dx =$ HE, H$e = dy$, curva AE $= s$; oportet nunc, ut gravitas vel pondus curvæ AE, vel, quod idem eſt, in priori figura ſpatium ABDEG, quod invenitur ſumpto integr: ex tds, id eſt, ex $ds\sqrt{(a^2 : s)}$, ſic itaque hujus integr: $2\sqrt{a^3 s}$, eſt æquale, vel potius denotat pondus funis AE: ſed hoc pondus eſt ad potentiam conſtantem in A, ut ſinus anguli LEF ad ſinum anguli LFE, ut LF ad LE, ut HE ad He; hoc eſt, $2\sqrt{a^3 s} : aa = dx : dy$, vel $4s : a = dx^2 : dy^2$; vel denique, ſi litteram a vocemus $4a$, $s : a = dx^2 : dy^2$. Curva itaque AE eſt illa cujus conſtructionem exhibuimus in Methodo tangentium inverſa *, ubi proportionem hanc $s : a = dx^2 : dy^2$, in hanc æquationem mutavimus $dy\sqrt{(yy - 4aa)} = 2adx$. Conſtructio autem fuit talis:

TAB. LXXI. *Fig.* 140. Ductis normalibus FB, AC, ſumptaque BA $= 2a$, centro A & vertice B deſcribatur Hyperbola æquilatera BD; ducatur AG parallela BF; erit ſumpto rectangulo AH æquali ſpatio hyperbolico BDI, punctum occurſus E in curva Funicularia quæſita. Notandum autem eſt, quod curvæ initium immutabile ſit in puncto A, quoniam, ob $\sqrt{(yy - 4aa)} =$ ID, Hyperbolæ initium ibi eſt. Si itaque libeat illud ſumere in puncto B, oportet ut y appelletur $y + 2a$; & ſic æquatio $dy\sqrt{(yy - 4aa)} = 2adx$ convertetur in hanc $dy\sqrt{(yy + 4ay)} = 2adx$. Longitudo hujus curvæ ita invenitur: $dx = dy\sqrt{(yy + 4ay)} : 2a$, ergo $dx^2 = (yy + 4ay)\, dy^2 : 4aa$, proinde $dx^2 + dy^2 = (yy + 4ay + 4aa)\, dy^2 : 4aa = ds^2$; ideoque $ds = (y + 2a)\, dy : 2a$, & s, vel curva BE, $= (yy + 4ay) : 4a$. Ex quo patet quod curva BE ſit tertia proportionalis ad rectum vel tranſverſum latus Hyperbolæ, & applicatam ejus ID.

* Supra pag. 429, Art. VI.

Spa-


N°. CXLIX.
Fig. 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 137.
A
E
B
F
C
G
P
Q
p
o
N
K
I
H
M
L
D
S
R
e
q

Spatium funicularium BHE sic determinatur, $dx = dy \sqrt{(yy + 4ay)} : 2a$; proinde $ydx = ydy \sqrt{(yy + 4ay)} : 2a = (y + 2a) dy \sqrt{(yy + 4ay)} : 2a - 2a\, dy \sqrt{(yy + 4ay)} : 2a = (y + 2a) dy \sqrt{(yy + 4ay)} : 2a - dy \sqrt{(yy + 4ay)}$. Integrale prioris membri est $= (yy + 4ay) \sqrt{(yy + 4ay)} : 6a = ID^3 : 6a$; posterioris vero = spatio hyperbolico BDI; ideoque spatium $BHE = ID^3 : 6a$, minus spatio hyperbolico BDI.

Tangens curvæ EL ita habetur; $dy : dx = HE : HL$, quia vero $dx = dy \sqrt{(yy + 4ay)} : 2a$, erit $dy : dx = 2a : \sqrt{(yy + 4ay)}$; ergo $HE : HL = 2a : \sqrt{(yy + 4ay)}$. Sumenda itaque est HL quarta proportionalis ad semilatus rectum, abscissam HE vel BI, & applicatam ID.

Egregia hujus curvæ BE proprietas non est omittenda; est enim hæc Funicularia BE eadem cum illa, ex cujus evolutione Catenaria simplex vel vulgaris describitur. Ad hoc demonstrandum apponatur figura ultima Lect: præc:, & insuper centro C & vertice M describatur alia Hyperbola æquilatera MX. TAB. LXXI. *Fig.* 141. Ostensum ibi est, quod CM semidiameter Hyperbolæ MX sit dupla ipsius CB semidiametri Hyperbolæ BG; item quod abscissa MP sit dupla abscissæ BA; ergo, ob similitudinem Hyperbolarum, spatium hyperbolicum MPX æquale est quatuor spatiis hyperbolicis BAG: ibidem autem ostendimus, quod rectangulum sub CB & PO sit duplum spatii hyperbolici BAG, ergo rectangulum sub CM & PO ejusdem spatii hyperbolici erit quadruplum; ideoque æquale spatio hyperbolico MPX: proinde curva MO est eadem quæ in priori figura BE; utrobique enim rectangulum sub semidiametro Hyperbolæ & applicata est æquale correspondenti spatio hyperbolico.

LECTIO TRIGESIMA NONA.

Continuatio ejusdem argumenti. De Curvatura Funis inæqualiter crassi.

Rationem crassitiei vel gravaminum funis, aut catenæ inæqualium, in præced: Lect: consideravimus tanquam figuram planam curvilineam ad funem in rectum extensum, ceu ad axem, applicatam, cujus figuræ quælibet applicata denotabat gravationem puncti in fune correspondentis. Considerabimus nunc funem jam habere suam curvaturam, & rationem gravaminum determinari per figuram quandam planam super applicata curvæ Funiculariæ erectam, cujus figuræ applicata quælibet designet gravitatem portiunculæ indefinite parvæ in fune correspondentis. Ut differentia harum duarum hypothesium eo melius percipiatur, res per schema explicanda est: In præcedenti Lectione funis A G consideratus est tanquam primo in rectam lineam extensus, qui in singulis suis portiunculis ut Bb inæqualiter est gravatus, & quidem in ratione applicatarum B C alicujus datæ figuræ curvilineæ E C F, & dein suppositum est unum funis punctum A esse fixum in α, alterum vero G elevari in γ, donec linea horizontalis transiens per α curvam in eodem puncto tangat; sic itaque gravationes particularum Bb vel βG secundum applicatas B C, in fune A B G certam quandam producent curvaturam $\alpha\beta\gamma$, quæ diversa est pro ratione curvæ E C F. Naturam harum curvarum $\alpha\beta\gamma$ determinandi modum tradidimus in Lect: præced. Nunc supponemus funem A B G gravitate sua formare curvam A B G, cujus vertex vel punctum infimum A, axis A E, applicata B H, & ipsi parallela G E; super quo tanquam axe data est curva E C F; particulæ funis Bb gravatæ sunt in ratione applicatarum correspondentium C L. Sit A H $= x$, HB vel E I $= y$, C L $= t$, pondus portionis catenæ A B, vel spatium quod illud

TAB. LXXI. Fig. 142. & 143.

TAB. LXXI. Fig. 144.

illud exprimit, ELC $= p$; potentia conſtans in A $= aa$. His ita poſitis, facile ad cognitionem curvæ AB in terminis generalibus pervenitur: Eſt enim in omnibus curvis Catenariis, ut dx ad dy, ita pondus catenæ AB ad potentiam conſtantem in A; hoc eſt, $dx : dy = p : aa$, proinde $pdy = aadx$, & integr: $pdy = aax$; ex quo patet, quod ſi quadratura ſpatii ELC innoteſcat, curva ABG ſit plerumque geometrica, etiamſi curva ECF ſit mechanica; tunc enim valor ipſius p in puris y exprimi poteſt; adeo ut exinde plerumque integrale ſumi queat quantitatis pdy. Sit. v. g. ECF linea recta & parallela ipſi EG; CL $= b$; proinde ſpatium ELC vel $p = by$ & $pdy = bydy$; hujus itaque integrale $\frac{1}{2} byy = aax$ vel $yy = 2aax : b$; quod oſtendit curvam ABG eſſe Parabolam cujus parameter $= 2aa : b$.

Sit nunc ECF linea recta angulum faciens in E cum linea EG; ratio EL ad CL ut a ad b; proinde CL $= by : a$, ſpatium ELC $= byy : 2a = p$, ideoque $pdy = byydy : 2a$, hujus integrale $by^3 : 6a = aax$ vel $y^3 = 6a^3 x : b$; ideoque curva ABG eſt Parabola cubicalis prima cujus parameter $\sqrt{(6a^3 : b)}$.

Si ECF ſit Parabola, ejuſque parameter $= b$, proinde CL $= \sqrt{by}$, & ſpatium ECL $= \frac{2}{3} y \sqrt{by}$, erit $pdy = \frac{2}{3} y dy \sqrt{by}$, ideoque ejus integrale $\frac{4}{15} yy \sqrt{by} = aax$, vel $\frac{16}{225} by^5 = a^4 xx$, proinde curva ABG eſt ſpecies Parabolarum ſecundarum. Pari modo oſtenditur quod ſi ECL ſit complementum vel trianguli, vel ſemiparabolæ communis, vel ſemiparabolæ cubicalis primæ &c. quod, inquam, curva Funicularia ABG ſit vel Parabola cubicalis, vel biquadratica, vel ſurdeſolidalis &c.

Si nunc viceverſa natura curvæ Funiculariæ data eſt, quæritur curva ECF, hoc eſt, ſi funis vel catena præſcriptam quandam curvam formare debeat, quæritur in qua ratione ſingula illius puncta ſint oneranda. Sit ut prius AH $= x$, HB vel EL $= y$, CL $= t$, ſpatium ELC $= p$; potentia conſtans in A $= aa$: quibus poſitis pervenietur ad eandem æquationem $pdy = aadx$. Quia autem nunc quæritur CL, dividendum utrumque eſt per dy & erit $p = aadx : dy$, ſumptis utrobique

 diffe-

differentialibus dp vel $tdy =$ differ. $(aadx : dy)$ proinde $t = d(aadx : dy) : dy$; quo concludendum, quod quotiescunque Catenaria ABG est geometrica, curva ECF etiam sit geometrica: nam quia relatio inter x & y datur, poterit quantitas $aadx : dy$ dari in quantitatibus definitis; proinde diff. $d(aadx:dy)$ erit simplex differentiale, quod divisum per dy, dabit iterum quantitatem definitam vel algebraicam. Sit ex. gr, ABG Parabola, ejus parameter $= a$, proinde $x = yy : a$ & $dx = 2ydy : a$; ergo $aadx : dy = 2ay$, & $d(aadx : dy) = 2ady$, proinde $d(aadx : dy) : dy = 2a = t =$ CL; & ideo ECF est linea recta, & parallela ipsi EG. Sit itaque quod antea supposuimus, nunc per suppositionem inversam idem invenimus.

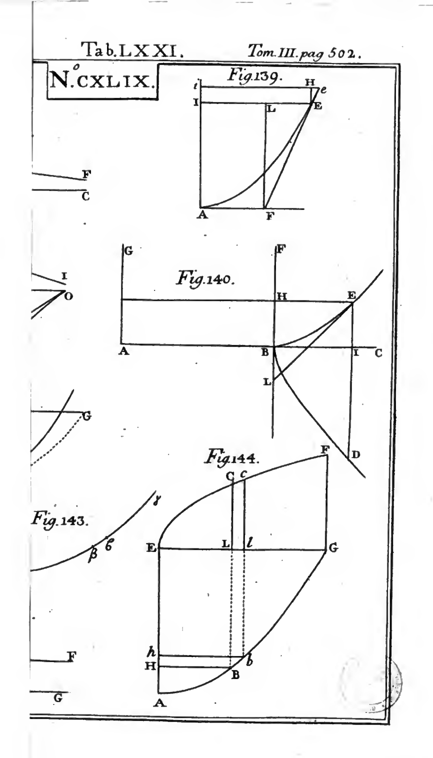
Sit ABG circulus, cujus centrum E, radius AE vel EB $= a$, erit AH vel $x = a - \sqrt{(aa - yy)}$, & $dx = ydy : \sqrt{(aa - yy)}$; ergo $aadx : dy = aay : \sqrt{(aa - yy)}$, ejusque different. $a^4 dy : (aa - yy)\sqrt{(aa - yy)}$; quo diviso per dy, provenit $a^4 : (aa - yy)\sqrt{(aa - yy)} = t =$ CL.

Hinc si $y = a$, id est, si punctum B sumatur in G, erit t vel CL infinita, ideoque pondusculum particulæ Bb, quod est in G, infinities majus esse debet, quam reliquarum pondiscula: hinc evenit ut directio primæ particulæ sit verticalis, tangens enim in G parallela est axi EA.

LECTIO QUADRAGESIMA.

Continuatio ejusdem argumenti. De Curvatura Funis inæqualiter crassi.

SOlutio non difficilior evadit, si gravamina particularum funis sint in ratione applicatarum correspondentium figuræ ad axem appositæ. Sit enim curva quædam Funicularia
TAB. LXXII. ABG, cujus punctum infimum A, axis AE, particu-
Fig. 145. læ curvæ Bb onerantur in ratione applicatarum, vel potius parallelogrammorum correspondentium Cb figuræ ACF ad axem


N°. CXLIX.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 144.
Fig. 143.
t
H
e
I
E
L
A
F
G
F
H
E
A
B
I
C
L
D
F
C
c
E
L
l
G
h
b
H
B
A
β
ϐ
γ
O

axem AE appositæ. Sit, ut in præcedentibus, $AH = x$, $HB = y$, $CH = t$, spatium AHC [quod pondus designat catenæ AB] $= p$, potentia constans in infimo puncto $A = aa$. Hoc præliminato, sic pervenitur ad naturam curvæ ABG. Quia, ceu sæpius dictum, ut dx ad dy, ita pondus catenæ AB ad potentiam constantem in A, seu quod idem est $dx : dy = p : aa$, erit $pdy = aadx$, proinde $dy = aadx : p$, eorumque integralia, $y =$ integr. $(aadx : p)$.

Si linea ACF est recta & parallela axi AE, erit $p = ax$, ideoque $aadx : p = adx : x = dy$, vel $adx = xdy$; quod ostendit curvam Catenariam ABG esse Logarithmicam cujus subtangens $= a$.

Sit nunc ACF linea recta angulum faciens in A, cum axe AE; ratio AH ad HC, ut a ad b, proinde $HC = bx : a$; spatium $AHC = bxx : 2a = p$; ideoque $aadx : p = 2a^3 dx : bxx$; hujus integrale $- 2a^3 : bx = y$; quod indicat curvam Catenariam a BG esse Hyperbolam, sed ab altera parte positam, ob quantitatem negativam y; quod semper accidet quotiescunque curvæ ACF vertex est in A; curva enim a BG una ex Hyperboloidibus erit, sed ex adverso posita, cujus asymptotarum una est verticalis, altera vero horizontalis. TAB. LXXII. Fig. 146.

Cum autem a CF est ex Hyperbolicarum genere, erit Catenaria ABG curva cujus vertex in A. Si ex. gr. aCF est talis ut CH, vel t, sit $= aa : \sqrt{ax}$, erit spatium aCHA vel $p = 2a\sqrt{ax}$, proinde $aadx : p = adx : 2\sqrt{ax}$, ejusque integrale $\sqrt{ax} = y$; ex quo patet, quod curva Funicularia ABG sit in hoc casu Parabola, cujus parameter $= a$. TAB. LXXII. Fig. 147.

Problematis inversi solutio etiam nullo negotio habetur. Si nempe ex cognita natura curvæ Funiculariæ ABG invenienda sit curva a CF. Positis quæ prius, $AH = x$, $HB = y$, $CH = t$, spatium $AHC = p$, potentia constans in $A = aa$. Quia itaque $dx : dy = p : aa$, erit $p = aadx : dy$, eorumque different. dp seu $tdx = d(aadx : dy)$; ideoque $t = d(aadx : dy) : dx$; ex quo itidem patet quod, existente curva ABG geometrica, curva a CF etiam sit geometrica.

Sit

Sit ex. gr. ABG Parabola, parameter $= a$, proinde $y = \sqrt{ax}$ & $dy = adx : 2\sqrt{ax}$, ergo $aadx : dy = 2a\sqrt{ax}$, ejusque differ. $= aadx : \sqrt{ax}$; proinde $d(aadx : dy) : dx = aa : \sqrt{ax} = t =$ CH; ideoque curva a CF eadem est quam antea suppofuimus ad inveniendam Catenariam ABG.

Sit nunc ABG Circulus, radius $= a$, ergo $y = \sqrt{(2ax - xx)}$ & $dy = (a - x) dx : \sqrt{(2ax - xx)}$, erit $aadx : dy = aa\sqrt{(2ax - xx)} : (a - x)$ & $d(aadx : dy) = a^4 dx : (a - x)^2 \sqrt{(2ax - xx)}$; proinde $d(aadx : dy) : dx = a^4 : (a - x)^2 \sqrt{(2ax - xx)} = t =$ HC.

Antequam materiam hanc de curvis Catenariis deferamus; solutionem cujusdam curvæ ad Mechanicam pertinentis adjungamus, quam eandem esse cum Catenaria simplici deprehendi. Sit vectis indefinite protensus AE, cujus hypomochlion C: sit in extremitate A brachii CA appensum pondus P; sumptaque CB æquali ipsi AC, quæritur qualis debeat esse curva BFG, ita comparata, ut si in vecte CE ad quodcunque punctum D appendatur pondus Q æquale ponderi P, illiusque directio sit secundum planum RS tangens curvam BFG in puncto F in quod cadit applicata DF, [id quod effici potest si filum DHQ transeat per appositam trochleam H] ut, inquam, pondus Q hoc in statu æquiponderet ponderi P. Sit CA vel CB $= a$, BD $= x$, DF $= y$, curvæ portio BF $= s$, pondus P vel Q $= p$; ductis ST horizontali & RT verticali, delineetur separatim triangulum rst simile triangulo RST. Intelligatur super rs deorsum tendere pondus q æquale Q, cui contra nitatur X verticaliter descendens. Si hæc duo pondera æquilibrantur, manifestum est, ex mechanicis, quod q sit ad X ut rs ad rt, seu ut RS ad RT, ut ds ad dy, proinde $X = qdy : ds =$ Q$dy : ds$; quia itaque momentum ponderis X verticaliter descendentis æquale est momento ponderis q oblique descendentis in plano rs; si ad punctum D directe appendi intelligatur pondus X $=$ ponderi X, erit punctum D tantundem oneratum a pondere X directe descendere conante, quantum oneratum est a pondere Q, cujus directio est obliqua; ideoque

TAB. LXXII. *Fig.* 148. & 149.

quia

quia pondus Q æquiponderare supponitur ponderi P; erunt etiam pondera X & P in æquilibrio: sed quia utriusque ponderis directio est verticalis, erit $AC \times P = DC \times X$, id est, $ap = (aQdy + xQdy) : ds = (apdy + xpdy) : ds$; vel diviso per p, & multipl. per ds, $ads = ady + xdy$; eorumque quadrata $aads^2$ vel $aadx^2 + aady^2 = aady^2 + 2axdy^2 + xxdy^2$; & $aadx^2 = 2axdy^2 + xxdy^2$; tandemque $adx = dy\sqrt{(2ax + xx)}$ vel $adx : \sqrt{(2ax + xx)} = dy$; ex quo liquet curvam BFG esse Catenariam vulgarem cujus centrum C.

LECTIO QUADRAGESIMA PRIMA.

De Curvatura Funis extensibilis.

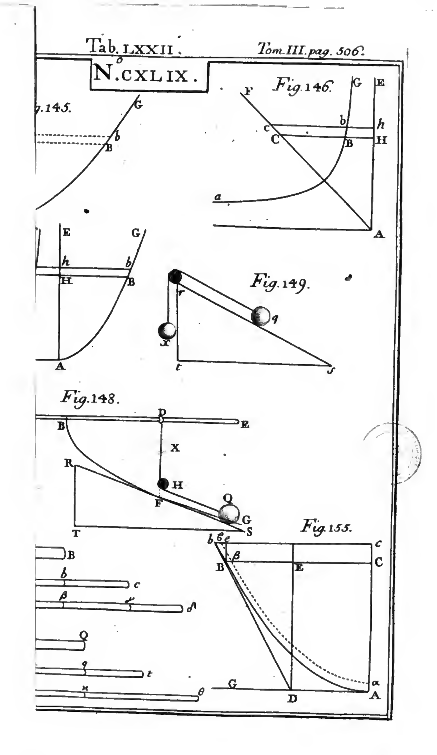
Omnia, quæ hactenus diximus de curvis Funiculariis vel Catenariis, supposuerunt catenam vel funem non esse extensibilem, id est, non esse obnoxium extensioni, quam propria gravitas causari potest. Sit nunc funis, uniformis quidem crassitiei, at a pondere suo extensibilis; quæritur qualem formaturus sit curvam? Diversa namque erit ab illa, quæ formatur a fune uniformiter crasso, sed inextensibili. Ad hoc solvendum, præter ea quæ supra supposuimus pro Catenariis in genere, supponendum est LEIBNITII axioma, extensiones nempe viribus tendentibus esse proportionales; hoc est, si AB sit funis non extensus, abc idem funis extensus ab una vi, $a\gamma\delta$ idem funis extensus ab alia vi; erit bc excessus prioris extensi supra non extensum AB ad $\gamma\delta$ excessum posterioris extensi supra non extensum AB, ut prior vis ad posteriorem vim. Hoc præsupposito, vocetur portio funis non extensi PQ, cujus ponderi æquipollet vis constans & tendens imum funis punctum, a; basis vel crassities funis PR, 1; & excessus qt, quo portio hæc a dicta vi extensa non extensam superat, b; crassities itaque funis extensi pr habetur multiplicato PR per PQ & diviso per pt, ideoque $pr = 1a : (a + b) = a : (a + b)$. Sit curva quæsita AB$b$,

TAB. LXXII. Fig. 150. 151. 152.

TAB. LXXII. Fig. 153. & 154.

TAB. XXII. Fig. 155. quam format funis uniformiter crassus libere pendens & a gravitate sua extensus $AB\beta\alpha$, qui ob inæqualem tensionem in singulis suis punctis evadit inæqualiter crassus; consideratur tamen crassities tanquam infinite parva. Sit $AC = x$, $CB = y$, longitudo curvæ $AB = s$, Cc vel $Be = dx$, $be = dy$, $Bb = ds$ [intelligantur puncta B & b, respondere ad curvam in medio expressam, peculiares enim literæ vitandæ confusionis gratia apponi non potuerunt,] ducantur tangentes AD, BD, axique parallela DE. Quia itaque, per hypotheses in præcedentibus assumptas, potentia constans in A est ad potentiam in B, ut sinus anguli BDE ad sinum anguli EDA, id est, ad sinum totum; ergo potentia in B ad potentiam in A, ut BD ad BE, ut bB ad be, seu ds ad dy; quia itaque potentia constans in A

TAB. LXXII. Fig. 154. 155. 156. posita est $= a$, erit potentia in $B = ads : dy$. Quærenda nunc est in puncto B crassities funis $B\beta$, quod ita peragitur. Potentia a est ad potentiam $ads : dy$, ut extensio qt, vel b, (*Fig.* 154) ad extensionem $\kappa\theta$ (*Fig.* 156), quæ itaque erit $= bds : dy$, totaque $\pi\theta = (ady + bds) : dy$; ideoque RQ divisum per $\pi\theta$, id est $\pi\varrho$ vel ipsi æqualis $B\beta = ady : (ady + bds)$, proinde $B\beta \times Bb$, id est, different. funis vel ponderis funis $= adyds : (ady + bds)$. Quia vero sinus anguli BDE est ad sinum anguli BDG vel DBE, ut potentia in A ad pondus totum funis, id est, BE ad DE vel dy ad dx, ut a ad $adx : dy =$ ponderi funis, erit differ. $d(adx : dy) = ady\,ds : (ady + bds)$. Sed [posito dy constante] $d(adx : dy) = addx : dy$; ergo $addx : dy = adyds : (ady + bds)$ & $adyddx + bddx \surd (dx^2 + dy^2) = dy^2 \surd (dx^2 + dy^2)$; diviso utroque per ds, vel per $\surd (dx^2 + dy^2)$ provenit $adyddx : \surd (dx^2 + dy^2) + bddx = dy^2$, &, ut integralia sumi possint multiplicetur ubique per dx, sicque habebitur $adydxddx : \surd (dx^2 + dy^2) + bdxddx = dy^2 dx$. Sumantur integralia, & erit $ady \surd (dx^2 + dy^2) + \frac{1}{2} bdx^2 = xdy^2$ vel $2ady \surd (dx^2 + dy^2) = 2xdy^2 - bdx^2$; eorum quadrata $4aady^2 dx^2 + 4aady^4 = 4xxdy^4 - 4bxdy^2 dx^2 + bbd^4$; reducta æquatione provenit $dy^4 = (4aadx^2 dy^2 + 4bxdx^2 dy^2 - bbdx^4) : (4xx - 4aa)$; ergo $dy^2 = ((2aa + 2bx) dx^2 + 2adx^2$ $\surd (aa +$


N.° CXLIX.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 149.
Fig. 148.
Fig. 155.
G
b
B
F
E
h
H
C
a
A
x
r
q
t
s
D
X
R
Q
T
S
c
β
δ
θ
α

$\sqrt{(aa+2bx+bb)}):(4xx-4aa)$ & $dy=\sqrt{(aa+bx+a\sqrt{(aa+2bx+bb)})}dx:\sqrt{(2xx-2aa)}$.

Invenitur alia quantitas, quæ tamen eadem eſt, quærendo dx, quia nempe $4aadx^2dy^2+4aady^4=4xxdy^4-4bxdy^2dx^2+bbdx^4$, erit $dx^4=(4aadx^2dy^2+4bxdy^2dx^2+4aady^4-4xxdy^4):bb$; proinde $dx^2=((2aa+2bx)dy^2\pm 2ady^2\sqrt{(aa+2bx+bb)}):bb$, ideoque $dy^2=bbdx^2:(2aa+2bx\pm 2a\sqrt{(aa+2bx+bb)})$ & $dy=bdx:\sqrt{(2aa+2bx\pm 2a\sqrt{(aa+2bx+bb)})}$. Curva itaque AB$b$ deſcribi poteſt, mediante quadratura alicujus ſpatii curvilinei, cujus applicata [ſi abſciſſa eſt x] eſt vel $=a\sqrt{(aa+bx+a\sqrt{(aa+2bx+bb)})}:\sqrt{(2xx-2aa)}$, vel $=ab:\sqrt{(2aa+2bx-2a\sqrt{(aa+2bx+bb)})}$; hæ enim duæ quantitates eædem ſunt.

LECTIO QUADRAGESIMA SECUNDA.

De Curvatura fili ex preſſione fluidi.

AD curvas Funicularias ſeu Catenarias, quas hucuſque tractavimus, merito referri poſſunt curvæ fluidorum, hoc eſt, illæ curvæ, quas induit quævis materia flexilis, tanquam nullius gravitatis conſiderata, ut velum, linteum, filum, & alia hujuſmodi, quæ impetum venti, impulſum cujuſdam fluidi, vel ejuſdem quieſcentis gravitatem ſuſtinent. In indagatione harum curvarum duo obſervanda ſunt. Primum eſt directio virium venti allabentis, vel cujuſcunque fluidi ſtagnantis, & in ſubjectum velum vel linteum gravitantis; directio enim hæc non verticalis eſt in ſingulæ curvæ punctis, ſicuti in curvis Catenariis ABC, in qua cujuſlibet particulæ DE gravitas efficit ut verticaliter deſcendere nitatur, ſecundum directionem DF, vel EG, quæ ſunt parallelæ axi curvæ BH. In curvis autem fluidorum abc, directio particulæ curvæ de ubique variat; ſemper quippe tendens ſecundum df, vel eg, quæ ſunt perpendiculares ad curvam abc, in ipſis punctis d vel e; nam ventus im-

TAB. LXXIII. Fig. 157. 158.

impellens, vel fluidum gravitans, neque verticaliter, neque horizontaliter, sed perpendiculariter in curvam agit. Hoc cuivis manifestum erit, si modo consideretur quod globus L, si moveatur in linea recta LS, & oblique impingat in corpus MN, quod, inquam, propellat hoc corpus MN, secundum lineam SQ transeuntem per punctum contactus S & per centrum globi; id est, secundum lineam, quæ est perpendicularis ad rectam MN.

TAB. LXXIII. *Fig.* 159.

Alterum quod est observandum est, quod ventus allabens, cum post impulsum aliorsum evadere potest, non ea vi, qua irruit, subjectam particulam secundum perpendicularem ad curvam protrudat, sed vi imminuta, quæ erit ad vim venti absolutam, ut sinus anguli inclinationis venti ad sinum totum. Si vero ventus post allapsum non evadit; manifestum est tota sua vi agere in subjectam particulam, illamque protrudere secundum perpendicularem ad curvam vi non imminuta. Patet enim, quod si globus L post ictum aliorsum deflectatur, major vis ad retinendum corpus MN non requiratur, quam quæ est ad vim absolutam globi impingentis L, ut perpendicularis MP ad MS, seu, quod idem est, ut sinus anguli MSP ad sinum totum. Si vero globus post ictum manere cogitur, necessario tota vis globi absoluta requiritur in S ad ipsi resistendum, hoc est, qua vi globus L versus S movetur, eadem corpus MN versus SQ propelletur. Suppono autem hic corpus MN nullam habere gravitatem, vel resistentiam passivam, sed cuicunque potentiæ allabenti facillime obsequi & cedere, absque ut potentia allabens de vi sua perdat. Quæ cum ita se habeant, ad naturam hujusmodi curvarum ita pervenitur. Quærenda prius est vis, qua quælibet particula curvæ perpendiculariter extrorsum versus pellitur: sit ex. gr. Bb particula curvæ, quæ pellatur secundum perpendicularem BC, & quidem vi quæ exprimatur per ipsam BC; hæc autem vis componitur ex duabus aliis, quarum una est horizontalis BD, & altera verticalis BE; quæ nempe exprimuntur per latera rectanguli DE, cujus diagonalis est BC; sic itaque singulæ potentiæ BC, bc,

TAB. LXXIII. *Fig.* 160.

bc

bc &c. perpendiculares ad curvam A*b*B dividi possunt in duas alias æquivalentes BE & BD, *be* & *bd* &c. quarum una est verticalis, & altera horizontalis; proinde curva A*b*B respectu potentiarum verticalium est species Catenariæ directæ, sed respectu horizontalium erit species Catenariæ inversæ, cujus nempe punctum infimum est in B. Hoc interim verum est, quod in quocunque puncto *b* curva A*b*B figatur, semper æqualis potentia in A requiratur, ut in Catenariis vulgaribus; nam per fixationem curvæ situs non mutatur. Ea igitur, quæ supra dicta sunt de curvis Catenariis, etiam hic quadrant; si videlicet omnes potentiæ verticales colligantur in unam, & omnes horizontales in aliam, & istæ duæ summæ applicentur in concursu duorum filorum AH, BH, curvam AB tangentium in punctis A & B, ita ut directio summæ verticalium sit verticalis, id est, secundum verticalem HM, & directio summæ horizontalium sit horizontalis, id est, secundum horizontalem HA, & tunc potentia, quæ requiritur in A ad sustinendas duas istas potentias in H, erit æqualis potentiæ, quæ requiritur ad curvam AB in situ tenendam; proinde æqualis potentiæ constanti: Hæc autem ita invenitur, si fiat ut sinus anguli *b*HL, vel H*b*M, ad sinum anguli *b*HM, id est, ut HM ad *b*M, vel ut dx ad dy, ita summa potentiarum verticalium appensa in H, ad quartam quandam; cui si adjungatur summa potentiarum horizontalium appensa in H secundum directionem AH [punctum enim A illam summam totam sustinet,] erit aggregatum æquale potentiæ requisitæ in A, id est, æquale constanti. In reliquis deinde procedendum est ut supra, & summæ difficultas consistet in sumendis integralibus. Exempla quædam in sequentibus afferemus.

TAB. LXXIII. Fig. 161.

TAB. LXXIII. Fig. 162.

LECTIO QUADRAGESIMA TERTIA.

De Curvatura Veli a Vento inflati.

PRima harum curvarum quæ ſeſe ſpeculationi offerunt eſt curvatura Veli a vento inflati ; quæritur itaque , ſi Velum in hoc ſtatu ſecetur plano verticali , ſectio iſta qualis ſit curva ? Ad hoc ſolvendum , duæ hypotheſes neceſſario formandæ ſunt; aut quod globuli venti poſt allapſum evadant & aliorſum deflectantur ; aut quod non evadant, & ſiſtantur in punctis in quibus impegerunt. Poteſt quidem eſſe ut in inferiori Veli parte ſecunda hypotheſis, in ſuperiori vero prima valeat; hoc autem rem difficiliorem non reddit. Nam ſi Problema juxta utramque hypotheſin ſolverimus ; dicendum erit Velum in hac parte hanc curvaturam , in alia aliam induere. Conſideremus ergo primo poſteriorem hypotheſin , ut pote quæ propoſitum facilius expedit. Per ea quæ ſupra dicta ſunt patet quod , ſecundum hanc hypotheſin , ſingulæ particulæ æquales in curva æquali vi premantur, perpendiculariter ad curvam ; nam particulæ æquales in curva globulos numero æquales recipiunt , quorum quilibet æqualiter premit : Ideoque ſumptis [in fig: 161] Bb, bb &c. æqualibus , erunt BC, bc, bc, &c: etiam æquales. Sit $AF = x$, $FB = y$, $AB = s$, $Ff = dx$, $BG = dy$, Bb, vel $Bc = ds$; quia ang: $cBe + Bce =$ recto $= cBb$, erit $Bce = eBb = BbG$; proinde triang: cBe & BbG ſunt ſimilia & æqualia ; proinde $Be = BG = dy$, & ce, ſeu BD, $= Gb = dx$; ergo omnes Be, id eſt, omnes potentiæ verticales ſimul ſumptæ $= y$, & omnes BD, id eſt, omnes potentiæ horizontales ſimul ſumptæ $= x$; ideoque fiat , ut dx ad dy ita y ad quartam , quæ proin erit $= ydy : dx$; huic ergo adjungatur x ſecundum ea quæ ſupra docuimus, & habebitur $ydy : dx + x = a$ potentiæ conſtanti in A; reducta itaque æquatione provenit $ydy + xdx = adx$, & ſumptis integralibus $\frac{1}{2} yy + \frac{1}{2} xx = ax$, vel $yy + xx = 2ax$,

TAB. LXXIII. Fig. 163.

$= 2ax$, vel $yy = 2ax - xx$; quod oftendit curvam AB effe Circulum, cujus radius $= a$; quod etiam ante calculum manifeftum effe potuit ex hoc, quoniam fi curva ubique æqualiter fecundum perpendiculares ad curvam extrorfum trahitur, nulla ratio eft, cur unum curvæ punctum magis vel minus a centro diftare debeat quam alterum. Calculum autem confulto appofuimus, ut pateat quod fundamenta quibus infiftimus veritati refpondeant, & confirment ea quæ de curvis Catenariis dicta jam funt, & quæ in pofterum de curvis fluidorum dicentur.

Supponamus nunc globulos venti poft allapfum evadere: ex hac fuppofitione ante omnia fequitur, quod eodem temporis momento ad curvæ particulam Bb plures globuli appellere non poffint, quam qui intercipiuntur in latitudine BG duarum parallelarum directioni venti QB & PG. Quia autem finguli globuli æquali vi pelluntur, erit vis conjuncta globulorum in ratione latitudinis BG, feu dy; appelletur ergo illa vis dy, hæc autem, quia globuli poft ictum deflectuntur, non tota agit in particulam Bb, fed imminuta, quæ [per id quod dictum eft in Lect: præced:] eft ad totam ut BG ad Bb: fiat ergo ut Bb ad BG, id eft, ds ad dy, ita vis tota, feu dy, ad imminutam, quæ itaque erit $dy^2 : ds =$ BC. TAB. LXXIII. Fig. 164.

Sed ob fimilitudinem triangulorum Bce & BGb, Bb eft ad BG, ut Bc ad Be, id eft, ad potentiam verticalem, quæ itaque invenitur $= dy^3 : ds^2$. Per eandem rationem invenitur BD, id eft, potentia horizontalis, $= dy^2\, dx : ds^2$, ideoque omnes potentiæ verticales fimul fumptæ $=$ integr. $(dy^3 : ds^2)$ & omnes horizontales fimul fumptæ $=$ Integr. $(dy^2\, dx : ds^2)$. Fiat ergo dx ad dy ut integr. $(dy^3 : ds^2)$ ad quartam, quæ erit $\frac{dy}{dx} \times$ integr. $(dy^3 : ds^2)$, cui fi addatur integr: $(dy^2\, dx : ds^2)$, habebitur $\frac{dy}{dx}$ int. $(dy^3 : ds^2)$ + int. $(dy^2\, dx : ds^2) = a$, potentiæ conftanti in A; fumptis ubique differentialibus [pofito

TAB. LXXIII. Fig. 165.

ds.

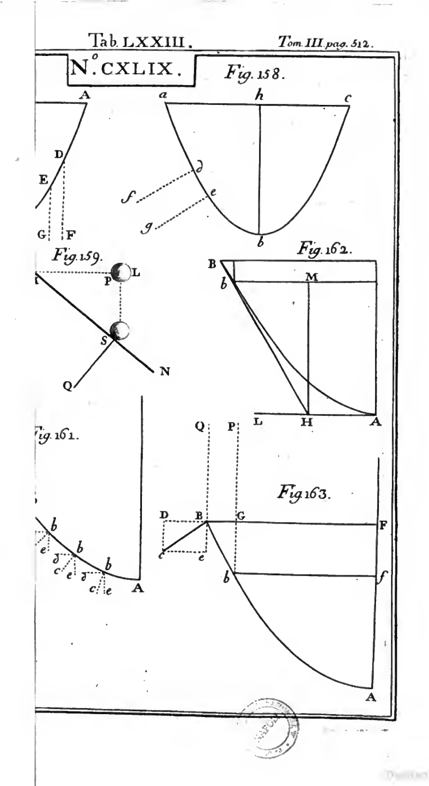
$ds =$ const: id est, $dds = o$] $\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$ integr: ($dy^3 : ds^2$) $+ dy^4 : dxds^2 + dy^2\ dx : ds^2 = o =$ (ob $dy^2 + dx^2 = ds^2$) $\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$ integr: ($dy^3 : ds^2$) $+ dy^2 : dx$; multipl. per $dx^2\ ds^2$ erit ($dx\ ddy - dyddx$) integr: $dy^3 + dxdy^2\ ds^2 = o$; quoniam autem $dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$, erit $ddy = - dxddx : dy$; substituatur ergo valor ipsius ddy, & multiplicetur per dy, provenit ($- dx^2\ ddx - dy^2\ ddx$) integr: $dy^3 + dxdy^3\ ds^2 = o$, vel [ob $dx^2 + dy^2 = ds^2$] $- ds^2\ ddx$. integr. $dy^3 + dx\ dy^3\ ds^2 = o$, ideoque ddx. integr. $dy^3 = dxdy^3$, id est, $ddx : dx = dy^3$: integr. dy^3. Si ulterius progredi velimus & tollere signum integralitatis; ponatur integr. $dy^3 = m$, proinde $dy^3 = dm$; item $dx = n$, proinde $ddx = dn$: æquatio ergo inventa convertetur in hanc $mdn = ndm$, vel $mdn - ndm = o = (mdn - ndm)$: mm, ejus itaque integrale, quod est $n : m$, vel [substituto valore ipsius n & m], dx: integr. $dy^3 =$ quantitati constanti b; ideoque $dx : b =$ integr. dy^3, eorumque different. $ddx : b = dy^3$. Ut autem utrobique quantitatum sit æqualis dimensio, sit $b = 1 : ads$ [ds enim est constans] & sic habebitur $adsddx = dy^3$. Verum cum in Methodo tangentium inversa, Lect: 13 * ostenderimus curvam, cui competit hæc æquatio, esse Catenariam simplicem, sequitur curvam Catenæ & curvam Veli, supposita prima hypothesi, esse easdem.

LECTIO QUADRAGESIMA QUARTA.

De Curvatura Lintei a fluido incumbente.

A Problemate de curvatura Veli non multum abludit Problema de curvatura Lintei formata a gravitate liquoris in illo stagnantis. Hoc autem in casu, certiori fundamento inniti possumus, quam in præcedenti: certi quippe sumus, quod secunda hypothesis hic valeat; globuli enim liquoris, qui immediate subjectum linteum contingunt, utpote quiescentes, evadere

* pag. 428, Art. V.


N°. CXLIX.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 161.
Fig. 162.
Fig. 163.
A
D
E
G
F
a
h
c
b
f
g
e
L
P
S
N
Q
B
M
H
b
e
c
D
G

evadere nequeunt; ideoque numerus globulorum qui unam particulam curvæ occupant ut B*b*, est ad numerum qui aliam occupant ut *bb*, in ratione ut ipsa particula B*b* ad particulam *bb*; globuli enim, cum evadere non possint, perfecte contigui sunt. Si itaque particulæ B*b*, *bb*, sunt æquales, erunt etiam numeri globulorum æquales. Quilibet autem globulus, tota sua vi premit perpendiculariter in subjectam particulam, per ea quæ in præcedentibus dicta sunt; verum hæc vis est in ratione altitudinis respective liquoris, id est, vis globuli B est ad vim globuli *b*, ut altitudo liquoris BR ad altitudinem ejusdem *b*S; ideoque si particulæ B*b* & *bb* sunt æquales & indefinite parvæ, erit vis qua premitur particula B*b* ab omnibus adjacentibus globulis, ad vim qua premitur particula *bb* ab omnibus adjacentibus, ut altitudo BR ad altitudinem *b*S: si vero particulæ sunt inæquales, erunt vires prementes [intellige perpendiculariter in curvam] in ratione composita ex ratione altitudinum liquoris & ex ratione particularum. TAB. LXXIV. *Fig.* 165.

Quod hucusque rationibus physicis demonstratum est, nunc experimento comprobabimus.

Sit Vasculum cujuscunque figuræ curvilineæ ABC, plenum liquore usque ad AC, & ad aperturam alicubi factam DE adaptetur perpendiculariter ad curvam ABC tubus ubique æqualiter crassus DHGIE. Si tubus iste eodem liquore ad eandem altitudinem impleatur, nempe ad GH; manifestum est quod liquor in vasculo & alter in tubo æquiponderabunt; id est, quod vis liquoris exeundi ex vasculo sit æqualis vi ejusdem exeundi ex tubo. Quia autem tubus EIGHD est perpendicularis ad curvam, erit etiam vis qua liquor in tubo agit in particulam DE perpendicularis ad eandem; sed ob æqualem crassitiem tubi, vis illa habetur ex multiplicatione altitudinis GI, vel FL, in basin vel crassitiem tubi DE; ergo etiam vis liquoris in vasculo, qua agit in particulam DE, composita est ex ratione altitudinis & ex ratione ipsius particulæ DE, sicut antea. TAB. LXXIV. *Fig.* 166.

Hoc præmonstrato, ad cognitionem curvæ quæsitæ eodem fere modo quo antea pervenitur.

TAB. LXXIV. Fig. 167. Sit ABS curva quæsita, AL altitudo liquoris summa $= a$, $AF = x$, $FB = y$, $AB = s$, $Ff = dx = Gb$, $BG = dy$, $Bb = ds$; erit itaque vis qua premitur perpendiculariter particula Bb, & quæ repræsentatur per lineolam Bc, $= RB \times Bb = ads - xds$: ob similitudinem triangulorum Bce & BGb, est $Bb : BG = Bc : Be$, id est, $ds : dy = ads - xds : ady - xdy = Be =$ potentiæ verticali; proinde integr. $(ady - xdy) =$ summæ potentiarum verticalium; & quia $Bc : ce$ vel $BD = Bb : Gb$; invenitur BD, vel potentia horizontalis $= adx - xdx$, hujusque integr. $[ax - \frac{1}{2}xx] =$ summæ potentiarum horizontalium; fiat nunc, ut dx ad dy ita integr.$(ady - xdy)$ ad quartam, quæ proinde erit $= \frac{dy}{dx}$ integr. $(ady - xdy)$, cui si adjungatur $ax - \frac{1}{2}xx$, erit aggregatum $\frac{dy}{dx}$ int. $(ady - xdy) + ax - \frac{1}{2}xx =$ potentiæ constanti in A; sumptis differentialibus [posito $ds =$ constanti, id est $dds = 0$] erit $\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$ integr. $(ady - xdy) + (ady^2 - xdy^2) : dx + adx - xdx = 0$; quia autem $dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$, est $ddy = - dxddx : dy$; substituto ergo valore ipsius ddy in æquatione inventa, provenit $\frac{- dx^2 ddx - dy^2 ddx}{dy dx^2}$ [vel quia $dx^2 + dy^2 = ds^2$] $\frac{- ds^2 ddx}{dy dx^2} \times$ integr. $(ady - xdy) + (ady^2 - xdy^2 + adx^2 - xdx^2) : dx$ vel [ob eandem rationem] $(ads^2 - xds^2) : dx = 0$. Reducta æquatione, invenitur $adydx - xdydx = ddx$ integr. $(ady - xdy)$. Ad ulterius progrediendum, & signum integralitatis tollendum, ponatur $dx = m$, proinde $ddx = dm$; & integr. $(ady - xdy) = n$, proinde $ady - xdy = dn$. Per hanc positionem æquatio inventa mutabitur in hanc $mdn - ndm = 0 = (mdn - ndm) : mm$; ejus ergo integrale, quod est $n : m$, vel [substituto valore ipsius n & m] int. $(ady - xdy) : dx$

$dx =$ quantitati conſtanti $aa : ds$; ideoque integr. $(ady - xdy) = aadx : ds$, eorumque differ. $ady - xdy = aaddx : ds$, vel $adx - xdx = aadxddx : ds\sqrt{(ds^2 - dx^2)}$. Eorum ergo integralia $ax - \frac{1}{2}xx = - aa\sqrt{(ds^2 - dx^2)} : ds = - aady : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sumantur quadrata $aaxx - ax^3 + \frac{1}{4}x^4 = a^4dy^2 : (dx^2 + dy^2)$ & $(aaxx - ax^3 + \frac{1}{4}x^4) \times (dx^2 + dy^2) = a^4dy^2$; tranſpoſitis tranſponendis, & extractis radicibus, habetur $axdx - \frac{1}{2}xxdx = dy\sqrt{(a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$ & tandem $dy = (ax - \frac{1}{2}xx)dx : \sqrt{(a^4 - aaxx + ax^3 - {}_4x^4)}$; ex hoc patet, quomodo curva quæſita ſit conſtruenda, ope quadraturæ alicujus ſpatii curvilinei.

LECTIO QUADRAGESIMA QUINTA.

Conſtructio Curvæ lintcariæ.

CONſtructio curvæ præcedentis ad quadraturam Hyperbolæ ita reduci poteſt. Cum ſupra poſuimus int. $(ady - xdy) : dx =$ quantitati conſtanti $aa : ds$, poſſumus loco $aa : ds$ univerſaliter ponere $bb : ds$, & ſic perveniemus ad hanc æquationem $dy = (ax - \frac{1}{2}xx)dx : \sqrt{(b^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$. Pro littera itaque b quæcunque quantitas conſtans ſubſtitui poteſt; ponatur ergo $b^4 = \frac{1}{4}a^4$, ut habeatur hæc æquatio $dy = (ax - \frac{1}{2}xx)dx : \sqrt{(\frac{1}{2}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$ vel $ady = (aax - \frac{1}{2}axx)dx : \sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$. Ut hæc æquatio abbrevietur, ſumatur initium loci quæſiti alibi, id eſt, ponatur $x = a + m$, erit $dx = dm$, & $ax - \frac{1}{2}xx = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}mm$; proinde $\sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)} = \sqrt{(\frac{1}{2}aamm - \frac{1}{4}m^4)}$ & tota quantitas $(aax - \frac{1}{2}axx)dx : \sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - aaxx + ax^3 - \frac{1}{4}x^4)}$ ſeu $ady = \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}amm)dm : m\sqrt{(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}mm)} = (a^3 - amm)dm : m\sqrt{(2aa - mm)} = a^3dm : m\sqrt{(2aa - mm)} - amdm : \sqrt{(2aa - mm)}$; ergo integr. ady, hoc eſt $ay =$ int. $(- amdm : \sqrt{(2aa - mm)})$ [hoc eſt $a\sqrt{(2aa - mm)}$] $+$ int. $(a^3dm : m\sqrt{(2aa - mm)})$. Quia autem integrale hujus quantitatis haberi nequit, poteſt

 ſal-

ſaltem redigi ad quadraturam Hyperbolæ; id quod ita peragitur. Ponatur $m = aa : n$, proinde $dm = - aadn : nn$, & $\sqrt{(2aa - mm)} = \sqrt{(2aann - a^4)} : n$; ergo tota quantitas $a^3 dm : m\sqrt{(2aa - mm)} = a^3 dn : \sqrt{(2aann - a^4)} = - aadn : \sqrt{(2nn - aa)} = - aadn \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{(nn - \tfrac{1}{2} aa)}$, ideoque int. $(a^3 dm : m\sqrt{(2aa - mm)}) =$ int. $(- aadn \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{(nn - \tfrac{1}{2} aa)})$. Facta ergo Hyperbola æquilatera A B C, cujus vertex A, centrum E, axis A D, ſemidiameter tranſverſa E A $= a \sqrt{\tfrac{1}{2}}$; ſi abſcindatur ED $= n$, erit, ductis DB & EB, ſpatium hyperbolicum E A B $=$ int. $(\tfrac{1}{4} aadn : \sqrt{(nn - \tfrac{1}{2} aa)})$, ideoque $2\sqrt{2}$ ſpat. E A B $=$ int. $(aadn \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{(nn - \tfrac{1}{2} aa)})$; quia autem $m = aa : n$ erit $n = aa : m$, ſumenda itaque eſt E D $= aa : m$; eritque $2\sqrt{2}$ ſpat. hyperbolic. E A B $=$ int. $(- a^3 dm : m\sqrt{(2aa - mm)})$; proinde in æquatione ſupra inventa ſubſtituto valore integralis, provenit $ay = a\sqrt{(2aa - mm)} - 2\sqrt{2}$ ſpat. hyperb. E A B. Ex quo curva quæſita ſic conſtruitur: Sint G H, G L normales, & producatur L G ad F, ita ut G F ſit $= a$; fiat F M parallela ipſi G H, ſumpta ad libitum G K $= m$, accipiatur E D (in priore figura) $aa : m$, & fiat rectangulum F H $=$ different. ſpatiorum $a\sqrt{(2aa - mm)}$ & $2\sqrt{2}$ ſpat. hyperb. E A B; hoc facto producatur M H, quæ parallelæ K I occurrat in I, erit punctum occurſus I in curva quæſita L I.

TAB. LXXIV. Fig. 168. & 169.

LECTIO QUADRAGESIMA SEXTA.

De curvitate radii ſolaris vel viſivi, per medium inæqualiter denſum tranſeuntis.

NOtum eſt, & experientia conſtat, quod radius ſolaris, vel viſivus, procedat in linea recta, ſi medium per quod tranſit eſt uniformiter denſum. Si vero idem radius ex hoc medio incidat in aliud magis vel minus denſum, experientia oſtendit radium in ipſo incidentiæ puncto a directione viæ inceptæ declinare & rumpi ad perpendicularem, ſi medium in quod

quod incidit eſt denſius; ſed a perpendiculari, ſi rarius: hoc eſt, ſi radius CB a medio ABD incidat in aliud medium denſitate a priori diverſum ABF; radius incidens non ſecundum rectam CBG procedet, ſed ſecundum CBE fractam in puncto B; ita ut BE accedat magis ad perpendicularem BF, ſi medium ABF eſt denſius medio ABD, ſed ab eadem recedat, ſi medium ABF eſt rarius medio ABD. Supponemus nunc, quod Dnus. HUGENIUS in Tractatu ſuo *De lumine* demonſtravit, nempe ſinum anguli incidentiæ & ſinum anguli refractionis eſſe in reciproca ratione denſitatum mediorum; id eſt, ſumptis CB, BE æqualibus, & demiſſis a punctis C, E perpendicularibus CD, EF, denſitatem medii ABD eſſe ad denſitatem medii ABF ut EF ad CD. Liquet igitur ex his omnibus, quod radius Solis, tranſiens per Atmoſphæram noſtram aëream, vel per aliud medium inæqualiter denſum, recta linea non ſit; medium quippe cum in ſingulis altitudinibus denſitatem mutet, neceſſario radium in ſingulis punctis frangit; ita ut radius perfectam curvaturam induat. Suppoſita itaque & cognita ratione denſitatum medii, quæritur natura curvaturæ radii? Sit ABE medium, cujus denſitates ſint in ratione applicatarum curvæ GHIKD; LB radius incidens ex medio uniformiter denſo ABL, cujus denſitas exprimitur per rectam GB primam applicatam curvæ GHIKD; BSF radius in curvam formatus, cujus natura ſic invenitur: Per principium Dioptricum a Dno. HUGENIO demonſtratum, HN eſt ad IO ut ſinus anguli ZRS [RSX] ad ſinum anguli TRV, & IO eſt ad KP ut ſinus anguli $\alpha S \beta$ [$S \beta \gamma$] ad ſinum anguli RSX; ergo perturbate, HN eſt ad KP, ut ſinus anguli $S\beta\gamma$ ad ſinum anguli TRV, & ſic de omnibus reliquis. Eo itaque reductum eſt Problema, ut inveniatur curva BF, cujus ſinus inclinationis ad perpendicularem ſint reciproce ut ordinatim applicatæ curvæ datæ GHIKD.

TAB. LXXIV. *Fig.* 170.

TAB. LXXIV. *Fig.* 171.

Sit ergo $BN = x$, $NH = z$, $NR = y$; DE, quæ conſtans & ad libitum aſſumta eſt, $= a$; ſint Rr, Ff æquales; quia itaque HN debet eſſe ad DE, ut ſinus anguli WFX ad ſinum anguli TRV, vel ut ſinus anguli MFf ad ſinum anguli ZRr, id

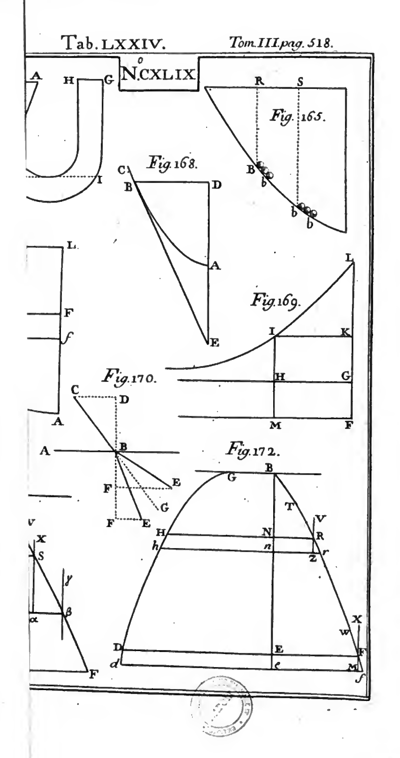
TAB. LXXIV. *Fig.* 172.

id est [ob $Ff = Rr$] ut Mf ad Zr; id est, ex rationibus applicatæ EF ad tangentem in F, & tangentis in R ad applicatam RN. Quoniam autem ratio applicatæ EF ad tangentem in F est constans, sit EF ad tangentem in F ut b ad a, & [positis $RZ = dx$, $Zr = dy$, $Rr = ds$] erit HN ad DE seu z ad $a = b : a + ds : dy = bds : ady$; proinde $bds = zdy$ vel $b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = zdy$; sumptisque quadratis $bbdx^2 + bbdy^2 = zzdy^2$, transpositis transponendis & reducta æquatione $bdx = dy\sqrt{(zz - bb)}$, vel $bdx : \sqrt{(zz - bb)} = dy$, ideoque $y =$ integr. $(bdx : \sqrt{(zz - bb)})$; ex quo patet, quod interdum contingere possit, ut curva quæsita BRF sit geometrica, si nempe integrale sumi potest ex quantitate $bdx : \sqrt{(zz - bb)}$. Si ex. gr. curva GHD est Parabola, erit $zz = ax + bb$, vel generaliter $zz = cx + fc$, & sic poterit sumi integrale ex $bdx : \sqrt{(zz - bb)}$, quod monstrabit curvam quæsitam radii iterum esse Parabolam. Si GHD est linea recta, erit curva quæsita mechanica, cujus natura dependet a quadratura Hyperbolæ.

Si Problema hoc inverse proponatur; id est, ex data natura curvæ BRF invenire naturam curvæ GHD, id est densitates medii; res multo facilior est: nam quotiescunque curva BRF est geometrica, BGHD semper etiam erit geometrica: siquidem supra invenimus $b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = zdy$, poterit dx reddi in quantitatibus dy, vel vice versa, per cognitam curvæ naturam; & sic utrumque æquationis membrum dividi poterit per dx vel dy; adeo ut valor ipsius z in quantitatibus pure finitis & algebraicis haberi possit.

Sit ex. gr. BRF Parabola cujus parameter $= b$, erit $x = yy : b$, proinde $dx = 2ydy : b$, & $dx^2 = 4yydy^2 : bb$, ideoque $b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = bdy\sqrt{(4yy : bb + 1)} = zdy$, & reducta æquatione $4yy + bb = zz$; ponatur loco $4yy$ ejus valor $4bx$, provenit $4bx + bb = zz$; quæ æquatio ostendit curvam GHD esse Parabolam.

LECTIO


N.º CXLIX
Fig. 165.
Fig. 168.
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 172.
A
H
G
I
L
F
f
A
C
B
D
A
E
R
S
B
b
b
b
L
I
K
H
G
M
F
C
D
A
B
E
F
G
F
E
B
G
T
V
H
N
R
h
n
r
z
X
w
D
E
F
d
e
M
f
X
S
γ
α
β
F

LECTIO QUADRAGESIMA SEPTIMA.

De Quadratura & Rectificatione universali spatiorum & curvarum per series infinitas.

Ostensum est in Calculo integralium *, quod cujuscunque spatii vel curvæ, quorum differentiale exprimitur per quantitatem, quæ producitur ex multiplicatione differentialis quantitatis absolutæ per absolutam, vel per absolutam ad quamcunque potestatem elevatam, haberi possit quadratura vel rectificatio. Est enim integrale $cx^{c-1}dx\sqrt[a]{(x^c+f)} = \frac{a}{a+1}(x^c+f)\sqrt[a]{(x^c+f)}$. Ex eodem etiam Calculo patet, quod etiamsi differentiale spatii vel curvæ exprimatur per quantitatem quæ non producitur ex multiplicatione differentialis quantitatis absolutæ per absolutam, vel per absolutam ad quamvis potestatem elevatam, nihilominus tamen interdum quadratura vel rectificatio innotescere possit. Exemplum ibi attulimus quantitatis $x^b dx\sqrt{(a+x)}$, cujus datur integrale †, ut ut ipsa quantitas non proveniat ex multiplicatione differentialis quantitatis absolutæ per absolutam, vel per eandem ad quamcunque potestatem elevatam: mentionem autem ibidem non fecimus [licet id directe concludere potuissemus] quod integrale admittat generalis quantitas $x^{c-1+mc}dx\sqrt[a]{(x^c+f)}$, quæ nempe producitur ex multiplicatione differentialis quantitatis absolutæ per absolutam ad quamcunque potentiam elevatam, & insuper per x elevatum ad potestatem quandam mc, quæ est multipla potestatis c. Cujus demonstrationem, quia omisimus, nunc adjungemus. Primo demonstrari potest, eodem modo quo demonstratum in Calculo integralium quantitatem $x^b dx\sqrt{(a+x)}$ admittere integrale; nempe per additionem novarum quantitatum: dein aliter ita demonstramus: sit $\sqrt[a]{(x^c+f)} = y$, erit

x^c

* pag. 388. † pag. 390.

$x^c+f=y^a$ & $x^c=y^a-f$; eorumque differentialia $cx^{c-1}\,dx = ay^{a-1}\,dy$, vel $x^{c-1}dx=\frac{a}{c}\,y^{a-1}\,dy$; quia autem $x^c = y^a-f$, erit $x^{mc}=(y^a-f)^m$, ideoque productum x^{mc} in $x^{c-1}\,dx$, erit æquale producto $(y^a-f)^m$ in $\frac{a}{c}\,y^{a-1}\,dy$; hoc est $x^{c-1+mc}dx=\frac{a}{c}y^{a-1}dy\,(y^a-f)^m$; multiplicetur prius membrum per $\sqrt[a]{(x^c+f)}$ & posterius per y, & habebitur $x^{c-1+mc}\,dx\sqrt[a]{(x^c+f)}=\frac{a}{c}y^a dy\,(y^a-f)^m$. Quoniam vero m supponitur numerus integer, patet quod integrale quantitatis $\frac{a}{c}y^a dy\,(y^a-f)^m$ per partes haberi possit; ideoque etiam substituto valore ipsius y, habebitur integrale quantitatis propositæ $x^{c-1+mc}\,dx\sqrt[a]{(x^c+f)}$. *Q. E. D.*

Ex his liquet, quod Dn. GREGORI per suas series abrumpentes demonstravit, quod scilicet quantitatis $x^n dx\sqrt[e]{(x^c+f)}$ integrale haberi possit, tunc cum $(n+1):c$ est numerus integer. In nostra enim expressione $c-1+mc$ est $=n$, cui si addatur unitas provenit $c+mc=n+1$, quod si dividatur per c erit $(n+1):c=(c+mc):c=1+m=$ numero integro: ergo &c.

Sic itaque absque seriebus idem præstitimus quod Dn. GREGORI, qui antequam ad integrale pervenisset, necessario quantitatem differentialem in series convertere debebat. Quod spectat generalem expressionem Dni. GREGORI quantitatis $ax^n dx\,(bx^c+f)^m$, in qua littera n quamcunque potestatem denotat, sive $(n+1):c$ sit numerus integer sive non integer; patet interim, si m est numerus integer, nullam difficultatem esse in sumendo integrali quantitatis $ax^n dx\,(bx^c+f)^m$; si vero sit numerus fractus, integrale ad imitationem Dni.

GRE-

GREGORII exhibebimus per Series infinitas. In anteceſſum autem demonſtrandum eſt ſequens

LEMMA. Si ſint duæ Series figuratæ immediate ſibi ſubſequentes, & ſit ubique ſumma terminorum primæ ad totidem maximo æqualium ut 1 ad r, erit & ubique ſumma terminorum ſecundæ ad totidem maximo æqualium ut 1 ad $r+1$.

$$n\left\{\begin{array}{cc} a & o \\ b & f \\ c & g \\ d & h \\ e & i \\ & k \end{array}\right.$$

Demonſtratio: Sit a, b, c, d, e, &c. ſeries quæcunque figurata cujus numerus terminorum ſit n, & ſeries ſubſequens o, f, g, h, i, k. Eſt per naturam ſerierum figuratarum, & per hypotheſin, $k+i+h+g+f+o = \frac{ne}{r} + \frac{(n-1)d}{r} + \frac{(n-2)c}{r} + \frac{(n-3)b}{r} + \frac{(n-n+1)a}{r} =$ [connexis correſpondentibus] $\frac{n(e+d+c+b+a)}{r}$. [per naturam ſerierum] $\frac{nk}{r}, \frac{-i-h-g-f-o}{r}$, ideoque multiplicato utroque per r, erit $rk + r(i+h+g+f+o) = nk-i-h-g-f-o$, & reducta æquatione invenitur $nk - rk = (r+1)\times(i+h+g+f+o)$, dividatur utrumque per $r+1$, addaturque dein utrique k, habebitur $\frac{(n+1)}{r+1}k = k+i+h+g+f+o$ &c. *Q. E. D.*

COROLL: Liquet exinde cujuslibet Seriei figuratæ quamlibet ſummam terminorum habere ad totidem maximo æqualium rationem conſtantem.

Series enim unitatum, quæ eſt prima omnium figuratarum, habet hanc proprietatem requiſitam; ſequitur itaque ex demonſtratis ſecundam ſeriem eandem proprietatem habere, & ex ſecunda demonſtratur tertiam, ex tertia quartam, ex quarta quintam &c: & ita de ceteris. *Q. E. D.*

LECTIO QUADRAGESIMA OCTAVA.

Continuatio ejusdem argumenti.
De quadraturis & rectificationibus per Series infinitas. Series exprimens binomium ad potentiam indeterminatam elevatum.

His prædemonstratis, quantitas proposita differentialis $ax^n dx\ (bx^c + f)^m$ convertenda est in Seriem, ex cujus terminis singulis integrale haberi potest; quod aliam Seriem progenerat, cujus summa æqualis est integr. $ax^n dx\ (bx^c + f)^m$. Quomodo autem invenienda sit Series æqualis $ax^n dx\ (bx^c + f)^m$ id hoc modo peragitur. Notum est, quod numeri caracteristici cujusdam binomii ad certam quandam dimensionem elevati sint numeri laterales eodem dimensionis ordine Serierum figuratarum verticaliter positarum: ut si A B C D E &c.

		A	B	C	D	E
F	0	1	0	0	0	0
G	1	1	1	0	0	0
H	2	1	2	1	0	0
I	3	1	3	3	1	0
K	4	1	4	6	4	1

sint Series verticales numerorum figuratorum, quarum prima A est Series unitatum, secunda B Series numerorum naturalium, tertia C Series numerorum trigonalium, quarta D pyramidalium, quinta E triangulo-pyramidalium, & ita consequenter, erunt Series laterales FGHIK Series numerorum caracteristicorum binomii ad dimensiones elevati; quarum prima F exponit caracteristicos si dimensio binomii est 0, secunda G si dimensio binomii est 1, tertia H si dimensio est 2, quarta I si dimensio est 3, quinta K si dimensio est 4 & sic deinceps. Per numerum caracteristicum intelligo numerum illum, cum quo quidam terminus binomii ad dimensionem elevati multiplicatur: Si ex. gr. binomium $p + q$ ad tres dimensiones elevandum sit, observo trium dimensionum caracteristicos,

risticos, qui sunt 1, 3, 3, 1; proinde sumo $1p^3+3ppq+3pqq+1q^3$, quod est cubus binomii $p+q$, vel $p+q$ ad tres dimensiones elevatum, & sic de ceteris. Sic itaque binomium ad quamcunque dimensionem elevari potest, si modo caracteristici innotescant; qui quidem per continuationem Seriorum figuratarum facile haberi possunt, si numerus dimensionum est determinatus. Si vero sit indeterminatus, id est, per litteram algebraïcam exprimatur, caracteristici per continuationem Serierum figuratarum inveniri non possunt; Series enim nunquam eo pertingunt: ideoque quia ab inventione caracteristicorum universali totum præsens negotium dependet, aliter sic quærendi sunt: Sint Series figuratæ A, B, C, D, E, aliquousque continuatæ, quarum laterales F, G, H, I, K, ostendunt caracteristicos dimensionum 0, 1, 2, 3, 4 &c: dato nunc numero dimensionum universali m, quæruntur ejus caracterici; ad quos inveniendos nihilo alio opus est quam ut quærantur ultimi termini Serierum figuratarum A, B, C, D, E, quarum primæ A ultimum terminum esse 1, & secundæ B esse m oppido liquet; tertiæ C sic invenitur. Ultimus terminus Seriei C, per naturam figuratarum, est æqualis summæ terminorum Seriei B excepto ultimo; summa autem hæc, per præcedens *Lemma*, est æqualis $\frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}$, ideoque ultimus terminus seriei C erit $=\frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}-m=\frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}+\frac{m\,.-2}{1\,.\,2}=\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}$. Nunc ultimus terminus Seriei D est æqualis summæ terminorum Seriei C dempto ultimo; Summa autem

		A	B	C	D	E
F	0	1	0	0	0	0
G	1	1	1	0	0	0
H	2	1	2	1	0	0
I	3	1	3	3	1	0
K	4	1	4	6	4	1
L	m	1	m	$\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}$	$\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}$	$\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2\,.\,m-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$

tem hæc, per præcedens *Lemma*, est æqualis $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; proinde ultimus terminus Seriei D erit $= \frac{m \cdot m - 1 \cdot m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} = \frac{m.m - 1.m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m.m - 1. - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{m.m - 1.m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Jam ultimus terminus Seriei E est æqualis summæ præcedentis D dempto ultimo; summa autem hæc, per præcedens *Lemma*, est $= \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, proinde ultimus terminus Seriei E est $= \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{m.m - 1.m - 2.m + 1}{1. 2. 3. 4} + \frac{m.m - 1.m - 2. - 4}{1. 2. 3. 4} = \frac{m.m - 1.m - 2.m - 3}{1. 2. 3. 4}$. Series itaque lateralis L, seu characteristici dimensionis universalis m, exprimuntur per hanc Seriem 1, m, $\frac{m. m - 1}{1. 2}$, $\frac{m. m - 1. m - 2.}{1. 2. 3}$, $\frac{m. m - 1. m - 2. m - 3}{1. 2. 3. 4}$, &c: cujus Seriei natura jam patet, & proinde absque calculo quantumlibet continuari potest. Liquet etiam quod, si m sit numerus integer & positivus [potest enim etiam esse fractus, vel negativus, vel utrumque] Series inventa, si aliquousque processerit, tandem abrumpatur, & ultimus terminus nihil evadat; si vero m sit numerus fractus, vel negativus, vel utrumque, Series inventa in infinitum continuabitur. Hæc itaque si ad præsens negotium accommodare velimus, & invenire Seriem $= ax^n dx (bx^c + f)^m$, considero $bx^c + f$ tanquam binomium ad potestatem m elevatum, ideoque sumpto bx^c pro priori & f pro posteriori binomii membro, erit quantitas $(bx^c + f)^m = b^m x^{cm} + m b^{m-1} x^{cm - 1c} f^1 + \frac{m. m - 1}{1. 2} b^{m-2} x^{cm - 2c} f^2 + \frac{m. m - 1. m - 2}{1. 2. 3} b^{m-3} x^{cm - 3c} f^3$

+

$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}b^{m-4}x^{cm-4c}f^4+$ &c. Ideoque multiplicatis per $ax^n\,dx$ provenit $ax^n\,dx\,(bx^c+f)^m=(ab^m x^{cm+n}+mab^{m-1}x^{cm-1c+n}f^1+\frac{m.m-1}{1.\ 2}ab^{m-2}x^{cm-2c+n}f^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3.}ab^{m-3}x^{cm-3c+n}f^3$ $+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}ab^{m-4}x^{cm-4c+n}f^4+$ &c.$)\times dx$; ideoque, sumptis singulorum terminorum integralibus, erit Series

$$\frac{ab^m x^{cm+n+1}}{cm+n+1}+\frac{m.ab^{m-1}x^{cm-1c+n+1}f^1}{cm-1c+n+1}$$
$$+\frac{m.m-1.ab^{m-2}x^{cm-2c+n+1}f^2}{1.2.cm-2c+n+1}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.ab^{m-3}x^{cm-3c+n+1}f^3}{1.2.3.cm-3c+n+1}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.ab^{m-4}x^{cm-4c+n+1}f^4}{1.2.3.4.cm-4c+n+1}\ \text{\&c.}=$$

[divisis singulis terminis per $ab^m x^{cm+n-1}$ & multiplicata summa seriei per $ab^m x^{cm+n+1}$] $ab^m x^{cm+n+1}\times(\frac{b^{-0}x^{-0c}}{cm+n+1}$

$$+\frac{mb^{-1}x^{-1c}f^1}{cm-1c+n+1}+\frac{m.m-1.b^{-2}x^{-2c}f^2}{1.2.cm-2c+n+1}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.b^{-3}x^{-3c}f^3}{1.2.3.cm-3c+n+1}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.b^{-4}x^{-4c}f^4}{1.2.3.4.cm-4c+n+1}+\text{\&c.})=$$

int. $ax^n\,dx\,(bx^c+f)^m$ *Q. E. I.*

LECTIO QUADRAGESIMA NONA.

Continuatio ejusdem argumenti.

De quadraturis & rectificationibus & de radicum extractionibus per Series infinitas.

Quantitatem nunc $ax^n dx(bx^c+f)^m$ in aliam Seriem convertemus, considerando bx^c+f tanquam binomium ad potestatem m elevatum; sed jam f pro priori & bx^c pro posteriori binomii membro sumendum est; erit itaque quantitas $(bx^c+f)^m = f^m + mf^{m-1}b^1x^{1c} + \frac{m.m-1}{1.2}f^{m-2}b^2x^{2c} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}f^{m-3}b^3x^{3c} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}f^{m-4}b^4x^{4c}$ + &c. ideoque multiplicatis per $ax^n dx$ provenit $ax^n dx(bx^c+f)^m = (af^m x^n + amf^{m-1}b^1x^{1c+n} + \frac{m.m-1}{1.2}af^{m-2}b^2x^{2c+n} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}af^{m-3}b^3x^{3c+n} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}af^{m-4}b^4x^{4c+n}$ + &c.) $\times dx$. Ideoque, sumptis singulorum terminorum integralibus, erit Series $\frac{af^m x^{n+1}}{n+1} + \frac{maf^{m-1}b^1x^{1c+n+1}}{1c+n+1} + \frac{m.m-1.af^{m-2}b^2x^{2c+n+1}}{1.2.2c+n+1} + \frac{m.m-1.m-2.af^{m-3}b^3x^{3c+n+1}}{1.2.3.3c+n+1} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.af^{m-4}b^4x^{4c+n+1}}{1.2.3.4.4c+n+1}$ &c. = [divisis singulis terminis per $af^m x^{n+1}$ & multiplicata summa Seriei per $af^m x^{n+1}$] $af^m x^{n+1} \times (\frac{b^0 x^{0c}}{n+1} + \frac{m.f^{-1}b^1x^{1c}}{1c+n+1}$

+

$+\frac{m.\,m-1.\,f^{-2}\,b^{2}\,x^{2c}}{1.\,2.\,2c+n+1}+\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,f^{-3}\,b^{3}\,x^{3c}}{1.\,2.\,3.\,3c+n+1}$
$+\frac{m.\,m-1.\,m-2.\,m-3.\,f^{-4}\,b^{4}\,x^{4c}}{1.\,2.\,3.\,4.\,4c+n+1}+\&c.\,)=\text{int}:ax^{n}\,dx$
$(bx^{c}+f)^{m}$. Hæc itaque Series, quoniam ejus terminorum denominatores ſimpliciores ſunt quam præcedentis eidem præferri poterit.

Quomodo hæc methodus ad alia integralia ſumenda applicari poſſit nunc oſtendendum eſt. Si quantitas propoſita plura quam duo membra habet, primum, vel quodlibet aliud, conſiderandum eſt tanquam prius, & omnia reliqua ſimul ſumpta tanquam poſterius binomii membrum; & alias procedendum eſt ut docuimus. Exemplum nobis eſto hæc quantitas $ax^{n}dx(bx^{c}+gx^{b}+f)^{m}$, in qua tria membra reperiuntur, proinde conſidero $bx^{c}+gx^{b}+f$ tanquam binomium, cujus primum membrum eſt f, & poſterius $bx^{c}+gx^{b}$, ſic itaque quantitas $(bx^{c}+gx^{b}+f)^{m}$ erit $=f^{m}+mf^{m-1}(bx^{c}+gx^{b})^{1}$ $+\frac{m.m-1}{1.\,2}f^{m-2}(bx^{c}+gx^{b})^{2}+\frac{m.m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3}f^{m-3}$ $(bx^{c}+gx^{b})^{3}+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\,2.\,3.\,4}f^{m-4}(bx^{c}+gx^{b})^{4}$, $+$ &c. Multiplicatis per $ax^{n}\,dx$ provenit $ax^{n}\,dx\,(bx^{c}+gx^{b}+f)^{m}$ $=(af^{m}\,x^{n}+maf^{m-1}\,x^{n}(bx^{c}+gx^{b})^{1}+\frac{m.\,m-1}{1.\,2}af^{m-2}$ $x^{n}(bx^{c}+gx^{b})^{2}+\frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3.}af^{m-3}\,x^{n}(bx^{c}$ $+gx^{b})^{3}$ &c.$)\times dx$; quoniam itaque $bx^{c}+gx^{b}$ ſemper ad poteſtatem numero integro expreſſam elevatur, patet ex ſingulis terminis hujus Seriei integrale haberi poſſe. Eodem modo proceditur, ſi quantitas propoſita quatuor, quinque, aut quantumlibet membra habeat: ſemper enim unum pro priori & reliqua ſimul ſumpta pro poſteriori binomii membro ſumenda ſunt; quibus

quibus in Seriem converſis, poterit ſemper ex ſingulis terminis haberi integrale, quæ aliam Seriem conſtituunt, cujus ſumma æquatur integrali quæſito quantitatis propoſitæ. Concludimus itaque ex his, quod cujuſcunque ſpatii quadratura & cujuſcunque curvæ rectificatio per Seriem quandam, ope noſtræ methodi, exhibere poſſimus.

Hac occaſione non abs re alienum erit, ſi oſtenderimus quomodo, per eandem methodum, numeri irrationales exprimi poſſint per Series infinitas numerorum rationalium. Numerus enim propoſitus, ex quo radix quæcunque extrahenda eſt, dividatur in duas partes, quarum una radicem habeat, & pro priori binomii membro, altera vero pars pro poſteriori ponatur, & dein, modo conſueto, ſecundum caracteriſticos 1, m, $\frac{m.m-1}{1.2}$, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ &c. binomium ad potentiam m [m ſemper $=$ eſt unitati diviſæ per numerum radicis extrahendæ] elevetur, quod Seriem generabit, cujus ſinguli termini ſunt rationales, eorumque ſumma æqualis numero propoſito irrationali. Sic, ſi radix quadrata ſit extrahenda ex 2; pono $2 = 1 + 1$, quod eſt binomium, cujus prius membrum radicem habet; verum m hoc in caſu eſt $= \frac{1}{2}$, proinde ſecundum caracteriſticos invenitur $\sqrt{2} = 1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}.1^{\frac{1}{2}-1}1^1 + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.1^{\frac{1}{2}-2}.1^2}{1.2}$ $+ \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2.1^{\frac{1}{2}-3}.1^3}{1.2.3} + \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}-3.1^{\frac{1}{2}-4}.1^4}{1.2.3.4}$ $+ \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}-3.\frac{1}{2}-4.1^{\frac{1}{2}-5}.1^5}{1.2.3.4.5}$ &c. quæ Series ſi digeratur, producit $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{-1}{1.2.4} + \frac{-1.-3}{1.2.3.8}$ $+ \frac{-1.-3.-5}{1.2.3.4.16}$ &c. Eodem modo ſi radix cubica ſit extrahenda ex 2, erit $\sqrt[3]{2} = 1^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}.1^{\frac{1}{3}-1}.1^1 + \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1.1^{\frac{1}{3}-2}.1^2}{1.2}$

$+ \frac{1}{3}.$

$+\frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1.\frac{1}{3}-2.1^{\frac{1}{3}-3}.1^3}{1.2.3}+\frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1.\frac{1}{3}-2.\frac{1}{3}-3.1^{\frac{1}{3}-4}.1^4}{1.2.3.4}$ &c. vel reducta ſerie provenit $\sqrt[3]{2}=1+\frac{1}{3}+\frac{-2}{1.2.9}+\frac{-2.-5}{1.2.3.27}+\frac{-2.-5.-8}{1.2.3.4.81}$ &c. Non aliter procedendum eſt cum extractione radicum aliorum numerorum.

LECTIO QUINQUAGESIMA.

De Extractione Radicum numerorum irrationalium per Series infinitas, modo diverſo a præcedenti.

IN præcedentibus oſtenſum eſt, quomodo per elevationem binomii ad poteſtatem litteralem, vel univerſalem, radices quæque numerorum ſurdorum per Series exprimi poſſint: Non injucundum fore puto, ſi, ob materiæ affinitatem, oſtenderimus quo pacto numerorum irrationalium radices exprimi poſſint, per alias Series inventas ex occaſione methodi approximandi Dni. ROOLE in *Ephemer. Societatis Regiæ* Pariſ. menſ. Mart. *1692*, traditæ. Sit a numerus quicunque radicis integer; non neceſſe eſt ut ſit maximus, ut vult Dn. ROOLE, & ſit b reſiduum extractionis. Si itaque primo radix quadrata ſit extrahenda; habebitur hæc æquatio $xx=aa+b$, ubi $aa+b$ eſt numerus datus, qui dividitur in quadratum aa & reſiduum b: Ideoque x erit æqualis numero ſurdo $\sqrt{(aa+b)}$, cujus tamen valorem per Seriem convergentem determinabimus, quæ dein mutari poterit in Seriem continuam, cujus nempe ſumma oſtendit verum valorem. Sit $x=a+z$, erit xx, id eſt $aa+b=aa+2az+zz$, ideoque $b=2az+zz$; per diviſionem itaque invenitur $z=b:(2a+z)$. Nunc, in fractione $b:(2a+z)$ poni poteſt pro z qualiſcunque numerus, qui ad diviſionem commodiſſimus æſtimatur [rurſus

enim non opus eſt, ut ſecundum Dn. ROOLE ponatur $z = 0$, vel $= 1$: verum quidem eſt, quod per ejus poſitionem interdum citius approximetur ad radicem quæſitam; præſtat autem ut facilitas & commoditas præ brevitate ſeligatur, ſi ea haberi poterit]; quia autem hic numerus datus in litteris proponitur, ſtatuatur $z = 0$, ideoque erit $b:(2a+z) = b:2a = z$. Quoniam vero $z > 0$, erit $b:2a > z$; ſi itaque in fractione $b:(2a+z)$, loco z ponatur $b:2a$, provenit $2ab:(4aa+b) < z$; poſito ergo in fractione $b:(2a+z)$, loco z, $2ab:(4aa+b)$, habebitur $(4aab+bb):(8a^3+4ab) > z$. Si nunc in fractione $b:(2a+z)$ loco z ponatur $(4aab+bb):(8a^3+4ab)$, erit $(8a^3b+4abb):(16a^4+12aab+bb) < z$. Sic itaque alternative ſigna majoritatis & minoritatis mutantur, & operatio ſi in infinitum continuetur, exceſſus vel defectus valoris z omnino evaneſcit. Series autem in ordinem redacta eſt hæc:

$$\frac{b}{2a}, \frac{2ab}{4aa+b}, \frac{4aab+bb}{8a^3+4ab}, \frac{8a^3b+4abb}{16a^4+12aab+bb},$$
$$\frac{16a^4b+12aabb+b^3}{32a^5+32a^3b+6abb}, \frac{32a^5b+32a^3bb+6ab^3}{64a^6+80a^4b+24aabb+b^3} \text{ \&c.}$$

quæ talem legem obſervat, ut numerator cujuſque termini ſit æqualis denominatori termini præcedentis multiplicato per b, denominator autem ſit æqualis denominatori termini præcedentis multiplicato per $2a$ addito numeratore termini præcedentis; ita ut hæc ſeries quantumlibet nullo negotio continuari poſſit; cujus ſinguli termini impares 1us, 3us, 5us, &c. juſto majores ſunt z, ſed quia decreſcendo magis magiſque ad verum valorem accedunt, erit tandem exceſſus data quavis quantitate minor; e contra termini pares 2us, 4us, 6us, &c. juſto minores ſunt z, quia vero accreſcendo vero valori appropinquant, erit pariter defectus data quavis quantitate minor. Infiniteſimus terminus itaque hujus Seriei erit valor ipſius z, qui quæritur, cui ſi addatur a, habebitur $a+z = x = \sqrt{(aa+b)}$. Si hanc Seriem convergentem velimus convertere in continuam, primus Seriei terminus ponendus eſt pro primo, & differentiæ ſubſequentium ſub ſignis contrariis pro ſequentibus; quo facto hæc:

hæc prodibit Series continua $\frac{b}{2a} - \frac{bb}{2a.(4aa+b)}$ $+ \frac{b^3}{(4aa+b).(8a^3+4ab)} - \frac{b^4}{(8a^3+4ab).(16a^4+12aab+bb)}$ &c. $= z$; ideoque si summæ Seriei addatur a, habebitur $a + z = x$ $= \sqrt{(aa+b)}$. Exemplum unum in numeris addidisse sufficiat: Quæritur numerus $= \sqrt{2}$; in hunc finem ponatur $a = 1$, ideoque $aa = 1$, & $b = 1$: Series itaque convergens $\frac{b}{2a}$, $\frac{2ab}{4aa+b}$, $\frac{4aab+bb}{8a^3+4ab}$, $\frac{8a^3b+4abb}{16a^4+12aab+bb}$ &c. exprimetur per hanc $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{29}$, $\frac{29}{70}$, $\frac{70}{169}$, &c. cujus infinitesimus terminus plus unitate erit $= \sqrt{2}$: Series autem continua $\frac{b}{2a} - \frac{bb}{2a.(4aa+b)}$ $+ \frac{b^3}{(4aa+b).(8a^3+4ab)} - \frac{b^4}{(8a^3+4ab).(16a^4+12aab-bb)}$ &c. erit æqualis huic $\frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} + \frac{1}{29.70}$ &c. cui si addatur 1, proveniet $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} +$ &c. $= \sqrt{2}$. Quia itaque per methodum in Lect. præced. invenimus $\sqrt{2}$ $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{1.2.4} + \frac{1.3}{1.2.3.8} - \frac{1.3.5}{1.2.3.4.16}$ &c. oportet ut duæ istæ Series sint æquales; proinde, demptis æqualibus $1 + \frac{1}{2}$ & inversis signis, erunt Series remanentes adhuc æquales, id est, $\frac{1}{2.5} - \frac{1}{5.12} + \frac{1}{12.29} - \frac{1}{29.70}$ &c. $= \frac{1}{1.2.4} - \frac{1.3}{1.2.3.8}$ $+ \frac{1.3.5}{1.2.3.4.16} - \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.5.32}$ &c. Hoc ansam præbere potest iis quibus plus vacat, penitius in naturam harum Serierum inquirendi.

LECTIO QUINQUAGESIMA PRIMA.

Continuatio ejusdem argumenti. De Radicum extractione per Series infinitas.

ANtequam ulterius pergamus, ostendendum est, quod termini Serierum convergentium, quas dedimus & daturi sumus, non solum ad optatam radicem magis magisque accedant, sed etiam eousque continuari possint, ut tandem excessus vel defectus data quavis quantitate minor evadat; adeoque terminus infinitesimus sit necessario radici quæsitæ æqualis. Quod per deductionem ad absurdum facile sic demonstramus. Si enim dicatur excessum vel defectum non data quantitate minorem evadere, oportet ut si termini Seriei in infinitum continuantur, excessus vel defectus semper maneat æqualis; secus minor evaderet ultima quantitate, contra hypothesin adversarii: verum si excessus vel defectus semper manet æqualis, oportet ut, per substitutionem, loco z eadem quantitas proveniat quæ substituta fuit; sed quæ substituta fuit loco z est ipse valor ipsius z quæsitus, & sic excessus vel defectus plane nihil esset, iterum contra hypothesin adversarii. Demonstratio per litteras, in Serie convergente in præced: explicata, magis patet. Si dicatur infinitesimum terminum non esse æqualem radici quæsitæ z; sit ergo major, & ponatur æqualis $z+m$: infinitesimus itaque terminus est $z+m$, major quam z; proinde si loco z substituatur in fractione $b:(2a+z)$, provenit pro termino sequenti $b:(2a+z+m)$, qui erit minor quam z; si itaque & hic substituatur in fractione $b:(2a+z)$, provenit terminus consecutivus $(2ab+zb+mb):(4aa+2az+2am+b)$, qui rursus erit major quam z; quia itaque, juxta adversarium, termini infinitesimi amplius haud accedunt ad radicem quæsitam; proinde excessus vel defectus æqualis manet; oportet ut terminus infinitesimus

z

$z+m$ ſit $=$ termino ſubſequenti $(2ab+zb+mb):(4aa+2az+2am+b)$; uterque enim major eſt quam z. Reducta itaque æquatione habetur $4aaz+2azz+4amz+bz+4aam+2amm+bm=2ab+zb+mb$; deletis utrobique æqualibus, & diviſis per $2a$, erit $2az+zz+2mz+2am+mm=b$; verum in Lect. præced. habetur $b=2az+zz$, ergo $2az+zz=2az+zz+2mz+2am+mm$, ideoque $2mz+2am+mm=0$; ſequitur hinc quod ſit $m=0$, & infiniteſimus terminus $z+m=z+0=z$; ergo non eſt major quam z, contra quod aſſerit adverſarius, nec etiam minor eſſe poteſt, alias per ſubſtitutionem major evaderet, contra quod modo demonſtravimus.

Ex his, quæ demonſtravimus, inferri poteſt, quod methodus Dni. ROOLE approximandi ad radices ultra quadraticas non quadrat; in extrahendis enim radicibus cubicis & altiorum dimenſionum, non ſolum ad veram radicem non appropinquat, ut exceſſus vel defectus ſit tandem data qualibet quantitate minor; ſed etiam poſt operationes aliquas, interdum ab initio, a vera radice magis ac magis recedit; tantum abeſt ut ad illam accedat. Ratio hujus eſt, quia quaſdam quantitates negligit, quæ minime negligendæ ſunt.

Exemplum nobis eſto, radicis cubicæ extrahendæ ex quantitate a^3+b. Dn. ROOLE hanc æquationem ponit $x^3=a^3+b$, proinde $\sqrt[3]{(a^3+b)}=x$, quam hoc modo approximare contendit; ſupponit $x=z+a$, ideoque x^3, id eſt, $a^3+b=z^3+3zza+3zaa+a^3$ & $b=z^3+3zza+3zaa$; nunc tollit z^3 [ſed perperam] & habet $b=3zza+3zaa$, & diviſa utraque per $3az+3aa$ facit $z=b:(3az+3aa)$; cum reliquis procedit ut in radicibus quadraticis extrahendis. Dico autem hoc modo non niſi ad certum uſque terminum appropinquari ad radicem quæſitam. Evidens enim eſt, quod ſi operatio in infinitum continuetur, terminus infiniteſimus ſit æqualis radici æquationis hujus quadratæ $b=3zza+3zaa$, & non radici æquationis cubicæ $b=z^3+3zza+3zaa$. Quia autem hæ æquationes diverſas habent radices; patet

quod cum radici illius appropinquat, simul ad radicem hujus quæsitam accedere nunquam possit, ut error insensibilis evadat. Hoc luculentius patebit per aliquod exemplum. Radix cubica ex 8, est $= 2$: sed supponamus radicem esse ignotam, & quæramus illam per modum approximandi Dni. ROOLE: Sit itaque $8 = a^3 + b$, $a = 1$ & $b = 7$; oporteret itaque ut per substitutionem continuam semper magis accederet ad valorem verum ipsius z, qui in hoc exemplo est $= 1$, & quidem, ut Dn. ROOLE prætendit, alternative excedendo & deficiendo. Formula itaque illius $z = b : (3az + 3aa)$, in hoc exemplo hæc est $z = 7 : (2z + 3)$; si ergo in hac fractione loco z ponatur 0, provenit $\frac{7}{3} > z$; ideoque substituto loco z, $\frac{7}{3}$, erit $\frac{7}{10} < z$; & substituto $\frac{7}{10}$ erit $\frac{70}{51} > z$; si hæc substitutio continuetur, provenit hæc Series convergens $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{70}{51}$, $\frac{119}{121}$, $\frac{847}{720}$, $\frac{1680}{1567}$, $\frac{10969}{9741}$, $\frac{22729}{20710}$, &c. in qua termini impares 1us, 3us, 5us, 7us, &c. sunt majores quam z, termini pares autem 2us, 4us, 6us, 8us, &c. sunt minores quam z. Verum sextus terminus jam major est quam unitas; & ceteri omnes, tam pares, quam impares, majores sunt quam unitas; ideoque termini pares non solum non accedunt ad numerum quæsitum qui est 1, sed prorsus ab eodem recedunt; ideoque termini impares, qui majores sunt quam pares, nunquam convergent ad unitatem; etiamsi Series in infinitum continuetur.

Si nunc in formula $z = 7 : (3z + 3)$, loco z substituatur, 1, & substitutio continuetur, habebitur hæc Series $\frac{7}{6}$, $\frac{14}{13}$, $\frac{91}{81}$, $\frac{189}{172}$, &c. in qua termini pares nequidem ab initio unitati approximantur, sed e contra quo plus continuatur Series eo magis ab unitate recedunt.

LECTIO

LECTIO QUINQUAGESIMA SECUNDA.

Continuatio ejusdem argumenti. De Radicum extractionibus per Series infinitas.

POstquam vidimus methodum approximandi Dni. ROOLE, per neglectionem dimensionum quadraticam transcendentium, adhiberi non posse, si ad radicem quæsitam eousque accedere velimus, ut tandem excessus vel defectus data quavis quantitate assignabili minor evadat: ostendemus nunc modum, quo id obtineri possit, & quidem generaliter in omnibus radicibus extrahendis. Regula pro hoc talis est: Postquam æquatio proposita $x^p = a^p + b$ conversa est in hanc $z^p + pz^{p-1}a + \&c. = b$, termini in quibus z ad plures quam duas dimensiones ascendit neutiquam omittendi sunt, sed tota æquatio dividenda est per $z^{p-1} + pz^{p-2}a + \&c$; quo facto proveniet hæc æquatio $z = b : (z^{p-1} + pz^{p-2}a + \&c)$. Nunc loco z in fractione substitui debet o, vel quicunque numerus; & quod inde provenit iterum substituendum est loco z in fractione, quæ substitutio si ulterius continuetur, fractio semper propius accedit ad radicem quæsitam, & sic haberi potest Series convergens, cujus terminus infinitesimus æqualis est radici z, cui si adjungatur a, habebitur $z + a = x = \sqrt[p]{(a^p + b)}$.

In hac Serie annotandum est, quod singuli termini alternative excedant verum valorem & ab eodem deficiant; illi qui excedunt appropinquant descendendo, alteri qui deficiunt accedunt ascendendo; ita tamen ut in infinito concurrant, & proinde uterque radici quæsitæ z æqualis evadat. Series ista convergens facile in continuam convertitur, ponendo primum convergentis terminum pro primo continuæ, & differentias reliquorum convergentis sub signis contrariis pro reliquis continuæ; & sic summa hujus Seriei continuæ erit æqualis ultimo termino Seriei convergentis, & inde æqualis radici quæsitæ z.

Ut

Ut exemplum addamus: sit radix cubica extrahenda ex a^3+b; id est, sit $x^3=a^3+b$, & ponatur $x=z+a$, seu $z^3+3azz+3aaz=b$, ideoque divisis per $zz+3az+3aa$, habetur $z=b:(zz+3az+3aa)$, & non $=b:(3az+3aa)$. Si nunc in fractione $b:(zz+3az+3aa)$; loco z ponatur o, provenit $b:3aa$, qui primus est Seriei convergentis terminus & justo major quam z; proinde in eadem fractione posito $b:3aa$ loco z, provenit $9a^4b:(27a^6+9a^3b+bb)$, qui secundus est Seriei convergentis terminus & justo minor quam z. Hoc pacto per continuationem substitutionis habebitur 3us, 4us, 5us, &c. Operatio quidem in litteris tædiosa, & difficilis est: in numeris huic labori parcitur.

Sit ergo radix cubica extrahenda ex 2, seu quod idem est $x^3=1+1$, ubi $a=1$ & $b=1$, ideoque posito $x=z+1$, erit $z^3+3zz+3z=1$, & $z=1:(zz+3z+3)$. Sit ergo in fractione $z=0$, erit $\frac{1}{3}$ primus terminus & justo major; & posito $\frac{1}{3}$ loco z, habetur $\frac{9}{37}$ secundus terminus, & justo minor; per substitutionem tertiam $\frac{(37)^2}{81+3.9.37+3.379}$ tertius terminus, per substitutionem quartam

$$\frac{(81+3.9.37+3.379)^2}{37^4+3.37^2.(81+3.9.37.+3.379)+3(81+3.9.37+3.379)^2}$$

pro quarto termino, & ita deinceps. Sic verus valor ipsius z semper inter duos terminos sibi immediate subsequentes continebitur; ex quibus, ceu ex limitibus, nunquam excedet, ut accidit per Methodum Dni. ROOLE.

Hoc adhuc annotasse convenit circa radices extrahendas, quod si radix sit extrahenda, cujus denominatio est numerus compositus, præstet ut per partes componentes extrahatur. Si ex. gr. extrahenda sit $\sqrt[6]{}$ ex 2, quæratur primo $\sqrt[3]{}$ ex 2, quæ quam proxime haberi potest, & dein ex hac radice cubica inventa extrahatur radix quadrata, & hæc ipsa erit $\sqrt[6]{}$ ipsius 2. Si conducibilius videretur, posset prius extrahi radix quadrata ex 2, & dein radix cubica radicis quadratæ erit $\sqrt[6]{}$ quæsita ipsius 2, & sic in aliis.

LECTIO

LECTIO QUINQUAGESIMA TERTIA.

De inveniendis radicibus æquationum per continuam approximationem.

EX iis quæ in præcedentibus dicta sunt, manifeste liquet, quod hujusmodi Series, quæ extrahendis radicibus numerorum inserviebant, non absimili modo construi possunt, ut non solum numerorum sed, ipsarum æquationum cubicarum, biquadraticarum, vel cujuscunque generis radicibus sint æquales. Quoniam autem harum Serierum termini circino & norma construi possunt; patet quod idem præstare possimus per continuationem hujus constructionis, quod Frater præstitit ope suæ methodi infra explicandæ.

Ut autem ad rem accedamus; modi nostri nervus consistit in hoc, ut primo cujusvis æquationis propositæ omnes termini in quibus littera incognita reperitur ad unam partem, & terminus pure cognitus ad alteram ponatur; ita ut hæc quantitas pure cognita sit æqualis omnibus terminis ad alteram positis: quo facto, utrumque æquationis membrum per eam quantitatem dividendum est, ut ab una parte proveniat x, ab altera vero fractio quædam; id quod semper fieri potest.

Numerator hujus fractionis erit quantitas pure cognita; in denominatore autem continebuntur quantitates incognitæ, pro quibus substituta o vel unitate [prout hoc vel illud conducibilius videtur] proveniet alia fractio, quæ in priori fractione [quam ad distinctionem generatricem appellare possumus, ex illa enim Series generatur] loco incognitæ substituenda est; & sic proveniet secunda fractio quæ radici quæsitæ appropinquat: Hæc denuo in generatrice substituenda est & generabitur tertia, & substitutio ista, quomodo in antecedentibus factum est, continuanda est; & dabit Seriem convergentem, cujus nempe termini magis magisque ad optatam radicem accedunt, & quidem alternando; id est, quivis terminus qui vera radice major

eſt, ſubſequentem habet qui eadem minor erit. Interim exceſſus & defectus tandem data quavis aſſignabili quantitate minor eveniet. Series iſta convergens per modum jam ſæpe dictum converti poteſt in Seriem continuam; cujus ſumma æqualis eſt radici quæſitæ.

Proponatur æquatio cubica $x^3 * + px - q = 0$; quæritur hujus æquationis radix x? Per regulas exhibitas ſic operandum eſt. Quia $x^3 * + px - q$ eſt $= 0$, erit $x^3 + px = q$; dividatur utrumque per $xx + p$, ut ab una parte x ſola maneat; & habebitur $x = q : (xx + p)$. Si nunc in fractione generatrice $q : (xx + p)$ ponatur $x = 0$, provenit $q : p$, primus Seriei convergentis terminus, & juſto major quam radix æquationis quæſita x. Subſtituto ergo loco x in generatrice primo termino $q : p$, habebitur $qpp : (qq + p^3)$, ſecundus Seriei terminus & juſto minor quam radix quæſita; qui ſubſtitutus in generatrice producit $q . (qq + p^3)^2 : (qqp^4 + p . (qq + p^3)^2)$, tertius Seriei terminus, & iterum major quam x; per ſubſtitutionem quartam invenitur $q . (qqp^4 + p . (qq + p^3)^2)^2 : (qq . (qq + p^3)^4 + p (qqp^4 + p . (qq + p^3)^2)^2)$ quartus Seriei terminus, qui iterum minor eſt quam radix x; & ſic per ſubſtitutionis continuationem inveniuntur ſequentes Seriei termini. Quæ Series hanc legem obtinet, cujuſvis termini numerator eſt productum quadrati denominatoris præcedentis per q, & denominator eſt aggregatum quadrati numeratoris præcedentis & producti quadrati denominatoris præcedentis per p; & hoc modo Series radicis æquationis numericæ facile continuari poteſt. Sit ex. gr. $x^3 * + 1x - 1 = 0$; erit $p = 1$ & $q = 1$, proinde *primus* Seriei convergentis terminus $\frac{1}{1}$, ſeu 1; *ſecundus* $\frac{1}{2}$, *tertius* $\frac{4}{5}$; *quartus* $\frac{25}{41}$; *quintus* $\frac{(41)^2}{(25)^2 + (41)^2}$; *ſextus* . . . . . . $\frac{((25)^2 + (41)^2)^2}{(41)^2 + ((25)^2 + (41)^2)^2}$; ſic deinceps: in qua Serie termini impares *primus*, *tertius*, *quintus* &c. decreſcunt & majores ſunt quam x, pares vero *ſecundus*, *quartus*, *ſextus* &c. accreſcunt & minores ſunt quam x; ita tamen ut utrobique tandem error imperceptibilis fiat.

Quod

Quod hucusque in æquationibus cubicis factum est, in aliis altiorum dimensionum pariter observandum erit; ut si habeatur hæc æquatio $x^4 * + pxx + qx - r = 0$; erit $x^4 + pxx + qx = r$, & proinde $x = r : (x^3 + px + q)$; formata nunc fractione generatrice, formari potest & Series: posito enim in illa $x = 0$; erit $r : q$ primus terminus & major radice vera, quo substituto in generatrice, habebitur $rq^3 : (r^3 + rpqq + q^4)$ secundus terminus qui minor est quam x; eodem modo, quo prius, inveniuntur per substitutionem reliqui termini, quæ operatio (ut verum fatear) in litteris admodum prolixa evadit, & quidem eo prolixior quo æquatio plures dimensiones habet. Interim tamen aliquando in æquationibus numericis expeditior est, & non incommode in praxi adhiberi poterit, si modo natura Seriei bene observetur; tunc enim brevi temporis spatio, ope logarithmorum, multi Seriérum termini nullo quasi negotio inveniri possunt.

LECTIO QUINQUAGESIMA QUARTA.

De Constructione geometrica Problematum solidorum & hypersolidorum per rectas lineas & circulos.

Cum impossibile sit æquationes solidas & hypersolidas, una constructione, ope circini & regulæ resolvere; modum hic ostendemus construendi geometrice earum radices, ope quidem circini & normæ, sed per constructionis alicujus seriem, vel potius continuationem, quæ eousque ad veram radicem appropinquare potest, ut tandem error imperceptibilis & data quavis quantitate minor evadat. Interim non abs re erit, si in antecessum summam vel potius valorem quarundam Seriérum, quæ huic methodo ansam præbuerunt, pervestigemus. Quæritur itaque valor hujus Seriei, &c. $\sqrt{(2 + \sqrt{(2 + \sqrt{2})})}$, cujus expressionis sensus hic est. Radix quadrata ex 2 additur ad 2, & radix hujus summæ iterum ad 2 additur, & ex ag-

gregato hoc radix extracta ad 2 ut ante additur, ex quo rursus radix extrahenda, & sic in infinitum continuandum est: cujus Seriei valor ita invenitur. Ponatur &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2}})})})} = x$; ergo eorum quadrata $2+$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2}})})} = xx$; transponatur 2 ad alteram partem, & habebitur $xx - 2 =$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2}})})}$, quæ Series, quia priorem faciem induit, est $= x$; provenit ergo hæc æquatio $xx - 2 = x$, vel $xx = x + 2$, quæ resoluta dat $x = 2$; ergo Series &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2}})})} = 2$. Eodem modo, si proponatur Series, &c. $\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{(6+\sqrt{6}})})}$, invenitur æqualis 3, & &c. $\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{(12+\sqrt{12}})})} = 4$, & &c. $\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{(20+\sqrt{20}})})} = 5$, & generaliter Series dupli numeri cujusque trigonalis est æqualis lateri istius numeri aucto unitate; ut ex. gr. 15 est numerus trigonalis, cujus latus est 5, ergo &c. $\sqrt{(30+\sqrt{(30+\sqrt{(30+\sqrt{30}})})} = 6$. Si vero Series proponatur universaliter, &c. $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{a}})})}$ invenitur $= \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4}+a)}$. Si loco additionis, multiplicetur, ut in hac Serie &c. $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}})})})}$ in qua radix ex 2 multiplicetur per 2, & radix producti iterum multiplicetur per 2, & sic consequenter; valor istius Seriei facile sic invenitur: $x =$ &c: $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}})})}$; proinde $xx = 2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}})})}$, & $\frac{1}{2}xx = \sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}})})} = x$; ex quo concluditur quod &c. $\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{(2\sqrt{2}})})} =$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2}})})}$, utraque enim æquatur 2. In his Seriebus animadvertendum est, quod pro prioribus terminis quicunque alius numerus poni possit, absque ut valor Seriei vel augeatur vel diminuatur, si modo posteriores eidem maneant; Ex. gr. &c. $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(b+\sqrt{c}})})})} =$ &c. $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{a}})})})}$, & &c. $\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{c}})})})} =$ &c. $\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{a}})})})}$. Ratio hujus manifesta est. Si nunc Series quæ consistit diversis numeris, alternative procedit; qualis hæc &c. $\sqrt{(2+\sqrt{(3+\sqrt{(2+\sqrt{(3+\sqrt{(2+\sqrt{3}})})})})}$; valor invenitur supponendo Seriem $= x$, & sumendo quadrata, redigendoque semper Seriem,

riem ad priorem faciem; ita ut æquatio proveniat inter quantitatem inventam & inter x. Ponatur ergo $x =$ &c. $\sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})})})})}$; erit $xx = 2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{2})})})}$; proinde $xx - 2 =$ &c. $\sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})})})}$; quia autem hæc Series priorem faciem nondum induit, sumatur iterum utriusque quadratum, & erit $x^4 - 4xx + 4 = 3 +$ &c. $\sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{2})})} =$ [ob identitatem Seriei cum priori posita] $3 + x$; reducta itaque æquatione provenit $x^4 - 4xx + 1 = x$, vel $x^4 * - 4xx - x + 1 = 0$; radix itaque hujus æquationis biquadraticæ x construi potest per circinum & normam, ope hujus Seriei &c. $\sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})})}$. Potest enim radix extrahi ex 3, & illa addi ad 2, & ex aggregato iterum radix extrahi & addi ad 3, & sic additio vicibus alternativis in infinitum continuari debet; ita ut tandem radix ex 2 plus illo quod ex radice extracta proxime præcedenti provenit sit sensibiliter $= x$, radici æquationis biquadraticæ $x^4 * - 4xx - x + 1 = 0$. Si vero operatio subsistat in $\sqrt{(3 +}$ &c.$)$, erit x radix alterius cujusdam æquationis; quæ ita invenitur: sit $x =$ &c. $\sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{2})})})})})}$; ergo $xx = 3 +$ &c. $\sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})})}$, & $xx - 3 = \sqrt{(2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})})}$; sumptisque iterum quadratis $x^4 - 6xx + 9 = 2 + \sqrt{(3 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})})} =$ [ob identitatem Seriei cum priore posita] $2 + x$; ergo reducta æquatione $x^4 - 6xx + 7 = x$, vel $x^4 * - 6xx - x + 7 = 0$. Sic itaque per eandem Seriem duarum æquationum radices simul construi possunt; hoc tamen cum discrimine, ut ad approximandum ad radicem prioris æquationis subsistendum sit in $\sqrt{(2 +}$ &c.$)$, ad approximandum vero ad radicem posterioris in $\sqrt{(3 +}$ &c.$)$.

Si nunc habetur hæc Series, &c. $\sqrt{(2\sqrt{(3\sqrt{(2\sqrt{(3\sqrt{2})})})})}$; ad æquationem haud difficulter pervenitur. Sit enim $x =$ &c. $\sqrt{(2\sqrt{(3\sqrt{(2\sqrt{3})})})}$; ergo $xx = 2\sqrt{(3\sqrt{(2\sqrt{(3\sqrt{2})})})}$ & $\frac{1}{2}xx = \sqrt{(3\sqrt{(2\sqrt{(3\sqrt{2})})})}$; ideoque $\frac{1}{4}x^4 = 3\sqrt{(2\sqrt{(3\sqrt{(2\sqrt{3})})})} =$ [ob identitatem Seriei] $3x$; proinde

$x^4 = 12x$, vel $x^3 = 12$, & $x = \sqrt[3]{12}$. Si ponatur $x = \surd(3 \surd(2 \surd(3 \surd 2)))$; provenit $x^3 = 18$, vel $x = \sqrt[3]{18}$. Si generaliter ponatur $x = \surd(a \surd(b \surd(a \surd b)))$, habetur $x^3 = aab$ vel $x = \sqrt[3]{aab}$, quæ eſt prima duarum mediarum proportionalium inter a & b. Hinc ſolvitur Problema Deliacum vel duplicatio cubi. Si vero $x = \surd(b \surd(a \surd(b \surd a)))$; erit $x = \sqrt[3]{abb}$, quæ ſecunda eſt duarum mediarum proportionalium inter a & b. Ex his ratio patet approximandi ad radices cubicas cujuſque numeri dati, per circinum & normam, & ſimul ſumendi duas medias proportionales. Si enim a & b ſint numeri dati vel datæ lineæ, erit &c. $\surd(a \surd(b \surd(a \surd b))) =$ primæ mediarum proportionalium, & &c. $\surd(b \surd(a \surd(b \surd(a \surd b))))$ ſecundæ mediarum proportionalium.

Si proponatur Series &c. $\surd(2 + \surd(3 + \surd(4 + \surd(2 + \surd(3 + \surd 4)))))$; habetur æquatio 8 dimenſionum $x^8 - x^6 + 17x^4 - 8xx - x - 3 = 0$.

Si datur Series &c. $\surd(a \surd(b \surd(c \surd(a \surd(b \surd c)))))$; erit æquatio $x^7 = a^4 c$. Hinc ratio patet ſumendi 6 medias proportionales. Si velimus 4 medias proportionales invenire; conſtruatur hæc Series $\sqrt[3]{(aa \surd(b \sqrt[3]{(aa \surd b)}))}$, invenitur enim pro æquatione $x^5 = a^4 b$; Series autem hæc conſtrui poteſt ope præcedentium. Ex his, ni fallor, ſatis liquet methodi ſumendarum mediarum proportionalium a *Fratre* in *Actis Lipſienſibus* propoſitæ demonſtratio.

LECTIO QUINQUAGESIMA QUINTA.

Continuatio ejuſdem argumenti. De Conſtructione geometrica Problematum ſolidorum & hyperſolidorum per continuam approximationem.

SI nunc modum conſtruendi Problemata ſolida, cujus in præcedentibus adumbrationem duntaxat dedimus, ad ipſas æquationes ſolidas & hyperſolidas applicare velimus, ita ut illius

illius ope radices harum æquationum, ut ut generaliter propositarum, per regulam & circinum possimus determinare. Notandum itaque primo, quod si valor quarundam hujusmodi Serierum, in præcedentibus explicatarum, inveniendus sit per duplicem sumptionem quadrati, antequam Series ad pristinam formam redigatur, æquatio proveniat quatuor dimensionum, quæ inserviet radicibus determinandis æquationum biquadraticarum. Si quadratum sumendum est ter, antequam Series priorem formam induat, habebit æquatio resultans 8 dimensiones, quæ resolvet radices æquationum quadrato-quadraticarum; & sic deinceps. Quoniam autem in æquationibus altiorum dimensionum, ob multitudinem terminorum, res difficilis evadit, non tamen impossibilis; Radices saltem æquationum biquadraticarum. & cubicarum assignandi modum tradidisse hic sufficiet.

In æquatione biquadratica generaliter expressa $x^4 * pxx . qx . r = 0$, quia tres sunt termini qui litteris cognitis afficiuntur, necessario quoque tres diversæ litteræ in Serie formatrice [formatricem appello, quia format Seriem constructricem, id est, quæ radicem æquationis quæsitam construit] ponendæ sunt; & tunc æquationis provenientis singuli termini cum singulis terminis propositæ respective comparandi sunt; & quod pro qualibet littera in Serie posita exsurgit, valor iste in eadem Serie pro eadem littera substituendus est, & nova Series, quæ inde generatur, erit æquationis propositæ constructrix. Series autem illa, quæ in constructricem mutanda est, ad libitum formari potest, si modo tres diversas litteras contineat, & per duplicem sumptionem quadrati ad pristinam formam redigatur. Sit ergo Series formatrix hæc: &c: $\sqrt{}(cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{}(cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{cc}))))$; cujus valor quæratur ponendo $x =$ &c: $\sqrt{}(cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{}(cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{cc}))))$; ideoque $xx = cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{}(cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{cc})))$, & $(xx - cc) : a = \sqrt{}(cc + b \sqrt{}(cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{cc})))$; sumptisque denuo quadratis, transposito cc, & divisis per b, provenit $(x^4 - 2ccxx + c^4 - aacc) : aab = \sqrt{}(cc + a \sqrt{}(cc + b \sqrt{cc})) =$ [ob eandem

dem cum priori posita formam] x; reducta itaque æquatione ad cyphram, erit $x^4 * - 2ccxx - aabx + c^4 - aacc = 0$, cujus æquationis radix x construitur per Seriem formatricem &c: $\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{(cc + a\sqrt{cc})})})}$. Hujus autem ope construitur etiam radix æquationis litteris generalibus expressæ $x^4 * - pxx - qx - r = 0$; si nempe termini illius cum terminis hujus comparentur, $p = 2cc$, $q = aab$, $r = -c^4 + aacc$; ideoque invenitur $cc = \frac{1}{2}p$, & substituto loco cc ejus valore in æquatione $r = -c^4 + aacc$, habetur $r = -\frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}aap$; & proinde $aa = (4r + pp) : 2p$, & $a = \sqrt{(4r + pp)} : \sqrt{2p}$, & substituto loco aa ejus valore in æquatione $q = aab$, provenit $q = (4rb + ppb) : 2p$, ideo $b = 2pq : (4r + pp)$. Si ergo in Serie formatrice substituatur loco cc valor ejus, qui est $\frac{1}{2}p$, & loco a, $\sqrt{(4r + pp)} : \sqrt{2p}$, tandemque loco b, $2pq : (4\sqrt{} + pp)$, proveniet Series quam constructricem appellavimus, &c. $\sqrt{(\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{4r+pp}{2p}} \sqrt{(\frac{1}{2}p + \frac{2pq}{4r+pp}} \sqrt{(\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{4r+pp}{2p}}}$ $\sqrt{(\frac{1}{2}p + \frac{2pq}{4r+pp}\sqrt{\frac{1}{2}p}))))))}$, quæ nempe construit & æqualis est radici quæsitæ æquationis propositæ $x^4 * - pxx - qx - r = 0$. Nunc non opus est, ut ostendatur quo pacto Series formandæ sint cum signa æquationis propositæ sunt aliter constituta: aliud enim nihil faciendum est, quam ut, quomodocunque signa possint esse, semper singuli termini cum singulis comparentur: & si accidit ut in Serie constructrice aliquid imaginarii proveniat, ut si p esset quantitas negativa & proinde $\sqrt{(4r + pp)} : \sqrt{2p}$ imaginarium, huic inconvenienti occurri potest, si in Serie formatrice alicubi signa, vel aliud quid, prout rei natura exigit, mutetur.

Esto nunc exemplum æquationis biquadraticæ resolvendæ $x^4 * - 4xx - 2x - 5 = 0$; in qua $p = 4$, $q = 2$, $r = 5$, ideoque $\frac{1}{2}p = 2$, $2pq : (4 + pp) = \frac{4}{5}$, & $\sqrt{(4 + pp)} : \sqrt{2p} = \frac{1}{2}$. Sic itaque Series constructrix formatur in hanc &c. $\sqrt{(2 + \sqrt{(\frac{9}{2}\sqrt{(2 + \frac{4}{5}\sqrt{(2 + \sqrt{(\frac{9}{2}\sqrt{(2 + \frac{4}{5}\sqrt{2}))))))}}}}}}$, cujus valor æqualis est radici x æquationis $x^4 * - 4xx - 2x - 5 = 0$.

Osten-

Oſtendendum nunc eſt, quomodo per hanc methodum æquationes cubicæ reſolvi poſſint; quod facillime ſic fit. Eſto æquatio cubica propoſita, cujus radix invenienda ſit $x^3 * - px - q = 0$, ideoque etiam $x^4 * - pxx - qx = 0$, hoc modo hæc æquatio eſt ſpecialis caſus æquationis biquadraticæ $x^4 * - pxx - qx - r = 0$ in qua nempe $r = 0$, poſito ergo, pro r, o; provenit Series conſtructrix &c: $\sqrt{(\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{2}p \sqrt{(\frac{1}{2}p + \frac{2q}{p} \sqrt{(\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{2}p \sqrt{\frac{1}{2}p})})})})})}$, quæ conſtruit radicem æquationis biquadraticæ $x^4 * - pxx - qx = 0$, vel hujus cubicæ $x^3 * - px - q = 0$. Exemplum eſto $x^3 * - 8x - 8 = 0$, in qua $p = 8$, & $q = 8$, proinde $\frac{1}{2}p = 4$ & $\sqrt{\frac{1}{2}p} = 2$, $2q : p = 2$, ideoque Series conſtructrix mutatur in hanc &c: $\sqrt{(4 + 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{4})})})}$. Ex qua Serie quoque ſtatim patet æquationem propoſitam eſſe reducibilem & diviſibilem; quoniam enim Series hæc non alternative faciem mutat, ſed ubique eandem formam obtinet, & proinde per unicam ſumptionem quadrati ad æquationem perveniri poteſt; patet hanc æquationem non niſi ad duas dimenſiones aſcendere, & proinde æquationem cubicam per hanc eſſe diviſibilem: Sit namque $x = \sqrt{(4 + 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{4})})})}$, erit $(xx - 4) : 2 = x$, vel $xx - 2x - 4 = 0$, & ideo $x^3 * - 8x - 8 = 0$ dividi poterit per $xx - 2x - 4 = 0$; provenit quippe $x + 2 = 0$. Ergo æquatio per $x + 2 = 0$ reduci poteſt. Modus iſte reducendi in multis aliis uſui venire poteſt, & quidem abſque longa diſquiſitione. Supra diximus quod ad libitum Series formatrix formari poſſit: id verum eſt; interim oportet ut illa ſemper tres differentes litteras contineat, & alternative primam formam induat. Sic itaque loco Seriei formatricis quam ſupra poſuimus, &c. $\sqrt{(cc + a\sqrt{(cc + b\sqrt{(cc + a\sqrt{cc})})})}$, poni poſſent hæ aliæ, &c. $\sqrt{(bc + a\sqrt{(bc + b\sqrt{(bc + a\sqrt{bc})})})}$; vel $\sqrt{(bb + a\sqrt{(cc + a\sqrt{(bb + a\sqrt{(cc + a\sqrt{bb})})})})}$, vel quæcunque aliæ: quæ omnes alias dabunt Series conſtructrices; & ſic per diverſas vias ad eaſdem æquationum radices deducent.

LECTIO QUINQUAGESIMA SEXTA.

Additamentum ad Articulum de curvis Causticis.

De Causticis per Refractionem.

CUm de Causticarum natura & proprietatibus egimus, illas tantum consideravimus quæ a radiis reflexis generantur. Siquidem autem radii refracti non minus quam reflexi, vel in Foco coincidunt, vel etiam suas Causticas formant, id est, curvas quarum radii refracti sunt tangentes; oportet ut & harum natura, & quid ipsis proprium sit paucis explicetur; ex quibus apparebit qualis illas inter, & a reflexione genitas differentia intercedat. Quid primo per radium refractum intelligatur jam constat: Si nempe radius luminis, vel visivus, ab uno medio diaphano in aliud densitate diversum oblique incidit, radius secundum rectam, qua incidit, amplius non procedit; sed in ipso incidentiæ puncto rumpitur, & vel ad perpendiculum accedit, vel ab eodem recedit; ita tamen ut, quomodocunque incidat, sinus anguli incidentiæ, id est, anguli quem radius incidens facit cum perpendiculo, habeat ad sinum anguli refractionis, id est, anguli quem radius refractus facit cum perpendiculo, habeat, inquam, rationem constantem. Hoc saltem supponimus & non demonstrabimus; nihilque nobis refert si medium, quod radios versus perpendicularem rumpit, densius dicatur, vel rarius, quam illud ex quo radii proveniunt; sed modo refractionis allata lex, quæ per experientiam stabilita est, & de qua omnes conveniunt, hic tanquam hypothesis supponenda est; cui calculum in Causticis determinandis superstruemus.

TAB. LXXV. Fig. 173. Sit figura quæcunque corporis diaphani D C K; punctum radians A; radii infinite parum distantes AK, AC; qui refracti coeant in B. Sit sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis,

tionis, ut m ad n: Dico $\frac{n}{m}$ AK + KB esse $= \frac{n}{m}$ AC + CB, vel AK $+ \frac{m}{n}$ KB = AC $+ \frac{m}{n}$ CB.

Centris A & B describantur arculi CM & KL, & per punctum K agatur ad curvam perpendicularis NKO. Quoniam angulus NKM + MKC = recto = MKC + MCK; ergo angulus NKM = angulo MCK. Item ang. BKO + OKL = recto = OKL + LKC; ergo BKO = LKC. Sinus autem anguli NKM ad sinum anguli BKO, per hypothesin, ut m ad n; ergo sinus anguli MCK ad sinum anguli LKC, ut m ad n, id est, KM : LC = m : n; ideoque $\frac{n}{m}$ KM = LC; addatur illi $\frac{n}{m}$ AM & huic $\frac{n}{m}$ AC; erit $\frac{n}{m}$ KM + $\frac{n}{m}$ AM, seu $\frac{n}{m}$ AK = $\frac{n}{m}$ AC + LC; rursumque additis BK & BL provenit $\frac{n}{m}$ AK + BK = $\frac{n}{m}$ AC + BC. *Q. E. D.*

Si Radii incidentes AK, aC sint paralleli; erit, ducta per illos perpendiculari quacunque Aa, $\frac{n}{m}$ AK + KB = $\frac{n}{m}$ aC + CB. TAB. LXXV. *Fig.* 174.

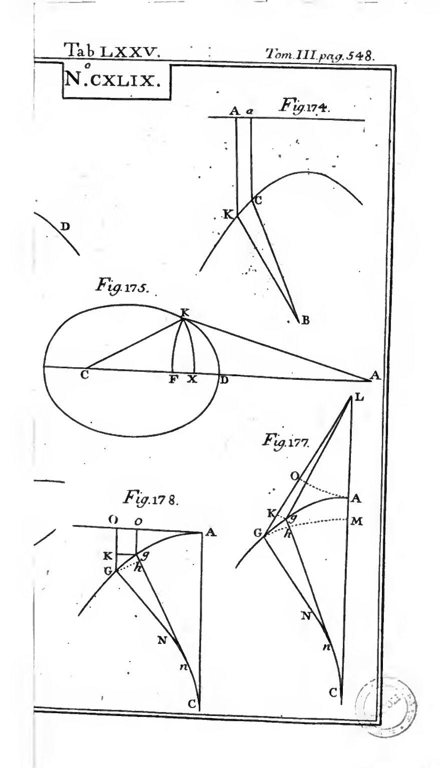
Hinc facile est determinare curvam DK, ita ut radii emanantes ex puncto dato A coincidant in puncto dato C. Per ea enim quæ modo demonstravimus, oportet ut $\frac{n}{m}$ AK + KC, sit semper eidem æqualis. Ducta itaque recta AC, & assumpto in ea puncto quocunque fixo D, fiat DX, ad libitum assumpta, ad DF ut n ad m, & centris C & A fiant arcus XK & FK; erit communis intersectio K in curva quæsita. Nam quia DX : DF = n : m, erit $\frac{n}{m}$ DF = DX; ideoque $\frac{n}{m}$ DF + $\frac{n}{m}$ AD seu $\frac{n}{m}$ AK = $\frac{n}{m}$ AD + DX; additisque æqualibus KC, XC, erit $\frac{n}{m}$ AK + KC = $\frac{n}{m}$ AD + DC; Ergo &c. Si m TAB. LXXV. *Fig.* 175.

eſt ad n, ut 3 ad 2, quæ eſt ratio refractionis in vitro; erit curva DK CARTESII Ovalis prima, quæ in ejus *Geometria* abſque demonſtratione habetur. Omnes reliqui caſus, qui ibi exſtant, eodem modo facillime ſolvuntur, & ceteræ Ovales determinantur per unicum hoc Lemma, quod (*Fig.* 173) $\frac{n}{m}AK + KB$ ſit $= \frac{n}{m}AC + CB$.

TAB. LXXV. Fig. 176. Si datur curva AGK, punctum radians L, & punctum in quo radii colligendi ſunt F; quæritur curva BDK per punctum D tranſiens, ut radii incidentes ab L & per diaphanum AKB tranſeuntes reüniantur in puncto dato F? Ad curvam hanc conſtruendam, ducatur radius quicunque AG, cujus refractus ſit GDV; in quo ſumatur punctum D, ita ut $GD + \frac{n}{m}DF$ ſit $= \frac{n}{m}LA + AB + \frac{n}{m}BF - \frac{n}{m}LG$, erit punctum D in curva quæſita BDK. Demonſtratio hujus, quia a priore haud multum abludit, ob facilitatem ſuam apponi haud meretur.

Deveniendum tandem ad curvas Cauſticas, quæ generantur ab interſectionibus radiorum refractorum, qui vel parallele, vel a puncto quodam incidunt in ſuperficiem diaphani determinatam. Harum autem Cauſticarum non minus quam a reflexione genitarum generalis habetur rectificatio.

TAB. LXXV. Fig. 177. Sit enim AgG curva quæcunque; punctum datum radians L; radii incidentes LG, Lg; refracti GN, gn; curva Cauſtica NnC. Sit GhM curva, quæ ex evolutione curvæ NnC deſcribitur; & radio LA deſcribatur arcus AO. In præcedentibus demonſtratum eſt, quod ſit $GK : gh = m : n$; ergo omnes GK, id eſt GO, ad omnes gh, id eſt, ad AM, ut m ad n. Per ea autem quæ de evolutione curvarum dicta ſunt, recta CM eſt æqualis curvæ $CN + GN$; ideoque $AC - AM$, ſeu $AC - \frac{n}{m}GO = CN + GN$, & ipſa curva $CN = AC - \frac{n}{m}GO - GN$: puncta autem N & C geo-


N°. CXLIX.
Fig. 174.
A
a
C
K
B
D
Fig. 175.
K
C
F
X
D
A
Fig. 177.
L
O
A
K
g
M
G
h
N
n
C
Fig. 178.
O
o
A
K
g
G
h
N
n
C

geometrice determinari possunt, ut infra patebit; ergo curva NC rectificata est.

Si radii sunt paralleli eodem modo demonstratur, quod ducta per verticem A perpendiculari AO, curva Caustica NC sit $= AC - \frac{n}{m} GO - GN$; quod vel exinde patet, quia AO considerari potest, tanquam arcus centro infinite distante descriptus; radii enim a puncto illo provenientes pro parallelis censentur. TAB. LXXVI. Fig. 178.

LECTIO QUINQUAGESIMA SEPTIMA.

Continuatio ejusdem argumenti. De Causticis per Refractionem.

SI curvas Causticas determinare, vel construere libet; quaerenda est longitudo radii concurrentis, id est, quae intercipitur inter curvam datam & punctum concursus duorum radiorum infinite parum distantium; quod punctum in ipsa est Caustica, ut supra diximus in Titulo *De Causticis.* * Idem ergo & hic faciendum ad construendas Causticas a refractione ortas.

Sit ergo ABC, curva quaecunque data; radii incidentes paralleli DB, *db*; eorum refracti BE, *b*E; ratio refractionis ut *m* ad *n*; E punctum concursus: quaeritur longitudo BE? qua inventa, erit punctum E, quod est in Caustica, determinatum. Ductis BF, *bf* applicatis ad axem AF parallelum radio DB, agatur BM perpendicularis ad curvam, & MN perpendicularis ad radium refractum BG; ducatur BL parallela axi AG, secans *bf* in H. Sit $AF = x$, $BF = y$, proinde $Ff = dx$, $bH = dy$; item $FG = z$; ideoque $BG = \sqrt{(yy + zz)}$, quoniam $dx : dy = BF [y] : FM$; erit $FM = ydy : dx$; angulus $BMF = LBM$ = angulo incidentiae, & NBM est angulus refractionis; ergo sinus anguli BMF ad sinum anguli NBM, id est, sumpta BM pro sinu toto, BF ad MN, ut *m* ad *n*; sed, ob similitudinem triangulorum GMN, GBF, TAB. LXXVI. Fig. 179.

* Supra, pag. 464.

GBF, BF : MN $=$ BG $[\sqrt{(yy+zz)}]$: GM; invenitur itaque GM $= \frac{n}{m}\sqrt{(yy+zz)}$; proinde FG $-$ FM, hoc eſt, $z - ydy : dx = \frac{n}{m}\sqrt{(yy+zz)}$, vel ſumendo quadrata $zz - 2zydy : dx + yydy^2 : dx^2 = nnyy : mm + nnzz : mm$; multiplicatis omnibus per $mmdx^2$, habebitur $mmzzdx^2 - 2mmzydydx + mmyydy^2 = nnyydx^2 + nnzzdx^2$; reducta æquatione provenit $zz = (2mmzydydx - mmyydy^2 + nnyydx^2) : (mm - nn)dx^2$, ex cujus reſolutione oritur $z = (mmydydx + \sqrt{(mmnnyydy^2dx^2 + mmnnyydx^4 - n^4yydx^4)}) : (mm - nn)dx^2$ vel diviſo per dx, $z = (mmydy + \sqrt{(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2)}) : (mmdx - nndx) =$ FG vel fg. Eſt autem $bf : fg = b$H $[dy]$: HL; ergo HL $= (mmdy^2 + dy\sqrt{(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)}) : (mmdx - nndx)$, & BH $+$ HL $=$ BL; proinde BL $= dx + (mmdy^2 + dy\sqrt{(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)}) : (mmdx - nndx)$. Sed AF $+$ FG $=$ AG, ergo AG $= x + (mmydy + \sqrt{(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2)}) : (mmdx - nndx)$; ſumatur differentiale lineæ AG, proveniet G$g = dx + (mmdy^2 + mmyddy) : (mmdx - nndx) + (mmnnydyddy + mmnndy^3 + mmnndx^2dy - n^4dx^2dy) : (mmdx - nndx)\sqrt{(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)}$. Eſt autem BF^2 $+$ FG^2 $=$ BG^2 : Ergo BG $= \sqrt{[yy + (m^4yydy^2 + mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2 + 2mmydy\sqrt{(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4y^2dx^2)}) : (m^4dx^2 - 2mmnndx^2 + n^4dx^2)]}$. His inventis, ſumatur differentia inter BL & Gg, & erit BL $-$ G$g = (-mmyddy - mmnnydyddy : \sqrt{(mmnndy^2 + mmnndx^2 - n^4dx^2)}) : (mmdx - nndx)$.

Sed, ob ſimilitudinem triangulorum BLE & GgE, eſt BL : Gg $=$ BE : GE; ergo *dividendo* BL $-$ Gg : BL $=$ BG : BE; Proportione itaque hac inſtituta, invenitur BE, ſi $mmdx^2 - nndx^2 + mmdy^2 + dy\sqrt{(mmnndy^2 + mmnndx - n^4dx^2)}$ multiplicatur per $\sqrt{[yy + (m^4yydy^2 + mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2 + 2mmydy\sqrt{(mmnnyydy^2 + mmnnyydx^2 - n^4yydx^2)}) : (m^4dx^2 - 2mmnndx^2 + n^4dx^2)]}$, & productum dividatur

per

per $-mmyddy - mmnydyddy : \sqrt{(mmdy^2 + mmdx^2 - nndx^2)}$. Hinc in quavis curva data inveniri potest longitudo radii refracti BE, substituendo nempe valorem ipsius dx, vel dy, & ddy; nam dx, dy & ddy, ob curvæ datæ naturam, sese destruent, & proin orietur longitudo BE in quantitatibus pure algebraïcis. Cognita autem BE, curva Caustica construi & determinari potest. *Q. E. D.*

Si m ad n habet rationem infinite magnam, hoc est, si sinus anguli refractionis est nihil, & proinde radius refractus ipsa perpendicularis ad curvam; manifestum est quod tunc Caustica sit ipsa curva, ex cujus evolutione curva data ABC describitur, & hoc re ipsa ita invenitur. Posito enim, in quantitate BE generaliter inventa, $n = 0$; proveniet $BE = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -ddydx$; quod idem etiam supra, de evolutione curvarum *, pro longitudine lineæ evolventis repertum fuit; id quod calculi nostri ἀκρίβειαν quodammodo confirmare potest.

LECTIO QUINQUAGESIMA OCTAVA.

Continuatio ejusdem argumenti. De curvis Causticis per Refractionem.

Postquam determinaverimus Causticas ex generali refractionis lege, operæ prætium erit ut ad speciales refractiones applicentur; qualis ex. gr. deprehenditur in vitro, ubi ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refractionis, seu m ad n, ut 3 ad 2. Si itaque longitudinem radii refracti in quavis curvitate vitri invenire velimus, ponendum est $m = 3$ & $n = 2$; quo facto invenitur BE, si $5dx^2 + 9dy^2 + dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)}$ multiplicetur per $\sqrt{(117yydy^2 + 45yydx^2 + 18yydy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)})} : 5dx$, & productum dividatur per $-9yddy - 18ydyddy : \sqrt{(9dy^2 + 5dx^2)}$, vel quia numerator & denominator dividi potest per y [quod etiam fieri potuit in gene-

* Lect. XVI, pag. 437.

generali quantitate longitudinem BE exprimente] erit $BE = (5dx^2 + 9dy^2 + dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)}) \times \sqrt{(117dy^2 + 45dx^2 + 18dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)})} : (-45dxddy - 90dxdyddy : \sqrt{(9dy^2 + 5dx^2)})$.

Sit nunc curva proposita ABC Parabola; cujus parameter $= 2a$, ergo $2ax = y$, & $x = yy : 2a$, ideoque $dx = ydy : a$; quoniam autem dx est constans, erit ddx seu $(yddy + dy^2) : a = 0$ proinde $ddy = -dy^2 : y$. Si itaque loco dx & ddy, ponantur eorum valores; proveniet $5dx^2 = 5yydy^2 : aa$; $dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)} = \frac{dy^2}{a}\sqrt{(36aa + 20yy)}$; $\sqrt{(117dy^2 + 45dx^2 + 18dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)})} = \frac{dy}{a}\sqrt{(117aa + 45yy + 18a\sqrt{(36aa + 20yy)})}$; $-45dxddy = 45dy^3 : a$, $-90dxdyddy : \sqrt{(9dy^2 + 5dx^2)} = 90dy^3 : \sqrt{(9aa + 5yy)}$; tota itaque quantitas BE erit $= (5yydy^2 : aa + 9dy^2 + \frac{dy^2}{a}\sqrt{(36aa + 20yy)}) \times \frac{dy}{a}\sqrt{(117aa + 45yy + 18a\sqrt{(36aa + 20yy)})} : 45dy^3 : a + 90dy^3 : \sqrt{(9aa + 5yy)})$. Diviso numeratore & denominatore per dy^3, & ordinata fractione, habebitur tandem $BE = (\sqrt{(9aa + 5yy)^3} + 18a^3 + 10ayy) \times \sqrt{(117aa + 45yy + 18a\sqrt{(36aa + 20yy)})} : (90a^3 + 45aa\sqrt{(9aa + 5yy)})$. Omnia itaque puncta Causticæ in Parabola, & quidem circino & regula, determinari possunt. Initium Causticæ invenitur ponendo $y = 0$; hoc enim in casu erit $BE = 3a$; distantia ergo initii Causticæ a vertice Parabolæ est ad parametrum ut 3 ad 2.

Non aliter invenitur longitudo radii refracti in Circulo. Sit enim ABC Circulus, cujus diameter $= 2a$, proinde $2ax - xx = yy$, & $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, $dy = (a - x)dx : \sqrt{(2ax - xx)}$; sumendo differentiale invenitur $ddy = -aadx^2 : (2ax - xx)\sqrt{(2ax - xx)} = -aadx^2 : y^3$; loco ergo dy & ddy, ponendi sunt eorum valores, & habebitur $9dy^2 = (9aadx^2 - 18axdx^2 + 9xxdx^2) : (2ax - xx) = (9aa - 9yy)dx^2 : yy \; dy\sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)} = \left(\frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}\right)\sqrt{\left(\frac{36aadx^2 - 32axdx^2 + 16xxdx^2}{2ax - xx}\right)}$

$= (adx$

$= (\frac{adx - xdx}{y}) \sqrt{(\frac{36aadx^2 - 16yydx^2}{yy})} = (adx^2 - xdx^2)$ $\sqrt{(36aa - 16yy)} : yy$. Item $\sqrt{(117dy^2 + 45dx^2 + 18dy \sqrt{(36dy^2 + 20dx^2)})} = \sqrt{(117aadx^2 - 72yydx^2 + (18adx^2 - 18xdx^2)\sqrt{(36aa - 16yy)}) : y} - 45\, dxddy = 45aadx^3 : y^3 - 90dxdyddy : \sqrt{(9dy^2 + 5dx^2)} = (90a^3dx^3 - 90aaxdx^3) : y^3 \sqrt{(9aa - 4yy)}$. Subſtitutis ergo ubique valoribus, provenit BE $= ((9aa - 4yy)dx^2 : yy + (a - x)dx^2 \sqrt{(36aa - 16yy)}) \times dx \sqrt{(117aa - 72yy + 18(a - x)\sqrt{(36aa - 16yy)} : y)} : (45aadx^3 : y^3 + 90(a - x)aadx^3 : y^3 \sqrt{(9aa - 4yy)})$. Diviſo numeratore & denominatore per dx^3, & reducta fractione habebitur $BE = (\frac{\sqrt{(9aa - 4yy)^3} + 18a^3 - 8ayy - 18aax + 8yyx}{45aa\sqrt{(9aa - 4yy)} + 90a^3 - 90aax}) \times \sqrt{(117aa - 72yy + (18a - 18x)\sqrt{(36aa - 16yy)})}$. Initium hujus Cauſticæ habetur ponendo $x = a$, proinde etiam $y = a$, erit enim $BE = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$. Finis ejuſdem Cauſticæ innoteſcit, ſi ponatur x & $y = 0$, ex hac enim poſitione oritur $BE = 3a$. Hi duo caſus ſunt iidem, quos Dn. HUGENIUS aſſignavit in ſuo Tractatu *De lumine*; cæterum generaliter oſtendi poteſt, quod punctum Cauſticæ cujuſcunque in axe curvæ generatricis ſumptæ, ſit a vertice ejuſdem curvæ diſtans linea quæ eſt ad longitudinem perpendicularis ad curvam in vertice ut m ad $m - n$. Radius enim perpendiculariter incidens in vertice curvæ cujuſdam ABC abſque refractione progreditur per lineam & axem AG; punctum itaque Cauſticæ in axe G ibi erit, ubi radius BG, qui eſt refractus ipſius DB infinite parum diſtantis interſecat axem AG. Ductis autem ordinata BF, perpendiculari ad curvam BM, & normali MN ad BG, oſtendimus quod $BF : MN = m : n$; eſt autem $BF : MN = GF$, vel $GA : GN$ vel GM; ideoque $AG : MG = m : n$, & *dividendo* $AG : AM = m : m - n$. Hinc in Parabola, quia AM = ſemiparametro, ſtatim patet quod AG: param. $= m : 2m - 2n$, & proinde ſi $m = 3$ & $n = 2$; AG: param. $= 3 : 2$. Eodemque modo in Circulo, quia AM = ra- TAB. LXXVI. Fig. 18.

 dio,

dio, erit AG: radium $= m : m - n$, & si $m = 3$ & $n = 2$; AG ad radium ut 3 ad 1; & sic in aliis.

LECTIO QUINQUAGESIMA NONA.

Continuatio ejusdem argumenti. De Causticis per Refractionem.

ORdo nunc postularet ut illas quoque Causticas supputaremus, quarum radii incidentes, non quidem ab infinito, sed a puncto quodam determinato procedunt. Prolixitas autem calculi prioris casus ostendit eam in hoc multo majorem fore; prior enim posterioris non nisi peculiaris est casus, & sub hoc continetur. Sufficiet ergo viam indigitasse, per quam ad optatum finem, id est, longitudinem radii refracti pervenire possimus; quocirca id unicum adnitemur ut valorem ipsius z in litteris generalibus queamus exhibere. Sit adeoque punctum radians D, curva in quam radii DB, Db incidunt ABb; axis curvæ DAG, intercepta inter curvam & punctum radians AD $= a$, AF $= x$, FB $= y$, FG $= z$. Ad curvam in puncto incidentiæ B ducta perpendiculari BM, ducantur a puncto M ad radium refractum BG & ad incidentem continuatum DBO perpendiculares MN & MO: Constructis reliquis ut in priori casu, erit FM $= ydy : dx$, sed ob angulos rectos MOD & BFD, triangula MOD & BFD sunt similia, ideoque BD: BF $=$ DM : MO, & sic invenitur MO $= (yx + yydy : dx) : \sqrt{(xx + yy)}$. Nunc angulus OBM est $=$ angulo incidentiæ & NBM est angulus refractionis; proinde, sumpta BM pro sinu toto, erunt MO, MN sinus angulorum incidentiæ & refractionis; sic itaque $m : n =$ MO: MN, ergo MN $= (nyx + nyydy : dx) : m\sqrt{(xx + yy)}$, & ob similitudinem triangulorum GMN & GBF, BF: MN $=$ GF: GN; Ergo GN $= (nzx + nzydy : dx) : m\sqrt{(xx + yy)}$. Sed GN² + MN² $=$ MG², & ipsa MG $= (nnzzxx$

TAB. LXXVI. *Fig.* 181.

+

$+ 2nnzzyx\,dy : dx + nnzzyy\,dy^2 : dx^2 + nnyyxx + 2nnxy^3\,dy : dx + nny^4\,dy^2 : dx^2) : mm\,(xx + yy) = GF - MF = z - y\,dy : dx$. Ex hac itaque æquatione innotefcit valor z, qui fi addatur ad DF feu x, habebitur GD, cujus differentiale erit $= Gg$, & fi fiat BF : FG $= b$H : HL, cognofcetur HL & proinde BL, & ex lineis BF, FG, habebitur hypothenufa BG, & quia ob fimilitudinem triangulorum BLE & GgE, BL : Gg = BE : GE; & *dividendo* BL $- Gg$: BL = BG, ad quæfitam BE. Si quis calculum inftituere velit, experietur abfque tædiofa fupputatione id fieri non poffe. Interim finis vel initium Cauftica, quod in axe curvæ datæ ABC exiftit, facillime & nullo quafi calculo reperitur; punctum enim illud ibi erit ubi radius refractus BE radii incidentis DB, qui cum axe angulum facit infinite parvum, interfecat axem. Pofito ergo BDA angulo infinite parvo, quærenda eft longitudo BG, vel [ob differentiam infinite exiguam] AG. Quia autem fupra inventa eft $MN = (nyx + nyy\,dy : dx) : m\sqrt{(xx + yy)}$, erit $BF : MN = y : \frac{nyx + nyy\,dy : dx}{m\sqrt{(xx + yy)}} = m\sqrt{(xx+yy)} : nx + \frac{ny\,dy}{dx} = m$DB, vel mDA : nDA + nFM vel nAM. Eft vero etiam BF : MN = BG, vel AG : MG; ergo mDA : nDA + nAM = AG : MG; & *dividendo* mDA $-$ nDA $-$ nAM, id eft, mDA $-$ nDM : mDA = AM, ad quæfitam AG. Hinc ftatim patet, quod fi radii incidentes fint paralleli, & proinde ex infinito procedant, m fit ad $m - n$ ut AG ad AM; hoc enim in cafu DA cenfetur = DM, proinde mDA : mDA $-$ nDM $= m : m - n$; ergo quoque $m : m - n$ = AG : AM.

Si eft $m : n$ = DM : DA, & proinde nDM $= m$DA, erit mDA $-$ nDM $= 0$; ideoque $0 : m$DA = AM : AG infinitum; in hoc itaque cafu erit axis AG curvæ Cauftica afymptotos.

Si curva data ABb eft Parabola & $m : n = 3 : 2$, erit 3DA $-$ 2DM = 3DA $-$ 2DA $-$ param. = DA $-$ parametro; ideoque DA $-$ param. ad 3DA $= \frac{1}{2}$ param.

 ad AG,

ad AG, hinc si DA = parametro, erit AG Causticæ asymptotos.

Si AB*b* est Circulus, & $m : n = 3 : 2$; erit 3DA — 2DM = 3DA — 2DA — diametr. = DA — diametr. proinde DA — diametr.: 3 DA = radius : AG; hinc si DA = diametro, erit axis AG curvæ Causticæ asymptotos.

Notandum etiam est, quod dato initio Causticæ G, determinari possit punctum radians D. Quoniam enim MG: AG = nDA + nAM: mDA, erit $\frac{1}{n}$MG: $\frac{1}{m}$AG = DA + AM: DA, & proinde *dividendo* $\frac{1}{n}$MG — $\frac{1}{m}$AG: $\frac{1}{m}$AG = AM: DA quæsitam.

Restat ut Problema de Causticis inverse resolvatur; hoc est data curva Caustica invenire curvam cujus est Caustica. Hoc Problema autem est indeterminatum, una enim eademque Caustica infinitas habet curvas in quibus radii tam refracti quam reflexi illam generant. Quoniam autem supra in articulo de Causticis a reflexione radiorum ortis hujus Problematis inverse positi mentionem nullam fecimus; nunc de utroque genere Causticarum inverse solvendarum paucis agemus.

TAB. LXXVI. *Fig.* 182. Sit ABC curva data Caustica; quæritur altera curva AFH ita ut radii GF paralleli incidentes & reflectentes FB tangant curvam ABC; Causticarum natura enim id requirit: A puncto quodam curvæ datæ C, pro initio sumpto, ducatur tangens CD & per ejus quodcunque punctum D agatur alia linea DE angulum faciens quemcunque CDE: ducta per punctum E perpendiculari LGEH, fiat in alio curvæ puncto B tangens BF; in eaque quæratur punctum F, ita ut si FG ducatur parallela ipsi DE, lineæ BF + FG sint = curvæ BC + CD + DE; erit punctum F in curva quæsita AFH. Demonstratio hujus ex iis, quæ de Causticis dicta sunt, manifesta est.

TAB. LXXVI. *Fig.* 183. Si nunc radii incidentes ex puncto quodam dato proveniunt, curva quæsita sic construitur. Sit ABC curva Caustica data, & punctum L datum a quo ducatur ad curvam tangens LC

&

& ducta in quolibet alio puncto B tangente BF, quæratur in ea punctum F, ita ut ducta $LF + BF$ sit $=$ curvæ $BC + LC$; erit punctum F in curva quæsita AF.

Ex his patet curvam AF in hoc & in præcedenti casu esse mechanicam, si Caustica ABC non rectificari possit. Sic itaque hic idem animadverti potest, quod in evolutione curvarum. Nam quemadmodum omnis curva geometrica habet aliam geometricam & simul rectificabilem, ex cujus evolutione illa generatur, sed non vice versa; non enim omnis curva geometrica per sui evolutionem producit aliam geometricam; sic etiam omnis curva geometrica habet Causticam geometricam & rectificabilem, sed non vicissim.

Alia insuper analogia his curvis intercedit. Sicut quælibet curva data unicam duntaxat habet curvam ex cujus evolutione progignitur, & e contra unica curva data infinitas alias gradu diversissimas per sui evolutionem describere potest, prout initium evolutionis hic vel alibi sumatur; ita quoque quælibet curva unicam tantum habet Causticam, sed unica curva infinitarum aliarum potest esse Caustica; prout nempe in primo casu angulus CDE, in posteriori vero punctum L sumatur.

In constructione Causticæ primi casus assumtum est, quod punctum F inveniri possit, ita ut $BF +$ parallela FG sit $=$ quantitati datæ. Hoc punctum sic invenitur: producta BF donec occurrat rectæ LG in N; fiat NO perpendicularis ad LN & æqualis ipsi NB, & ducatur OB, abscissa $NP =$ quantitati datæ, nempe curvæ $BC + CD + DE$, agatur PQ parallela NL secans OB in Q, & per punctum Q parallela QG: secabit hæc QG rectam NB in puncto quæsito F; quoniam enim $NO = NB$ erit $FQ = FB$, ergo $QF + FG$, seu PN, seu curva $BC + CD + DE = BF + FG$; ideoque F est punctum quæsitum. TAB. LXXVI. *Fig.* 182. & 184.

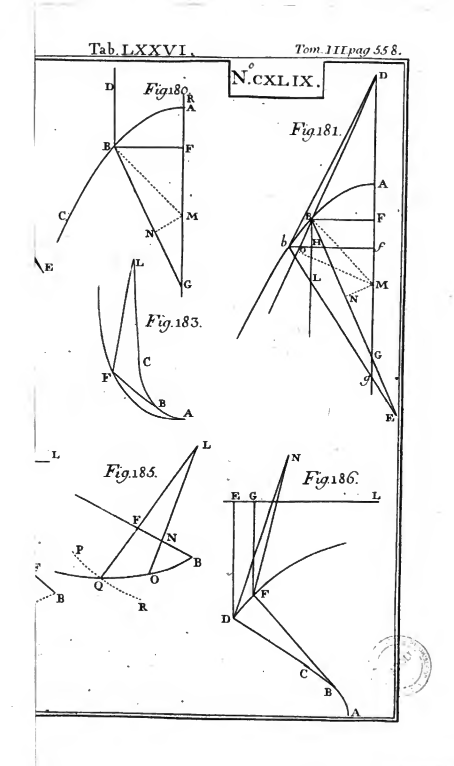
In constructione posterioris casus assumptum est punctum F, ita ut $BF + LF$ [*Fig.* 183] sit æqualis curvæ $BC + LC$: Hoc ita invenitur. Prolongetur BF [*Fig.* 185] quantum opus, & describatur curva BOQ ejus naturæ, ut quomodocunque ducta LNO intercepta NO TAB. LXXVI. *Fig.* 183. & 185.

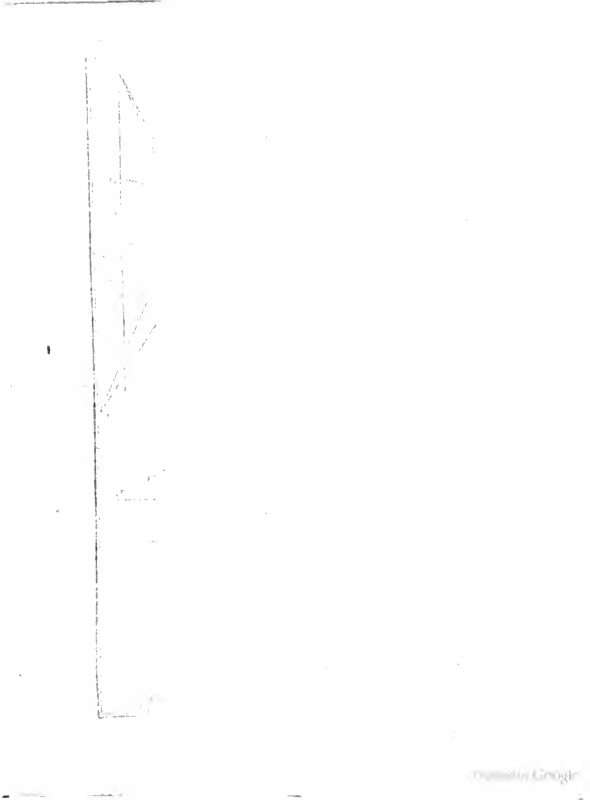
fit = abfciffæ N B; radio L Q = curvæ B C + C L [*Fig.* 183] defcribatur arcus circuli P Q R fecans curvam B O Q in Q, erit, ducta L Q, F punctum quæfitum. Demonftratio hujus evidens eft.

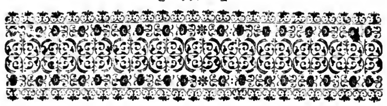
TAB. LXXVI. *Fig.* 186. Data nunc Cauftica refractiva, id eft quæ a radiis refractis oritur; difficile non reperietur curvam defcribere cujus illa eft Cauftica. Sit enim curva data Cauftica A B C & in puncto C, tanquam fine, ducatur tangens C D, fiatque angulus C D E quicunque. Ducta per E perpendiculari E L, agatur quæcunque tangens B F, in qua quæratur punctum F, ita ut ducta F G parallela ipfi E D, curva $BC + CD + \frac{n}{m} DE$ fit $= BF + \frac{n}{m} FG$ [quod ad modum præcedentem facile conftrui poteft], erit punctum F quæfitum. Si omnes radii in puncto dato N coire debent; oportet in tangente B F fumere punctum F, ita ut, ducta N F, curva $BC + CD + \frac{n}{m} ND$ fit $= BF + \frac{n}{m} NF$; erit punctum F iterum quæfitum. Hæc itaque puncta F formabunt curvam quæfitam. Quæ de prioribus Caufticis, refpectu evolutionis curvarum, dicta funt; ea pariter de his intelliguntur. Cæterum hæc omnia ex præcedentibus tam clare liquent ut demonftratione nulla indigeant.



INDEX


N°. CXLIX.
Fig. 180.
D
R
A
B
F
M
C
N
G
E
Fig. 181.
D
A
B
F
b
H
f
o
L
M
N
G
g
E
Fig. 183.
L
C
F
B
A
L
Fig. 185.
L
F
N
P
B
Q
O
R
B
Fig. 186.
N
E
G
L
F
D
C
B
A





INDEX NUMERORUM

Quos TOMUS TERTIUS *complectitur.*

Chap.

Diſcours

Lect. XXIII.

Lect. XLVIII.

F I N I S.





